[文章编号] 1007－7405(2017)02－0075－06

$H^1(\mathbf{R}^N)$ 上一类带限制的 Schrödinger 方程的正负解

刘竞坤[1]，范　琦[2]

（1. 集美大学诚毅学院，福建 厦门 361021；2. 厦门思泰克智能科技股份有限公司，福建 厦门 361100）

[摘要] 应用变分方法，以拓扑度理论为依据，研究 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 空间上一类带限制的半线性 Schrödinger 方程。通过构造适当的伪梯度向量场，解决带限制的半线性 Schrödinger 方程的 Cauchy 问题，证明其在周期和适当限制条件下解的存在性，并获得带限制的半线性椭圆特征问题的一个正解与一个负解。

[关键词] Schrödinger 方程；正解；负解；周期；$(PS)_c$ 序列；拓扑度理论

[中图分类号] O 175.5

Positive and Negative Solutions of a Schrödinger Equation with Constraint in $H^1(\mathbf{R}^N)$

LIU Jingkun[1], FAN Qi[2]

(1. Chengyi University College, Jimei University, Xiamen 361021, China;
2. Xiamen Sinic-Tek Intelligent Technology Co., Ltd, Xiamen 361100, China)

Abstract: Based on topology degree theory, variational method was applied to research a class of semilinear Schrodinger equation in $H^1(\mathbf{R}^N)$ with constraint in this paper. By constructing pseudo-gradient vector field, the Cauchy problem was solved and the existence of solution under the periodic and appropriate condition was proved. Finally, a positive solution and a negative solution of the semilinear elliptic problem with constraint were obtained.

Keywords: Schrödinger equation; positive solution; negative solution; period; $(PS)_c$-sequence; topology degree theory

0　引言

Schrödinger 方程是原子物理学中处理非相对论问题的有力工具，它反映了微观粒子的状态随时间变化的规律，其近似解不仅奠定了量子力学、量子化学、量子生物学、物质结构等学科的基础，还促进了现代科学技术的发展。在量子力学中，一个微观粒子的量子态用波函数来描述，当波函数确定后，粒子的任何一个量子力学的平均值以及它取各种能测量的值的概率都能够完全被确定。于是在量子力学中，最核心的问题便是给定初始状态后波函数如何随时间演变的问题，也就是数学上所说的 Schrödinger 方程的 Cauchy 问题。由于这个问题的重要性，自 20 世纪以来，数学家和物理学家们开始对它进行了广泛而深入的研究，特别是近几十年来，它一直是数学界的研究热点。

本文考虑了一类带限制的 Schrödinger 方程正负解的存在性：给定 $r>0$，找出 $u\in H^1(\mathbf{R}^N)$，满足：

[收稿日期] 2016－07－18　　[修回日期] 2017－01－09
[基金项目] 集美大学诚毅学院青年科研基金项目（C16005）
[作者简介] 刘竞坤（1982—），女，讲师，硕士，从事非线性泛函分析研究。

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda f(x,u), x \in \mathbf{R}^N, u \in H^1(\mathbf{R}^N), \\ \int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2)\mathrm{d}x = r^2, \\ u(x) \to 0, |x| \to +\infty。\end{cases} \tag{1}$$

如果 u 是正的，则称 u 为方程（1）的一个正解；如果 u 是负的，则称 u 为方程（1）的一个负解。

对问题（1），一些文献在泛函 a 与 f 不满足周期性的情况下获得了一些结论：刘竞坤[1]给出了方程（1）的 3 个解；Liu 等[2]证明了方程（1）变号解与多解的存在性；Kryszewski 等[3]对半线性 Schrödinger 方程

$$-\Delta u + a(x)u = f(x,u), x \in \mathbf{R}^N, u \in H^1(\mathbf{R}^N) \tag{2}$$

进行了研究，在泛函 a 与 f 满足周期性的情况下得到方程（2）的一个非平凡解；若 f 关于 u 是奇的，进一步得到方程（2）的无穷多个解。而后，刘竞坤[4]证明半线性椭圆方程

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f(x,u), x \in \mathbf{R}^N, u \in H^1(\mathbf{R}^N), \\ u(x) \to 0, |x| \to +\infty, \end{cases} \tag{3}$$

至少存在一个正解与一个负解。

假设方程（1）中 $a(x)$ 满足如下 2 个条件：（A1）$a(x) \in C(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$ 关于 $x_j(j = 1,2,\cdots,\mathbf{N})$ 满足周期性，且 $a(x) > 0$；（A2）0 位于 $\sigma(-\Delta + a)$ 的谱隙中，其中 $\sigma(-\Delta + a)$ 表示算子 $-\Delta + a$ 的谱。而 $f(x,u)$ 满足下列 4 个条件：（F1）$f(x,u) \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$，关于 $x_j(j = 1,2,\cdots,\mathbf{N})$ 满足周期性；（F2）当 $u \to 0$ 时，$f(x,u) = o(|u|)$ 关于 $x \in \mathbf{R}^N$ 一致成立；（F3）存在 $\gamma > 2$，使得 $0 < \gamma F(x,u) \leqslant uf(x,u)$，$x \in \mathbf{R}^N$，$u \in R \setminus \{0\}$，其中 $F(x,u) := \int_0^u \mathrm{f}(\mathrm{x},\xi)d\xi$；（F4）存在常数 $C > 0$，使得 $|f(x,u)| \leqslant C(1 + |u|^{p-1})$，$x \in \mathbf{R}^N$，$u \in \mathbf{R}$，其中，当 $N = 1$，2 时，$p > 2$；当 $N \geqslant 3$ 时，$2 < p < 2^* = (2N)/(N-2)$。

1　泛函的构造与相关性质

定义 $E := H^1(\mathbf{R}^N)$，自伴算子 L：$E \to E$

$$(Lu,v) := \int_{\mathbf{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + a(x)uv)\mathrm{d}x,\ u,v \in E, \tag{4}$$

$$D_r := \{u \in E: \int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2)\mathrm{d}x = r^2\}, \tag{5}$$

$$F(x,u) := \int_0^u f(x,t)\mathrm{d}t,\ u \in \mathbf{R}, \tag{6}$$

$$J(u) := -\int_{\mathbf{R}^N} F(x,u(x))\mathrm{d}x,\ u \in E, \tag{7}$$

$$\langle J'(u),v\rangle := -\int_{\mathbf{R}^N} (x,u(x))v(x)\mathrm{d}x,\ u,v \in E, \tag{8}$$

$$I := J|D_r。 \tag{9}$$

由 Zeidler[5]可知：

$$I'(u) = J'(u) - (J'(u),u)u/(Lu,u), u \in D_r。 \tag{10}$$

由文献［6］Theorem XIII. 100 得：算子 L 有由互不相交的闭区间构成的有下界的纯绝对连续谱。再由（A2）与 Riesz 空间分解定理[7]得：空间 E 可分解为 L 的两个无限维不变正交子空间 Y 与 Z，即 $E = Y \oplus Z$，其中 Y 为正定的，Z 为负定的。令 $P: E \to Y$，$Q: E \to Z$ 为其对应的正交投影。构造 E 上的一个内积 $\langle u,v\rangle := (L(P-Q)u,v), u,v \in E$ 对应的范数为 $\|u\| := \sqrt{\langle u,u\rangle}, u \in E$，则内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 与 $(\cdot,\cdot)$ 等价，且 Y 与 Z 关于内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 正交。由式（10）易得

$$\langle I'(u),v\rangle := \langle J'(u),v\rangle - \langle J'(u)u,u\rangle/r^2,\ u \in D_r, v \in E。 \tag{11}$$

由文献［2］可知：I 的临界点与问题（1）的解一一对应，其中 $\lambda = -r^2/\langle J'(u),u\rangle_H$。从现在起，$K$ 表示 I 的临界点所构成的集合，K_c 表示 I 在水平 c 的临界点所构成的集合，即 $K := \{u \in D_r: I'(u) = 0\}$，$K_c := \{u \in K: I(u) = c\}$，$I^\beta := \{u \in D_r: I(u) \leqslant \beta\}$，$I_\alpha := \{u \in D_r: I(u) \geqslant \alpha\}$，$I_\alpha^\beta := I^\beta \cap I_\alpha$。

根据 $f(x,u)$ 所满足的条件可知：对任意 $\varepsilon > 0$，存在只与 ε 有关的 $C_1, C_2 > 0$，使得

$$|f(x,u)| \leqslant \varepsilon|u| + C_1|u|^{p-1},\ x \in \mathbf{R}^N, u \in \mathbf{R}, \tag{12}$$

$$F(x,u) \geqslant C_2|u|^\gamma - \varepsilon|u|^2, x \in \mathbf{R}^N, u \in \mathbf{R}, \tag{13}$$

从而

$$\int_{\mathbf{R}^N} F(x,u)\mathrm{d}x = o(\|u\|^2),\ \|u\| \to 0, \tag{14}$$

且存在 $\rho > 0$，使得

$$b := \inf_{S_\rho \cap Y} J > -\rho^2/2, \tag{15}$$

其中，S_ρ 是以 O 为中心、ρ 为半径的球面。

命题 1　若 $y_0 \in Y$，$\|y_0\| = 1$，则存在 $\rho > 0$，$R > \rho$，使得 $\max\limits_{\partial M} I = -r^2/2$，$S := \sup\limits_{\overline{M}} I < \infty$，其中 $M := \{u = \theta y_0 + z: z \in Z, \|u\| < R, \theta > 0\}$，$\partial M := \overline{M} \backslash M = \{u = \theta y_0 + z: z \in Z, \|u\| = R, \theta \geqslant 0\} \cup \{u = \theta y_0 + z: z \in Z, \|u\| \leqslant R, \theta = 0\}$。

证明　由式（13）与 Sobolev 嵌入定理[8]得，对任意 $\varepsilon > 0$ 有：$I(\theta y_0 + z) = -r^2/2 + \|\theta y_0\|^2/2 - \|z\|^2/2 - \int_{\mathbf{R}^N} F(x, \theta y_0 + z)\mathrm{d}x \leqslant -r^2/2 + \theta^2/2 - \|z\|^2/2 - \int_{\mathbf{R}^N}(C_2|\theta y_0 + z|^\gamma - \varepsilon|\theta y_0 + z|^2)\mathrm{d}x = -r^2/2 + \theta^2/2 - \|z\|^2/2 + \varepsilon|\theta y_0 + z|_2^2 - C_2|\theta y_0 + z|_\gamma^\gamma \leqslant -r^2/2 + \theta^2/2 - \|z\|^2/2 + C_2'\varepsilon(\|\theta y_0\|^2 + \|z\|^2) - C_2|\theta y_0 + z|_\gamma^\gamma = -r^2/2 + (1/2 + C_2'\varepsilon)\theta^2 + (C_2'\varepsilon - 1/2)\|z\|^2 - C_2|\theta y_0 + z|_\gamma^\gamma$，其中 C_2' 与 ε 无关。不妨设 $C_2'\varepsilon = 1/4$，则 $I(\theta y_0 + z) \leqslant -r^2/2 + 3\theta^2/4 - \|z\|/4 - C_2|\theta y_0 + z|_\gamma^\gamma$ 存在 L^γ 上从 $Ry_0 \oplus Z$ 的闭包到 Ry_0 的连续投影，因而存在常数 $C_3 > 0$，使得：$|\theta y_0|_\gamma \leqslant C_3|\theta y_0 + z|_\gamma^\gamma$。因此 $I(\theta y_0 + z) \leqslant -r^2/2 + 3\theta^2/4 - \|z\|^2/4 - C_4\theta^\gamma$。其中，$C_4 > 0$。当 R 足够大时，$\max\limits_{\partial M} I = -r^2/2$。由 $\overline{M}$ 的有界性得：$\sup\limits_{\overline{M}} I < \infty$。

定义 1　设 $I \in C^1(E, \mathbf{R})$，称序列 $\{u_n\}$ 为 I 的 (PS) 序列是指 $\{u_n\} \subset E$ 满足 $\{I(u_n)\}$ 有界且 $I'(u_n) \to 0$。特别地，称序列 $\{u_n\}$ 为 I 在 c 水平的 $(PS)_c$ 序列是指 $\{u_n\} \subset E$ 满足 $I(u_n) \to c$ 且 $I'(u_n) \to 0$。

若序列 $\{u_n\} \subset E$ 为 I 在 c 水平的 $(PS)_c$ 序列，则 $\{u_n\}$ 有界且 $c \geqslant 0$。

引理 1[9]　设 $\rho > 0$，序列 $\{u_n\} \subset E$ 有界且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{a \in \mathbf{R}^N} \int_{B(a,\rho)} |u_n|^q \mathrm{d}x = 0$，$2 \leqslant q < 2^*$，则对任意 $s \in (2, 2^*)$，$\{u_n\}$ 在 $L^s(\mathbf{R}^N)$ 上收敛到 0，其中 $B(a,\rho)$ 是以 a 为中心、ρ 为半径的开球。

命题 2　设 $\{u_n\} \subset D_r$ 为 I 的 $(PS)_c$ 序列，则存在序列 $\{a_n\} \subset \mathbf{R}^N$，$\rho, \eta > 0$，使得

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B(a_n,\rho)} |u_n|^2 \mathrm{d}x \geqslant \eta。 \tag{16}$$

证明　假设式（16）不成立，由引理 1 得：序列 $\{u_n\}$ 有一个子列在 $L^p(\mathbf{R}^N)$ 上收敛到 0。令 $y_n = Pu_n$，$z_n = Qu_n$，取 $\varepsilon > 0$，由式（12）与 Hölder 不等式[10]得：$\int_{\mathbf{R}^N} |f(x,u_n)y_n|\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon\int_{\mathbf{R}^N}|u_n||y_n|\mathrm{d}x + C_1\int_{\mathbf{R}^N}|u_n|^{p-1}|y_n|\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon|u_n|_2|y_n|_2 + C_1|u_n|^{p-1}|y_n|_p$。由 ε 的任意性与 Sobolev 嵌入定理[8]可得：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^N} f(x,u_n)y_n\mathrm{d}x = 0$。由式（10）可得：$[J'(u_n) - I'(u_n)]r^2 = \langle J'(u_n), u_n\rangle u_n$。从而 $[\langle J'(u_n), y_n\rangle - \langle I'(u_n), y_n\rangle]r^2 = \langle J'(u_n), u_n\rangle(Lu_n, y_n)$，即：$[-\int_{\mathbf{R}^N} f(x,u_n)y_n\mathrm{d}x - \langle I'(u_n), y_n\rangle]r^2 =$

$-\|y_n\|^2\int_{\mathbf{R}^N} f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x$。再由 $I'(u_n)\to 0$ 知 $y_n\to 0$。同理可得 $z_n\to 0$。因而 $u_n\to 0$，这与 I 的假设矛盾，所以式（16）成立。

2 伪梯度流与拓扑度理论

定义函数 $|||\cdot|||:E\to[0,+\infty)$，$|||u|||:=\max\{\|Pu\|,\sum_{k=1}^{\infty}|\langle Qu,e_k\rangle|/2\}$。其中 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 Z 的一个完全正交系，则 $|||\cdot|||$ 为空间 E 的一个范数。建立拓扑 $(E,|||\cdot|||)$，记为 τ 拓扑，则有 $u_n\xrightarrow{\tau}u\Leftrightarrow Pu_n\to Pu$ 且 $Qu_n\rightharpoonup Qu$。

定义 2 设 U 为空间 E 的一个有界开集，称映射 $g:\overline{U}\to E$ 为一个容许映射是指 g 满足 3 个条件：1）$0\notin g(\partial U)$；2）g 是 τ 连续的，即在 $\overline{U}$ 上，当 $u_n\xrightarrow{\tau}u$ 时，有 $g(u_n)\xrightarrow{\tau}g(u)$；3）$h=I-g$（$I$ 为恒同映射）是 τ 局部有限维的，即任意 $u\in U$ 有一个 τ 邻域 W_u，使得 $h(W_u\cap U)$ 包含在 E 的某个有限维子空间内。

称映射 $G:\overline{U}\times[0,1]\to E$ 为一个容许同伦是映射 G 满足 3 个条件：1）$0\notin G(\partial U\times[0,1])$；2）$G$ 是 τ 连续的，即在 $\overline{U}\times[0,1]$ 上，当 $u_n\xrightarrow{\tau}u$，且 $t_n\to t$，有 $G(u_n,t_n)\xrightarrow{\tau}G(u,t)$；3）$H(u,t)=u-G(u,t)$ 是 τ 局部有限维的，即任意 $(u,t)\in U\times[0,1]$ 有一个邻域 $W_{(u,t)}$，使得 $\{H(v,s):(v,s)\in W(u,t)\cap(U\times[0,1])\}$ 包含在 E 的某个有限维子空间内。

引理 2[3-4] 设 N 为 τ 开集，向量场 $\boldsymbol{V}:N\to E$ 满足：任意 $u\in N$ 有一个 τ 邻域 W_u，使得 $\boldsymbol{V}(W_u)$ 包含在 E 的某个有限维子空间内。且存在 $L_u\geqslant 0$，使得 $|||\boldsymbol{V}(u')-\boldsymbol{V}(u'')|||\leqslant L_u|||u'-u''|||$，$u',u''\in W_u$。若 $A\subset N$ 为一个闭集，则对任意 $u\in A$，Cauchy 问题

$$\begin{cases}-\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}/\mathrm{d}t=-\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\eta}),\\ \boldsymbol{\eta}(u,0)=u,\end{cases}\tag{17}$$

在 $[0,1]$ 上存在一个连续的解 $\boldsymbol{\eta}(u,\cdot)$，且 $\boldsymbol{\eta}(u,t):A\times[0,1]\to E$ 是一个容许同伦。

定义 3 设 Y_0 为空间 Y 的一个有限维子空间，U 为空间 $E_0:=Y_0\oplus Z$ 的开集。令容许映射 $g:\overline{U}\to E_0$ 满足 $g^{-1}(0)\cap\partial U=\varnothing$ 且 $g^{-1}(0)$ 是 τ 紧的，则存在 $\{u_i\}_{i=1}^{n}\subset g^{-1}(0)$ 使得 $g^{-1}(0)\subset W:=\bigcup_{i=1}^{n}W_{u_i}\cap U$，$(I-g)(W)$ 包含在空间 E_0 的某个有限维子空间 L 内。取 $W_L:=W\cap L$，$g_L:=g|_{W_L}:W_L\to L$，显然，$g_L^{-1}(0)=g^{-1}(0)$，且 $g_L^{-1}(0)$ 关于 L 是紧的，定义

$$\deg(g,U,0):=\deg_B(g_L,W_L,0),\tag{18}$$

其中 $\deg_B$ 表示 Bouwer 度。

根据文献［9］可得到 $\deg(g,U,0)$ 的如下性质。

性质 1 若 $\deg(g,U,0)\neq 0$，则 $g^{-1}(0)\neq\varnothing$。

性质 2 若 $u_0\in U$，则 $\deg(I-u_0,U,0)=1$。

性质 3 设 $G:\overline{U}\times[0,1]\to E_0$ 为容许同伦，$G^{-1}(0)\cap(\partial U\times[0,1])=\varnothing$，且 $G^{-1}(0)$ 为 τ 紧的，则 $\deg(G(\cdot,t),U,0)$ 与 $t\in[0,1]$ 无关。

3 正负解的存在性

构造椭圆特征方程

$$\begin{cases}-\Delta u+a(x)u=\bar{\lambda}\bar{f}(x,u),x\in\mathbf{R}^N,u\in E,\\ \int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2+a(x)u^2)\mathrm{d}x=r^2,\\ u(x)\to 0,|x|\to+\infty。\end{cases}\tag{19}$$

其中，

$$\bar{f}(x,u)=\begin{cases}f(x,u), & u>0,\\ 0, & u\leqslant 0。\end{cases}\tag{20}$$

令

$$\bar{F}(x,u)=\int_0^u \bar{f}(x,t)\,\mathrm{d}t,\ u\in\mathbf{R},\tag{21}$$

$$\bar{J}(u)=-\int_{\mathbf{R}^N}\bar{F}(x,u(x))\,\mathrm{d}x,\ u\in E,\tag{22}$$

$$\bar{I}=\bar{J}\,|\,D_r,\tag{23}$$

则

$$\bar{I}'(u)=\bar{J}'(u)-\langle J'(u),u\rangle u/(Lu,u),\ u\in E。\tag{24}$$

$\bar{I}(u)$ 的临界点与问题（19）的解一一对应，其中 $\bar{\lambda}=-r^2/\langle \bar{J}'(u),u\rangle$ 。

定理 1　假设 $a(x)$ 满足条件（A1）、（A2），$f(x,u)$ 满足条件（F1）—（F4），则方程（19）至少有一个非平凡解。

证明　由式（15）与命题 1 得：存在 $\bar{\rho}>0$，$\bar{R}>\bar{\rho}$，使得

$$\bar{b}:=\inf_{S_{\bar{\rho}}\cap Y}\bar{J}>-\bar{\rho}^2/2,\ \bar{S}:=\sup_{\bar{M}'}\bar{I}<\infty,\tag{25}$$

其中，$M':=\{u=\theta y_0+z:z\in Z,\|u\|<\bar{R},\theta>0\}$ ，$y_0\in Y$ 且 $\|y_0\|=1$。取 $\Gamma_\varepsilon:=\{u\in D_r:\|I'(u)\|\leqslant\varepsilon\}$，假设命题（A）：存在 $\varepsilon>0$，使得 $\Gamma_\varepsilon\cap\bar{I}^{-1}[\bar{b}-\varepsilon,\bar{S}+\varepsilon]=\varnothing$ 成立。令 $\alpha:=\bar{b}-\varepsilon$ ，对 $u\in\bar{I}_\alpha^{\bar{S}}$，取 $\omega(u):=2\bar{I}'(u)/\|\bar{I}'(u)\|^2$ ，由 $\bar{I}'$ 的弱连续性得：存在 u 的一个 τ 邻域 $U_u\subset E$，使得

$$\langle \bar{I}'(v),\omega(u)\rangle>1,\ v\in U_u\cap\bar{I}_\alpha^{\ \bar{S}}。\tag{26}$$

设 $U_0:=\bar{I}^{-1}(-\infty,\alpha)$ ，则 $\{U_u\}_{u}\in\bar{I}_\alpha^{\bar{S}}\cup\{U_0\}$ 为度量空间 $(\bar{I}^{\bar{S}},\tau)$ 的一个 τ 开覆盖，其具有一个 τ 局部有限 τ 开加细子覆盖 $\{N_j\}_{j\in J}$ ，则 $\bar{I}^{\bar{S}}\subset N:=\bigcup_{j\in J}N_j$ 。对任意 $j\in J$，要么存在某个 $u_j\in\bar{I}_\alpha^{\bar{S}}$ 使得 $N_j\subset U_{u_j}$，则取 $\omega_j:=\omega(u_j)$ ；要么 $N_j\subset U_0$ ，则取 $\omega_j:=0$ 。定义

$$\boldsymbol{V}(u):=\sum_{j\in J}(\lambda_j(u)\omega_j),\ u\in N,\tag{27}$$

其中，$\{\lambda_j\}_{j\in J}$ 为从属于 $\{N_j\}_{j\in J}$ 的单位分解[11]，由引理 2 得：Cauchy 问题 $\begin{cases}\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}t=-\boldsymbol{V}(\eta)\\ \eta(u,0)=u\in\bar{I}^{\bar{S}}\end{cases}$ 对 $t\geqslant 0$ 有唯一解 $\eta(u,t)$ 。取 $T:=\bar{S}-\bar{b}+2\varepsilon$ ，则 $\eta:\bar{I}^{\bar{S}}\times[0,T]\to\bar{I}^{\bar{S}}$ 是一个容许同伦，$\bar{M}'\subset\bar{I}^{\bar{S}}$ 。

一方面，设 $u\in\bar{M}'$ ，且 $\bar{I}(\eta(u,t))\geqslant\bar{b}-\varepsilon$ ，由式（26）与式（27）得：$\langle I'(u),\boldsymbol{V}(u)\rangle>1$ 。因而，对任意 $t\in[0,T]$，$\bar{I}(\eta(u,t))-\bar{I}(u)=\bar{I}(\eta(u,t))-\bar{I}(\eta(u,0))=\int_0^t \mathrm{d}\bar{I}(\eta(u,s))=\int_0^t\langle I'(\eta(u,s)),\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}s\rangle\mathrm{d}s=-\int_0^t\langle I'(\eta(u,s)),V(\eta(u,s))\rangle\mathrm{d}s$，所以，

$$\bar{I}(\eta(u,t))-\bar{I}(u)<-t。\tag{28}$$

因而有 $\bar{S}\geqslant\bar{I}(u)>\bar{I}(\eta(u,T))+T\geqslant\bar{b}-\varepsilon+T$ ，即 $T\leqslant\bar{S}-\bar{b}+\varepsilon<T$ ，矛盾。从而得到

$$\sup_{u\in\bar{M}'}\bar{I}(\eta(u,T))<\bar{b}。\tag{29}$$

另一方面，建立映射 $G:\bar{M}'\times[0,T]\to Ry_0\oplus Z$ ，$G(u,t):=(\|P\eta(u,t)\|-\bar{\rho})y_0+Q\eta(u,t)$ ，则 G 为容许同伦，且 $G(u,t)=0$ 当且仅当 $\eta(u,t)\in S_{\bar{\rho}}\cap Y$ 。由式（25）与式（28）得：

$$\bar{I}(u)\geqslant\bar{I}(\eta(u,t))\geqslant\bar{b},\tag{30}$$

且 $u\notin\partial M'$，因而 $G^{-1}(0)\cap(\partial M'\times[0,T])=\varnothing$ 。同时，$G(u,0)=u-\bar{\rho}y_0$ ，$\bar{\rho}y_0\in M'$ 。由性质 2 与性质 3 得：$\deg(G(\cdot,T),M',0)=\deg(G(\cdot,0),M',0)=1$ 。由性质 1 得：存在 $\bar{u}\in M'$，使得 $G(\bar{u},T)=0$。因而 $\eta(\bar{u},t)\in S_{\bar{\rho}}\cap Y$，由式(30)得：$\bar{I}(\eta(\bar{u},T))\geqslant\bar{b}$，与式(29)矛盾。

由此可得，命题(A)不成立，即对任意 $\varepsilon>0$，有 $\Gamma_\varepsilon\cap\bar{I}^{-1}[\bar{b}-\varepsilon,\bar{S}+\varepsilon]\neq\varnothing$ 。因此，$\bar{I}$ 存在一个

$(PS)_c$ 序列 $\{u_n\}$，其中 $c\in[\bar b,\bar S]$，$\{u_n\}$ 有界且有子列收敛到 0。再由命题 2 得：存在一个序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbf{R}^N,\rho,\eta>0$，使得 $\liminf\limits_{n\to\infty}\int_{B(a_n,\rho)}|u_n|^2\mathrm{d}x\geqslant\eta$，则存在 $\{u_n\}$ 的一个子列，仍记为 $\{u_n\}$，满足

$$\|u_n\|_{L^2(B(a_n,\rho))}\geqslant\eta/2。\tag{31}$$

取 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbf{Z}^N$ 满足 $|g_n-a_n|=\min\{|g-a_n|:g\in\mathbf{Z}^N\}$，则 $|g_n-a_n|\leqslant\sqrt{N}/2$。令 $v_n:=g_n*u_n\triangleq u_n(\cdot+g_n)$，由式(31)得

$$\|v_n\|_{L^2(B(0,r+\sqrt{N}/2))}\geqslant\eta/2。\tag{32}$$

显然，$\bar I(v_n)=\bar I(u_n)$，且 $\|\bar I'(v_n)\|=\|\bar I'(u_n)\|$。因而 $\{v_n\}$ 为 $\bar I$ 的一个 $(PS)_c$ 序列且 $\{v_n\}$ 有界。因此 $\{v_n\}$ 存在一个子列，仍记为 $\{v_n\}$ 收敛到某个 $v\in D_r$，且 $\bar I'(v)=0$，即方程（19）有一个非平凡解 v。

定理 2 假设 $a(x)$ 满足条件 (A_1)、(A_2)，$f(x,u)$ 满足条件 (F_1)—(F_4)，则方程（1）至少有一个正解与一个负解。

证明 设 $\mathscr{A}:=\{x\in\mathbf{R}^N:v(x)<0\}$，由式（20）得：$-\Delta v+a(x)v=0,x\in\mathscr{A}$。且当 $|x|\to+\infty$ 时，$v(x)\to0$。由极值原理[12]得 $v(x)\geqslant0$，$x\in\mathscr{A}$，与 $\mathscr{A}$ 的定义矛盾，所以 $\mathscr{A}=\varnothing$。从而可得：$v(x)\geqslant0,x\in\mathbf{R}^N$。再由（F3）得：$\langle\bar J'(v),v\rangle=-\int_{\mathbf{R}^N}\bar f(x,v(x))v(x)\mathrm{d}x<0$，因而 $\bar\lambda=-r^2/\langle\bar J'(v),v\rangle>0$。由 v 是式（19）的解得：$-\Delta v+[a(x)+\bar\lambda\bar f(x,v)^-/v]v=\bar\lambda\bar f(x,v)^+\geqslant0$。其中 $f^+:=\max\{f,0\}$，$f^-:=\min\{f,0\}$。由强极值原理[12]得：$v(x)>0,x\in\mathbf{R}^N$。因而 v 为方程（1）的正解。同理，得方程（1）的一个负解 w。

［参考文献］

［1］刘竞坤. $H^1(\mathbf{R}^N)$ 上带限制的椭圆特征问题的三个解［J］. 数学研究，2013，46(2)：160-166.

［2］LIU J K，CHEN J Q. Sign changing solutions and multiple solutions of an elliptic eigenvalue problem with constraint in $H^1(\mathbf{R}^N)$［J］. Computers and Mathematics with Applications，2010，59(8)：3005-3013.

［3］KRYSZEWSKI W，SZULKIN A. Generalized linking theorem with an application to semilinear Schrödinger equation［J］. Adv Diff Eq，1998(3)：441-472.

［4］刘竞坤. $H^1(\mathbf{R}^N)$ 上一类半线性椭圆问题的正解与负解［J］. 集美大学学报（自然科学版），2016，21(3)：228-233.

［5］ZEIDLER E. Nonlinear functional analysis and its applications（Ⅲ）［M］. New York：Springer-Verlag，1985.

［6］REED M，SIMON B. Methods of modern mathematical physics IV［M］. New York：Academic Press，1978.

［7］江泽坚，孙善利. 泛函分析［M］. 北京：高等教育出版社，2005.

［8］钟承奎，范先令. 非线性泛函分析引论［M］. 兰州：兰州大学出版社，1998.

［9］WILLEM M. Minimax theorems［M］. Berlin：Birkhäuser Boston Basel，1996.

［10］胡适耕. 实变函数［M］. 北京：高等教育出版社，1999.

［11］陈省身，陈维恒. 微分几何讲义［M］. 北京：北京大学出版社，2001.

［12］GILBARG D，TRUDINGER N S. Elliptic partial differential equations of second order［M］. New York：Springer-Verlag，1977.

（责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤）