[文章编号] 1007-7405(2017)06-0066-04

一类 p-Laplacian 方程非平凡解的存在性

蓝永艺，沈贤端

(集美大学理学院，福建 厦门 361021)

[摘要] 研究了具有 Dirichlet 边值问题的 p-Laplacian 方程 $-\Delta_p u = f(x,u)$ 的非平凡解的存在性。在非线性项 f 赋予适当的条件下，通过变分法和一些分析技巧，给出了其非平凡解的存在性定理。

[关键词] p-Laplacian 方程；变分法；P. S. 条件；山路引理

[中图分类号] O 175.25

Existence of Nontrivial Solutions to a Class of p-Laplacian Equation

LAN Yongyi, SHEN Xianduan

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: This paper was devoted to the p-Laplacian equation $-\Delta_p u = f(x, u)$ with the Dirichlet boundary value. The existence of a nontrivial solution for the p-Laplacian equations under suitable assumptions on the nonlinear term f was proved by using the variational method and some analysis techniques.

Keywords: p-Laplacian equation; variational methods; P. S. condition; mountain-pass lemma

0 引言

本文考虑 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega。\end{cases} \tag{1}$$

其中：$\Omega \subset \mathbf{R}^N (N \geqslant 3)$ 具有光滑边界的有界开区域；$p > 1$；Sobolev 空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的范数为 $\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x)^{1/p}$。问题（1）的解等价于其对应的能量泛函

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x/p - \int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x \tag{2}$$

的临界点，其中 $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s$。

长期以来，非线性椭圆问题一直受到许多学者的广泛关注[1-2]，其主要原因在于：许多数学、物理问题，如来自于非线性源的非线性扩散理论、热力学中的气体燃烧理论以及星系的重力平衡理论，都与非线性椭圆问题有着十分密切的联系。而且，在数学内部的许多分支，如几何学中的 Yamabe 问题、调和分析中的 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式、Yang-Mills 泛函的非极小解的存在性问题等，同样与非线性椭圆问题有着深刻的联系。解决这类问题的主要方法有不动点定理、上下解方法、拓扑度

[收稿日期] 2017-03-26 [修回日期] 2017-04-29
[基金项目] 国家自然科学基金项目（11671331）；福建省自然科学基金项目（2015J01585）；集美大学科研启动基金项目（ZQ2014007）
[作者简介] 蓝永艺（1977—），男，讲师，博士，从事非线性泛函分析方向研究。

理论、椭圆正则化方法、变分法等。近年来，出现了许多用变分方法研究问题（1）的解的存在性条件，给出了许多关于非线性项 f 在零点和无穷远点的可解性条件。例如：文献［1］讨论了 p-Laplacian 方程 $\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) + h(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$ 在超二次条件和非二次条件下获得了该边值问题解的存在性结果；此外，渐近性条件[2]，共振条件[3]，一类经典的（AR）条件及其变形[4-8]，无界域上 p-Laplacian 问题[9]等都得到了研究。

不同于前面的文献条件，本文从不同的角度考虑了一类非线性项 $f(x,t)$，使得问题具有更加广泛的应用范围，其中条件（F_1）为非标准的次临界增长条件，因此处理的泛函不具有紧性条件。由于连续嵌入 $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^{p^*}(\Omega)$ 不是紧嵌入，从而无法用标准的变分方法在有界的 P. S. 序列或 C. 序列中得到强收敛子列。在这一过程中本文用 Vitali 收敛定理和一些分析技巧克服了这一困难。

1　主要结果

定理 1　设如下的条件（F_1）~（F_4）成立：（F_1）任给 $\varepsilon>0$，存在 $a(\varepsilon)>0$，使得 $|f(x,t)t| \leqslant \varepsilon|t|^{p^*} + a(\varepsilon)$ 对任意的 $t \in \mathbf{R}$，$x \in \Omega$ 成立，其中 $p^* = pN/(N-p)$ 为 Sobolev 临界指数；（F_2）$\exists \theta \in (0,1/p)$，$M$ 都是常数，使得 $F(x,t) \leqslant \theta t f(x,t)$，对 $|t| \geqslant M$ 成立；（F_3）$\limsup\limits_{t\to 0}[f(x,t)/(t|t|^{p-2})] \leqslant \lambda_1 - \varepsilon$ 对 a. e. $x \in \Omega$ 一致；（F_4）$\liminf\limits_{t\to\infty}[f(x,t)/(t|t|^{p-2})] \geqslant \lambda_1 + \varepsilon$ 对 a. e. $x \in \Omega$ 一致。其中 $\varepsilon > 0$，而 λ_1 是 $-\Delta_p$ 在 Dirichlet 边界条件下的第一特征值，则方程（1）至少有一个非平凡解。

由定理 1 容易得到推论 1。

推论 1　设条件（F_2）~（F_4）以及下面 F_1' 条件成立：（F_1'）$\lim\limits_{|t|\to\infty}[f(x,t)/(t|t|^{p^*-2})] = 0$ 对 a. e. $x \in \Omega$ 一致成立，则方程（1）至少有一个非平凡解。

2　定理 1 的证明

分三步证明。

1）紧性条件　设 $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ 是 P. S. -序列，即 $\{u_n\}$ 满足：$I(u_n)$ 有界，$I'(u_n) \to 0$ 当 $n \to \infty$。要证 $\{u_n\}$ 有强收敛的子列 $\{u_{n_j}\}$。

回顾泛函 I：$I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x/p - \int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x$，$u \in W_0^{1,p}(\Omega) := W$ 有定义且是 C^1 的，其导数 $\langle I'(u),v\rangle = \int_\Omega [|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v - f(x,u)v]\mathrm{d}x$，$u,v \in W$。

先证 $\{u_n\}$ 有界。事实上，由（F_2）及 f 的连续性，有 $M_1, M_2 > 0$，使 $C \geqslant \|u_n\|^p - \int_{|u_n(x)| \geqslant M} F(x, u_n(x))\mathrm{d}x - M_1 \geqslant \|u_n\|^p - \theta\int_\Omega u_n(x)f(x,u_n(x))\mathrm{d}x - M_2 = (1/p-\theta)\|u_n\|^p + \theta\int_\Omega(|\nabla u_n|^p - u_n f(x,u_n))\mathrm{d}x - M_2 = (1/p-\theta)\|u_n\|^p + \theta\langle I'(u_n),u_n\rangle - M_2$。因为设 $I'(u_n) \to 0$，从而 $|\langle I'(u_n),u_n\rangle| < \|u_n\|$，当 n 充分大。于是，$C \geqslant (1/p-\theta)\|u_n\|^p + \theta\|u_n\| - M_2$，故得 $\{u_n\}$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中有界。

下面证明 $\{u_n\}$ 有强收敛的子列。因为 $\{u_n\}$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中有界。由连续嵌入定理，有：$\|u_n\|_{2^*}^{2^*} \leqslant C_1 < \infty$ 对任意的 n 成立，且存在 $\{u_n\}$ 的子列，仍然记为 $\{u_n\}$，使得：$u_n \rightharpoonup u$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中，且 $u_n \to u$ 在 $L^r(\Omega)$ 中，其中 $1 \leqslant r < p^*$。

由条件（F_1），$\forall \varepsilon > 0$，存在 $a(\varepsilon) > 0$，使得：$|f(x,t)t| \leqslant \varepsilon|t|^{p^*}/(2C_1) + a(\varepsilon)$，对任意的 $t \in \mathbf{R}$，a. e. $x \in \Omega$。

令 $\delta = \varepsilon/(2a(\varepsilon)) > 0$，$E \subseteq \Omega$，mes $E < \delta$，有 $\left|\int_E f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x,u_n)u_n|\mathrm{d}x \leqslant \int_E a(\varepsilon)\mathrm{d}x +$

$\varepsilon\int_E |u_n|^{p^*}\mathrm{d}x/(2C_1) \leqslant \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$，因此 $\{\int_\Omega f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x, n\in\mathbf{N}\}$ 是等度连续的。

注 1 该等度连续的定义如下：若对任何一个正数 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $E\subseteq\Omega$, $\mathrm{mes}\ E<\delta$ 时，对任意的 n，都有 $\int_E |f(x,u_n)u_n|\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$，则称函数族 $\{g_n=\int_\Omega f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x\}$ 是等度连续的。

由 Vitali 收敛定理，有

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x \to \int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x。\tag{3}$$

由条件（F_1），对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $a(\varepsilon)>0$，使得：$|f(x,t)|\leqslant \varepsilon|t|^{p^*-1}/(2c_1c_2)+a(\varepsilon)$，对任意的 $t\in\mathbf{R}$，$x\in\Omega$。其中 $c_1\geqslant(\int_\Omega|u_n|^{p^*}\mathrm{d}x)^{(p^*-1)/p^*}$ 对任意的 n 成立；$c_2:=(\int_\Omega|u|^{p^*}\mathrm{d}x)^{1/p^*}$ 为正常数。

由 Hölder 不等式，$\forall E\subseteq\Omega$，有：$\int_E a(\varepsilon)|u|\mathrm{d}x \leqslant a(\varepsilon)(\mathrm{mes}\ E)^{(p^*-1)/p^*}(\int_E|u|^{p^*}\mathrm{d}x)^{1/p^*} \leqslant a(\varepsilon)(\mathrm{mes}\ E)^{(p^*-1)/p^*}c_1$；$\int_E|u_n|^{p^*-1}|u|\mathrm{d}x \leqslant (\int_E|u_n|^{p^*}\mathrm{d}x)^{(p^*-1)/p^*}(\int_E|u|^{p^*}\mathrm{d}x)^{1/p^*} \leqslant c_1c_2$。

令 $\delta=(\varepsilon/(2c_1a(\varepsilon)))^{p^*/(p^*-1)}>0$，$E\subseteq\Omega$，$\mathrm{mes}\ E<\delta$，有：$\left|\int_E f(x,u_n)u\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E|f(x,u_n)u|\mathrm{d}x \leqslant \int_E a(\varepsilon)|u|\mathrm{d}x+\varepsilon\int_E|u_n|^{p^*-1}|u|\mathrm{d}x/(2c_1c_2) \leqslant \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$，所以，$\{\int_\Omega f(x,u_n)u\mathrm{d}x, n\in\mathbf{N}\}$ 也是等度连续的。由 Vitali 收敛定理，有

$$\int_\Omega f(x,u_n)u\mathrm{d}x \to \int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x。\tag{4}$$

因为

$$\langle I'(u_n),u\rangle = \int_\Omega(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla u - f(x,u_n)u)\mathrm{d}x \to 0,\tag{5}$$

$$\langle I'(u_n),u_n\rangle = \int_\Omega(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla u_n - f(x,u_n)u_n)\mathrm{d}x \to 0。\tag{6}$$

由式（3）~式（6），有 $\|u_n\|\to\|u\|$。再由 Kadec-Klee 性质，可得 $u_n\to u$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$。

2）山路几何结构，即验证：存在正常数 α,ρ，使得 $I|_{\partial B_\rho}\geqslant\alpha$，其中，$B_\rho$ 是中心在 θ、半径为 ρ 的球。

事实上，条件（F_3）蕴含了：存在常数 $0<\varepsilon'<\varepsilon$，以及 $\delta>0$，使得 $f(x,t)/(t|t|^{p-2})\leqslant(\lambda_1-\varepsilon')$，当 $0<|t|<\delta$。从而，$F(x,t)\leqslant(\lambda_1-\varepsilon')t|t|^{p-1}/2$，当 $|t|<\delta$。联合条件（F_1）即得常数 C_1，使得 $F(x,t)\leqslant(\lambda_1-\varepsilon')t|t|^{p-1}/2+C_1|t|^{p^*}$。

利用连续嵌入定理以及 Poincare 不等式，得：$\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x \leqslant (1-\varepsilon'/\lambda_1)\|u\|^p/p+C_2\int_\Omega|u|^{p^*}\mathrm{d}x \leqslant (1-\varepsilon'/\lambda_1)\|u\|^p/p+C_3\|u\|^{p^*/p}$。其中 $C_2,C_3>0$ 是一个常数，从而 $I(u)\geqslant\varepsilon'/\lambda_1\cdot\|u\|^p/p-C_4\|u\|^{p^*/p}$。取 $\rho>0$ 足够小，使得 $\alpha=\varepsilon'\rho^p/(p\lambda_1)-C_4\rho^{p^*}>0$，即得 $I|_{\partial B_\rho}\geqslant\alpha$。

已知 $I(\theta)=0$，下面要找 $u_0\in W$ 使得 $u_0\notin B_\rho$，但 $I(u_0)=0$。

取 $-\Delta_p$ 对 0-Dirichlet 边值条件的第一特征函数 $\phi_1,\phi_1>0$，并设 $\int_\Omega|\phi_1|^p\mathrm{d}x=1$。考察下列的函数 $\varphi(t)=I(t\phi_1)=\lambda_1t^p/p-\int_\Omega F(x,t\phi_1)\mathrm{d}x, t>0$。

条件（F_4）蕴含了存在 $0<\varepsilon'<\varepsilon$ 及 $\beta>0$。当 $s\geqslant\beta$ 时，$f(x,s)\geqslant(\lambda_1+\varepsilon')s$。于是有与 t 无关的数 M' 与 M''，使得 $\int_\Omega F(x,t\phi_1)\mathrm{d}x \geqslant \int_{t\phi_1(x)\geqslant\beta}\int_\beta^{t\phi_1(x)} f(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x - \int_\Omega\int_0^\beta|f(x,s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}x \geqslant (\lambda_1 +$

$\varepsilon')\int_{\Omega}(t^p\phi_1^p(x)-\beta^2)\mathrm{d}x/p - M' \geqslant (\lambda_1/p+\varepsilon'/p)t^p - M''$，当 $t\to+\infty$。

这是因为 $\mathrm{mes}\{x\in\Omega\,|\,\phi_1(x)<\beta/t\}\to 0$ 当 $t\to+\infty$。于是有：$\varphi(t)\to-\infty$ 当 $t\to+\infty$。注意到 $\varphi(\rho/\lambda_1^{1/p})=I(\rho/\lambda_1^{1/p}\phi_1)\geqslant\alpha>0$，所以存在 $t_0>\rho/\lambda_1^{1/p}$ 满足：$\varphi(t_0)=0$。现在取 $u_0=t_0\varphi_1$，即得 $u_0\notin B_\rho$，但 $I(u_0)=0$。

3）泛函 I 的临界值　u_0 为第二步中所得到的，定义：$\Gamma:=\{\gamma:C[0,1]\to W_0^{1,p}(\Omega)\,|\,\gamma(0)=0,\gamma(1)=u_0\}$；$c_0:=\inf\limits_{\gamma\in\Gamma,0\leqslant t\leqslant 1}\max I(\gamma(t))$，则 c_0 为泛函 I 的临界值。由山路引理[10]，即可得方程（1）的非平凡解。

3　推论 1 的证明

由条件（F_1'）$\lim\limits_{|t|\to\infty}f(x,t)/(t|t|^{p^*-2})=0$ 对 a. e. $x\in\Omega$ 一致成立，容易得到（F_1）成立。再由定理 1 得到推论 1 成立。

［参考文献］

[1] ZHAO Y Z, WU X P, TANG C L. Existence of nontrivial solutions for a class of p-Laplacian equations [J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2010, 32(2): 118-122.

[2] LI G B, ZHOU H S. Asymptotically "linear" Dirichlet problem for the p-Laplacian [J]. Nonlinear Analysis: Theory Methods and Applications, 2001, 43(8): 1043-1055.

[3] SONG S Z, TANG C L. Resonance problems for the p-Laplacian with a nonlinear boundary condition [J]. Nonlinear Analysis: Theory Methods and Applications, 2006, 64(9): 2007-2021. DOI:10.1016/j.na.2005.07.035.

[4] CHEN Z H, SHEN Y T, YAO Y X. Some existence results of solutions for p-Laplacian [J]. Acta Mathematica Scientia, 2003, 23(4): 487-496.

[5] LI G B, YANG C Y. The existence of a nontrivial solution to a nonlinear elliptic boundary value problem of p-Laplacian type without the Ambrosetti-Rabinowitz condition [J]. Nonlinear Analysis: Theory Methods and Applications, 2010, 72(12): 4602-4613. DOI:10.1016/j.na.2010.02.037.

[6] OU Z Q, LI C, YUAN J J. Multiplicity of nontrivial solutions for quasilinear elliptic equation [J]. J Math Anal Appl, 2012, 388(1): 198-204. DOI:10.1016/j.jmaa.2011.11.005.

[7] COSTA D G, MAGALHAES C A. Existence results for perturbations of the p-Laplacian [J]. Nonlinear Analysis: Theory Methods and Applications, 1995, 24(3): 409-418. DOI:10.1016/0362-546x(94)E0046-J.

[8] LAN Y Y. Existence of solutions to p-Laplacian equation involving general subcritical growth [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2014(151): 1-9.

[9] COSTA D G, MIYAGAKI O H. Nontrivial solutions for perturbations of the p-Laplacian on unbounded domains [J]. J Math Anal Appl, 1995, 193(3): 737-755. DOI:10.1016/jmaa.1995.1264.

[10] 张恭庆. 临界点理论及其应用 [M]. 上海：上海科学技术出版社，1986.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）