[文章编号] 1007－7405(2017)06－0070－04

一类非线性退化抛物方程的解

周　臻[1]，詹华税[2]

（1. 集美大学理学院，福建 厦门 361021；2. 厦门理工学院应用数学学院，福建 厦门 361024）

[摘要] 在带权常指数索伯列夫空间中讨论一类非线性方程的解的适定性问题。方程 $u_t = \mathrm{div}(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(u,x,t)$ 中，$a(x)$ 在边界退化。在一定条件下，方程解的稳定性可不依赖于边界条件而完全由初值控制。

[关键词] 非线性方程；边界退化；稳定性；存在性

[中图分类号] O 175.2

Solutions of a Nonlinear Degenerate Parabolic Equation

ZHOU Zhen[1]，ZHAN Huashui[2]

（1. School of Science，Jimei University，Xiamen 361021，China；
2. School of Applied Mathematics，Xiamen University of Technology，Xiamen 361024，China）

Abstract：The problem of well-posedness of solutions for a nonlinear equation was discussed in weighted Sobolev space with constant exponent. For equation $u_t = \mathrm{div}(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(u,x,t)$，$a(x)$ was degenerate on the boundary. Under certain conditions，the stability of the solution did not depend on the boundary conditions but was controlled by the initial value completely.

Keywords：nonlinear equations；boundary degeneracy；stability；existence

0　引言

本文讨论方程

$$u_t = \mathrm{div}(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(u,x,t),(x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中的有界区域，边界 $\partial\Omega$ 光滑，$Q_T = \Omega\times(0,T)$，$p>1$ 为常数。此类方程常出现于非牛顿流体理论。方程（1）是热传递过程的情形之一。在过去的几十年间，发展的 p-Laplacian 方程 $u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ 已被深入研究[1－5]，当 $p=2$ 时，即为热传导方程；当 $p\neq 2$ 时，则更准确地描述了热传导的物理过程，比如，当 $p>2$ 时，方程的解可具有有限的扰动传播速度。$a(x)$ 表达为距离的函数的情形可参阅文献［6－8］。与 $a(x)\geqslant c>0$ 的一贯假设不同的是，本文假设 $a(x)\in C^1(\Omega)$，在区域 Ω 中，$a(x)>0$；在边界 $\partial\Omega$ 上，$a(x)=0$。$f(u,x,t)$ 适当光滑且满足条件 $|f(u,x,t)-f(v,x,t)|\leqslant c|u-v|,(x,t)\in Q_T$。方程（1）的扩散系数在边界上为零，该方程是边界退化的，这将影响这个方程的解在边界附近的正则性。由于方程在 $|\nabla u|=0$ 处发生退缩，一般来说该方程没有古典解。

[收稿日期] 2017－01－19　　**[修回日期]** 2017－04－04
[基金项目] 福建省自然科学基金项目（2015J01592）
[作者简介] 周臻（1992—），女，硕士生，从事偏微分方程方向研究。通信作者：詹华税（1966—），男，教授，从事偏微分方程方向研究，E-mail：hszhan@jmu.edu.cn。

定义 1　称函数 $u(x,t)$ 为方程（1）的广义解，若 $u \in L^\infty(Q_T) \cap L^\infty(0,T;W^{1,p}(\Omega,a)), u_t \in L^2(Q_T)$，$\iint_{Q_T}(u_t\varphi + a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iint_{Q_T} f(u,x,t)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \forall\varphi \in C_0^1(Q_T)$。

注 1　由逼近过程，定义 1 中当 $\varphi = \varphi_1\varphi_2$，$\varphi_1 \in L^\infty(0,T;W^{1,p}(\Omega,a))$，$\varphi_2 \in C_0^1(Q_T)$ 时亦成立。

初值条件

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega。\tag{2}$$

定理 1　设 $a(x)^{-1/(p-1)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，$a(x)^{-s} \in L^1(\Omega), s \in (N/p,\infty) \cap [1/(p-1),\infty)$，$u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega,a)$，则存在问题（1）、(2）的广义解。

定理 2　令 u，v 是满足方程（1）且分别具有初值 u_0，v_0 的两个解，设 $d(x) = \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$ 且 $d(x)^{-1} \in L^p(\Omega,a)$。若定理 1 的条件满足，则 $\int_\Omega |u(x,t) - v(x,t)|^2\mathrm{d}x \leqslant c\int_\Omega |u_0 - v_0|^2\mathrm{d}x$。

1　函数空间

权函数 $w(x)$ 在 Ω 上可积，且在 Ω 上几乎处处有 $0 < w(x) < \infty$。$L^p(\Omega,w) = \{u = u(x); uw^{1/p} \in L^p(\Omega)\}$，$\|u\|_{p,w} = (\int_\Omega |u(x)|^p w(x)\mathrm{d}x)^{1/p}$，$L^p(\Omega,w)$ 是一致凸的 Banach 空间（$1 < p < \infty$），$W^{1,p}(\Omega, w) = \{u = u(x); D^\alpha u \in L^p(\Omega,w), |\alpha| \leqslant 1\}$，$\|u\|_{1,p,w} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\int_\Omega |D^\alpha u|^p w\mathrm{d}x\right)^{1/p}$。

由文献［9－10］知，当 $1 < p < \infty$ 时，若权函数 $w(x)$ 满足 $w(x)^{-1/(p-1)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，则 $W^{1,p}(\Omega, w)$ 是一致凸的 Banach 空间。若同时有 $w(x) \in L^1_{\mathrm{Loc}}(\Omega)$，则可将空间 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{1,p}(\Omega,w)$ 中的完备化记为 $W_0^{1,p}(\Omega,w)$。若同时再有 $w(x)^{-s} \in L^1(\Omega)$，$s \in (N/p,\infty) \cap [1/(p-1),\infty)$，则有紧嵌入 $W^{1,p}(\Omega,w) \hookrightarrow\hookrightarrow L^r(\Omega)(1 \leqslant r < q)$，$q = \begin{cases} Np^*/(N-p^*), & p^* < N, \\ \infty, & p^* \geqslant N, \end{cases}$ $p^* = ps/(1+s)$。

2　定理 1 和定理 2 的证明

2.1　定理 1 的证明

考虑初边值问题：

$$u_{\varepsilon t} = \mathrm{div}((a(x)+\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon) + f(u_\varepsilon,x,t), (x,t) \in Q_T,\tag{3}$$

$$u_\varepsilon(x,0) = u_0, x \in \Omega,\tag{4}$$

$$u_\varepsilon(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)。\tag{5}$$

由发展的 p-Laplacian 理论[11]可知，当问题（3）～（5）满足定理 1 的条件时，存在广义解 u_ε，$u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;W^{1,p}(\Omega))$。

在式（3）的两边同时乘以 u_ε 并在 Q_T 上积分可得：

$$\int_\Omega u_\varepsilon^2\mathrm{d}x + 2\iint_{Q_T}(a(x)+\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 2\iint_{Q_T} f(u_\varepsilon,x,t)u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Omega u_0^2\mathrm{d}x。\tag{6}$$

在式（3）的两边同时乘以 $u_{\varepsilon t}$ 并在 Q_T 上积分可得：

$$\iint_{Q_T}(u_{\varepsilon t})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iint_{Q_T}\mathrm{div}((a(x)+\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon)\cdot u_{\varepsilon t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{Q_T} f(u_\varepsilon,x,t)u_{\varepsilon t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\tag{7}$$

记 $g(t) = \int_0^{|\nabla u_\varepsilon(x,t)|^2} s^{(p-2)/2}\mathrm{d}s$，由 $|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_{\varepsilon t} = (1/2)\mathrm{d}g/\mathrm{d}t$，得：

$$p\iint_{Q_T}(u_{\varepsilon t})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Omega (a(x)+\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon(x,T)|^p\mathrm{d}x = \int_\Omega (a(x)+\varepsilon)|\nabla u_0|^p\mathrm{d}x + p\iint_{Q_T} f(u_\varepsilon,x,t)u_{\varepsilon t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\tag{8}$$

由 Cauchy 不等式，有 $\iint_{Q_T} f(u_\varepsilon,x,t)u_{\varepsilon t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant (1/2)\iint_{Q_T}(u_{\varepsilon t})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + c$。

由式（6）、式（8）得：

$$\iint_{Q_T}(a(x)+\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant c,\ \iint_{Q_T}(u_{\varepsilon t})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant c。\tag{9}$$

常数 c 与 ε 无关。则存在函数 u 及 n 维向量函数 $\boldsymbol{\zeta}=(\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2,\cdots,\boldsymbol{\zeta}_n)$，满足：

$$u\in L^\infty(0,T;W^{1,p}(\Omega,a)),u_t\in L^2(Q_T),|\boldsymbol{\zeta}|\in L^{p/(p-1)}(0,T;L^{p/(p-1)}(\Omega,a^{-1/(p-1)})),$$

且有：$u_\varepsilon\to u$ 在 $L^\infty(Q_T)$ 中弱 * 收敛；$u_\varepsilon\to u$ 在 $L^2(0,T;L^r_{\mathrm{loc}}(\Omega))$ 中收敛；$u_{\varepsilon t}\to u_t$ 在 $L^2(Q_T)$ 中弱收敛；$a(x)|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon\to\boldsymbol{\zeta}$ 在 $L^{p/(p-1)}(0,T;L^{p/(p-1)}(\Omega,a^{-1/(p-1)}))$ 中弱收敛。其中，当 $1<p<2$ 时，$1<r<Np/(N-p)$；当 $p\geqslant 2$ 时，$r=2$。

由广义解的定义，$\forall\varphi\in C_0^1(Q_T)$，$u_\varepsilon$ 满足

$$\iint_{Q_T}u_{\varepsilon t}\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}(a(x)+\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_T}f(u_\varepsilon,x,t)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\tag{10}$$

由 Hölder 不等式及式（9），

$$\iint_{Q_T}\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon^{1/p}\left(\iint_{Q_T}\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{(p-1)/p}\left(\iint_{\mathrm{supp}\,\varphi}|\nabla\varphi|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/p}\leqslant c\varepsilon。\tag{11}$$

在式（10）中令 $\varepsilon\to 0$，得 $\iint_{Q_T}u_t\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}\boldsymbol{\zeta}\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_T}f(u,x,t)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t$。同文献［6］，有：$\iint_{Q_T}\boldsymbol{\zeta}\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_T}a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t$，即知 u 是式（1）的广义解。

2.2 定理 2 的证明

记 $\Omega_\varepsilon=\{x\in\Omega:\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)>\varepsilon\}$，令：$\xi_\varepsilon\in C_0^\infty(\Omega)$，$\xi_\varepsilon=0,x\in\Omega\setminus\Omega_\varepsilon$；$\xi_\varepsilon=1$，$x\in\Omega_{2\varepsilon}$；$0\leqslant\xi_\varepsilon\leqslant 1$；$|\nabla\xi\varepsilon|\leqslant c/\varepsilon$。由注 1 有

$$\iint_{Q_T}((u-v)_t\varphi_1\varphi_2+a(x)(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla(\varphi_1\varphi_2))\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$
$$\iint_{Q_T}(f(u,x,t)-f(v,x,t))\varphi_1\varphi_2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\tag{12}$$

$\forall\varphi_1\in L^\infty(0,T;W^{1,p}(\Omega,a))$，$\varphi_2\in C_0^1(Q_T)$。取 $\varphi=\varphi_1\varphi_2=(u-v)\xi_\varepsilon\chi_{[s,t]}$，其中 $\chi_{[s,t]}$ 是 $[s,t]$ 上的特征函数，$s,t\in(0,T)$。由式（12）得：

$$(1/2)\int_\Omega[u(x,t)-v(x,t)]^2\xi_\varepsilon\mathrm{d}x-(1/2)\int_\Omega[u(x,s)-v(x,s)]^2\xi_\varepsilon\mathrm{d}x=-\iint_{Q_{st}}\xi_\varepsilon a(x)(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-$$
$$|\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla(u-v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_{st}}\nabla\xi_\varepsilon a(x)(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v)(u-v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$
$$\iint_{Q_{st}}(f(u,x,t)-f(v,x,t))(u-v)\xi_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t=I_1+I_2+I_3。\tag{13}$$

显然，$I_1\leqslant 0$，$|I_2|\leqslant\iint_{Q_{st}}|\nabla\xi_\varepsilon|a(x)(|\nabla u|^{p-1}+|\nabla v|^{p-1})|u-v|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\int_s^t\int_{\Omega_\varepsilon\setminus\Omega_{2\varepsilon}}a(x)[(2/p)|\nabla\xi_\varepsilon|^p+((p-1)/p)(|\nabla u|^p+|\nabla v|^p)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant c\int_s^t\int_{\Omega_\varepsilon\setminus\Omega_{2\varepsilon}}(a(x)d(x)^{-p}+a(x)|\nabla u|^p+a(x)|\nabla v|^p)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$。

当 $\varepsilon\to 0$ 时，$|I_2|\to 0$，$I_3\leqslant c\iint_{Q_{st}}(u-v)^2\xi_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t$。在式（13）中令 $\varepsilon\to 0$ 得：$\int_\Omega[u(x,t)-v(x,t)]^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega[u(x,s)-v(x,s)]^2\mathrm{d}x+c\iint_{Q_{st}}(u-v)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$。

由 Gronwall 不等式，有：$\int_\Omega[u(x,t)-v(x,t)]^2\mathrm{d}x\leqslant c\int_\Omega[u(x,s)-v(x,s)]^2\mathrm{d}x$。令 $s\to 0$，有：$\int_\Omega[u(x,t)-v(x,t)]^2\mathrm{d}x\leqslant c\int_\Omega(u_0-v_0)^2\mathrm{d}x$。

[参考文献]

[1] DIBENEDETTO E. Degenerate parabolic equations [M]. New York: Springer, 1993. DOI:10.1007/978-1-4612-0895-2.

[2] KALASHNIKOV A S. Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate second order parabolic equations [J]. Russian Mathematical Surveys, 1987, 42(2): 169-222. DOI:10.1070/RM1987v042n02ABEH001309.

[3] ZHAO J N. On the Cauchy problem and initial traces for the evolution p-Laplacian equations with strongly nonlinear sources [J]. Journal of Differential Equations, 1995, 121(2): 329-383. DOI:10.1006/jdeq.1995.1132.

[4] WANG J, GAO W, SU M. Periodic solutions of non-Newtonian polytropic filtration equations with nonlinear sources [J]. Appl Math Comput, 2010, 216(7): 1996-2009. DOI:10.1016/j.amc.2010.03.030.

[5] YE H, YIN J. Propagation profile for a non-Newtonian polytropic filtration equation with orientated convection [J]. J Math Anal Appl, 2015, 421(2): 1225-1237. DOI:10.1016/j.jmaa.2014.07.077.

[6] YIN J, WANG C. Properties of the boundary flux of a singular diffusion process [J]. Chinese Annals of Mathematics (Ser B), 2004, 25(2): 175-182. DOI:10.1142/S0252959904000184.

[7] ZHAN H S. On a parabolic equation related to the p-Laplacian [J]. Bound Value Probl, 2016(1): 78. DOI:10.1186/s13661-016-0587-6.

[8] ZHAN H S, YUAN H. A diffusion convection equation with degeneracy on the boundary [J]. Journal of Jilin University Science Edition, 2015, 53(3): 353-358.

[9] KUFNER A, OPIC B. How to define reasonably weighted Sobolev spaces [J]. Comm Math Univ Carolinae, 1984, 25(3): 537-554.

[10] DRABEK P, KUFNER A, NICOLOSI F. Quasilinear elliptic equations with degenerations and singularities [M]. Berlin: Walter de Gruyter Co, 1997.

[11] WU Z Q, ZHAO J N, YIN J X, et al. Nonlinear diffusion equations [M]. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2001.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)