[文章编号] 1007 - 7405(2017)06 - 0061 - 05

一类二阶非线性微分方程的正周期解

方聪娜

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 研究了一类二阶非线性微分方程的正周期解，利用变量变换法及一些分析技巧，得到了保证该方程至少存在一个正周期解的充分条件，所得结果改进了相关文献的主要结果。

[关键词] 变量变换；非线性微分方程；正周期解

[中图分类号] O 175. 14

Positive Periodic Solutions for a Class of Second Order Nonlinear Differential Equations

FANG Congna

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The positive periodic solutions for a class of second order nonlinear differential equations were studied. Using the method of variable transformation and some skills of analysis, the sufficient conditions were obtained to guarantee that the equations had at least one positive periodic solution which improved the main results of relevant reference.

Keywords: variable transformation; nonlinear differential equations; positive periodic solutions

0　引言

一直以来，许多学者都致力于研究二阶非线性微分方程的有界性、周期解或正解的存在性等问题，并取得了丰富的结果[1-9]。在问题的研究过程中，研究者利用了很多经典工具及理论，如 Green 函数、上下解、变分法、单调迭代、krasnoselskii 不动点定理、Schauder 不动点定理等。文献［1］利用锥的不动点指数理论研究了二阶微分方程

$$-u''(t) = f(t,u(t)) \tag{1}$$

的正 ω - 周期解的存在性问题，其中 $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ 为连续函数，且 $f(t+\omega,u) = f(t,u)$，得到了如下结果：记 $\underline{f}_0 = \liminf\limits_{u\to 0^+}\min\limits_{t\in[0,\omega]}(f(t,u)/u)$，$\bar{f}_0 = \limsup\limits_{u\to 0^+}\max\limits_{t\in[0,\omega]}(f(t,u)/u)$，$\underline{f}_\infty = \liminf\limits_{u\to +\infty}\min\limits_{t\in[0,\omega]}(f(t,u)/u)$，$\bar{f}_\infty = \limsup\limits_{u\to +\infty}\max\limits_{t\in[0,\omega]}(f(t,u)/u)$。

定理 1[1]　设 $f(t,u)\in C(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+)$ 且关于 t 为 ω - 周期函数，若下列条件之一成立：(H_1) $-\infty < \underline{f}_0$，$\bar{f}_0 < 0 < \underline{f}_\infty$；$(\mathrm{H}_2)$ $-\infty < \underline{f}_\infty$，$\bar{f}_\infty < 0 < \underline{f}_0$，则二阶常微分方程（1）至少有一个正 ω - 周期解。

值得注意的是，当条件 (H_1) 中 $\bar{f}_0 = 0$ 或 $\underline{f}_\infty = 0$，(H_2) 中 $\bar{f}_\infty = 0$ 或 $\underline{f}_0 = 0$，由定理 1 不能保证

[收稿日期] 2017 - 06 - 28　　[修回日期] 2017 - 09 - 18
[基金项目] 国家自然科学基金项目（11301216）
[作者简介] 方聪娜（1977—），女，副教授，主要从事常微分方程及泛函微分方程研究。

方程（1）是否存在正 ω - 周期解。基于这个问题，本文运用变量变换法及一些分析技巧，得到了一些关于方程（1）的正 ω - 周期解存在性的新结果，所得的结果改进了定理 1。

1 预备知识

设 X 和 Y 是 Banach 空间，线性映射 L:Dom $L \subset X \to Y$，连续映射 $N:X \to Y$。

定义 1[10] 若 $\dim \operatorname{Ker} L = \operatorname{codim} \operatorname{Im} L < +\infty$，且 $\operatorname{Im} L$ 为 Y 的闭子集，则称 L 是指标为零的 Fredholm 映射。

如果 L 是指标为零的 Fredholm 映射，且存在连续投影 $P:X \to X$ 及 $Q:Y \to Y$，使得 $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L$，$\operatorname{Im} L = \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im}(I-Q)$，$X = \operatorname{Ker} L \oplus \operatorname{Ker} P$ 和 $Y = \operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Im} Q$，则 $L|_{\operatorname{Dom} L \cap \operatorname{Ker} P}:\operatorname{Dom} L \cap \operatorname{Ker} P \to \operatorname{Im} L$ 可逆，设其逆映射为 K_P。

定义 2[10] 设 Ω 为 X 中的有界开集，若 $QN:\bar{\Omega} \to Y$ 和 $K_P(I-Q)N:\bar{\Omega} \to X$ 都是紧的，则称 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L - 紧的。

引理 1[10] 设 X 和 Y 为 Banach 空间，L:Dom $L \subset X \to Y$ 是指标为零的 Fredholm 算子，$\Omega \subset X$ 是一个有界开集，连续映射 N 在 $\bar{\Omega}$ 是 L - 紧的。如果以下条件满足：a) $Lx \neq \lambda Nx$，$\forall x \in \partial\Omega \cap \operatorname{Dom} L$，$\lambda \in (0,1)$；b) $Nx \notin \operatorname{Im} L$，$\forall x \in \partial\Omega \cap \operatorname{Ker} L$；c) $\deg(QN, \Omega \cap \operatorname{Ker} L, 0) \neq 0$，那么方程 $Lx = Nx$ 在 $\bar{\Omega} \cap \operatorname{Dom} L$ 上至少存在一个解。

2 主要结果及其证明

对于方程（1），设 $u = e^x$，则 $u' = x'e^x, u'' = e^x(x')^2 + e^x x''$，故方程（1）可化为

$$x''(t) + (x'(t))^2 + f(t, e^{x(t)})/e^{x(t)} = 0。 \tag{2}$$

要证方程（1）至少存在一个正 ω - 周期解，等价于证明方程（2）至少存在一个 ω - 周期解。

设 $X = \{x \in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}): x(t+\omega) = x(t)\}$，$Y = \{y \in C(\mathbf{R},\mathbf{R}): y(t+\omega) = y(t)\}$。定义范数 $\|x\|_1 = \max\{\|x\|_0, \|x'\|_0\}$，其中 $\|x\|_0 = \max\limits_{t\in[0,\omega]} |x(t)|$，则 $(X, \|\cdot\|_1)$ 与 $(Y, \|\cdot\|_0)$ 都为 Banach 空间。

定义线性算子 L 及连续映射 N，L:Dom $L \to Y$, $Lx = x''$，其中 $\operatorname{Dom} L = \{x \in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R}): x(t+\omega) = x(t)\} \subset X$，$N:X \to Y$, $Nx = -(x')^2 - f(t, e^x)/e^x$，那么要证明方程（2）至少存在一个 ω - 周期解，就等价于证明方程

$$Lx = Nx, x \in \operatorname{Dom} L \tag{3}$$

至少有一个解。

显然，$\operatorname{Ker} L = \mathbf{R}$，$\operatorname{Im} L = \{y \in Y: \int_0^\omega y(t)\,dt = 0\}$ 为 Y 中的闭子集，且 $\dim \operatorname{Ker} L = \dim \mathbf{R} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} L = 1 < +\infty$，所以 L 是指标为零的 Fredholm 映射。

定义投影算子 $P:X \to X$ 及 $Q:Y \to Y$ 为：

$$Px = \int_0^\omega x(t)\,dt/\omega, \forall x \in X,$$

$$Qy = \int_0^\omega y(t)\,dt/\omega, \forall y \in Y,$$

则 P 和 Q 都是连续投影，且 $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L$，$\operatorname{Im} L = \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im}(I-Q)$，$X = \operatorname{Ker} L \oplus \operatorname{Ker} P$，$Y = \operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Im} Q$，故 $L|_{\operatorname{Dom} L \cap \operatorname{Ker} P}:\operatorname{Dom} L \cap \operatorname{Ker} P \to \operatorname{Im} L$ 是可逆映射，其逆映射 $K_P:\operatorname{Im} L \to \operatorname{Dom} L \cap \operatorname{Ker} P$ 可表示为：

$$(K_P y)(t) = \int_0^t y(s)(t-s)\,ds + (t/\omega + 1/2)\int_0^\omega s y(s)\,ds - \int_0^\omega s^2 y(s)\,ds/(2\omega), \forall y \in \operatorname{Im} L \subset Y。$$

因此，$QNx = -\int_0^\omega \{(x'(t))^2 + f(t, e^{x(t)})/e^{x(t)}\}\,dt/\omega$，$\forall x \in X$，$K_P(I-Q)Nx = \int_0^t Nx(s)(t-s)\,ds +$

$(1/\omega+1/2)\int_0^\omega sNx(s)\mathrm{d}s-\int_0^\omega s^2Nx(s)\mathrm{d}s/(2\omega)-(t^2/(2\omega)+t/2+\omega/12)\int_0^\omega Nx(s)\mathrm{d}s$，$\forall x\in X$，其中 $Nx(s)=-(x'(s))^2-f(s,\mathrm{e}^{x(s)})/\mathrm{e}^{x(s)}$。

利用 Lebesgue 收敛定理，易证 $QN:X\to Y$ 和 $K_P(I-Q)N:X\to X$ 都是连续的。再由 Arzela-Ascoli 定理可知，对于有界开集 $\Omega\subset X$，$QN:\overline{\Omega}\to Y$ 及 $K_P(I-Q)N:\overline{\Omega}\to X$ 都是紧的，因而，N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 $L-$紧的。

定理 2　若存在 $\delta>0,\eta>0$，使得：当 $0<u<\delta,t\in\mathbf{R}$ 时，$f(t,u)>0$，当 $u>\eta,t\in\mathbf{R}$ 时，$f(t,u)<0$，则二阶微分方程（1）至少存在一个正 $\omega-$周期解。

证明　设 $\Omega_1=\{x:x\in\mathrm{Dom}\,L\subset X,Lx=\lambda Nx,\lambda\in(0,1)\}$。假设 $x=x(t)\in\Omega_1$，则存在一个 $\lambda\in(0,1)$，使得 $x=x(t)$ 是方程

$$x''(t)=-\lambda[(x'(t))^2+f(t,\mathrm{e}^{x(t)})/\mathrm{e}^{x(t)}] \tag{4}$$

的一个解。假设 $x(t_0)=\min\limits_{t\in[0,\omega]}x(t),x(t_1)=\max\limits_{t\in[0,\omega]}x(t)$，$t_0,t_1\in[0,\omega]$，那么，$x'(t_1)=x'(t_0)=0$，且 $x''(t_0)\geqslant0,x''(t_1)\leqslant0$。

由方程（4）可知，$f(t_0,\mathrm{e}^{x(t_0)})/\mathrm{e}^{x(t_0)}\leqslant0$，$f(t_1,\mathrm{e}^{x(t_1)})/\mathrm{e}^{x(t_1)}\geqslant0$，故由定理 2 的条件得：$\mathrm{e}^{x(t_0)}\geqslant\delta$，$\mathrm{e}^{x(t_1)}\leqslant\eta$，即：$x(t_0)\geqslant\ln\delta$，$x(t_1)\leqslant\ln\eta$，所以，$\ln\delta\leqslant x(t_0)\leqslant x(t)\leqslant x(t_1)\leqslant\ln\eta$，$\forall t\in[0,\omega]$，$|x(t)|\leqslant\max\{|\ln\delta|,|\ln\eta|\}\triangleq M_0$，$\forall t\in[0,\omega]$，

$$\|x\|_0=\max_{t\in[0,\omega]}|x(t)|\leqslant M_0。\tag{5}$$

因为 $f(t,\mathrm{e}^x)/\mathrm{e}^x$ 在 $[0,\omega]\times[\ln\delta,\ln\eta]$ 上连续，于是存在常数 $M_1>0$，使得 $|f(t,\mathrm{e}^x)/\mathrm{e}^x|\leqslant M_1$，$\forall(t,x)\in[0,\omega]\times[\ln\delta,\ln\eta]$。

又由方程（4）得，$\int_0^\omega x''(t)\mathrm{d}t=\int_0^\omega-\lambda[(x'(t))^2+f(t,\mathrm{e}^{x(t)})/\mathrm{e}^{x(t)}]\mathrm{d}t$，故 $\int_0^\omega(x'(t))^2\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\omega|f(t,\mathrm{e}^{x(t)})/\mathrm{e}^{x(t)}|\mathrm{d}t\leqslant M_1\omega$，$|x'(t)-x'(t_0)|=\left|\int_{t_0}^t x''(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_0^\omega|x''(s)|\mathrm{d}s\leqslant\int_0^\omega|(x'(t))^2+f(t,\mathrm{e}^{x(t)})/\mathrm{e}^{x(t)}|\mathrm{d}t\leqslant2M_1\omega$，$\forall t\in[0,\omega]$，从而，

$$\|x'\|_0=\max_{t\in[0,\omega]}|x'(t)|\leqslant2M_1\omega\triangleq M_2。\tag{6}$$

再由式（5）~式（6）可得：

$$\|x\|_1=\max\{\|x\|_0,\|x'\|_0\}\leqslant\max\{M_0,M_2\}\triangleq M_3,\tag{7}$$

即得 Ω_1 有界。

设 $\Omega_2=\{x\,|\,x\in\mathrm{Ker}\,L,Nx\in\mathrm{Im}\,L\}$。对 $\forall x\in\Omega_2$，因为 $x\in\mathrm{Ker}\,L$ 且 $Nx\in\mathrm{Im}\,L$，所以 $x=c\in\mathbf{R}$，$QNx=0$，从而，$-\int_0^\omega(f(t,\mathrm{e}^c)/\mathrm{e}^c)\mathrm{d}t/\omega=0$。由积分中值定理可知，存在 $t^*\in[0,\omega]$，使得 $f(t^*,\mathrm{e}^c)=0$，故由定理条件得 $\delta\leqslant\mathrm{e}^c\leqslant\eta$，即 $\ln\delta\leqslant c\leqslant\ln\eta$，从而

$$|c|\leqslant M_0\leqslant M_3,\tag{8}$$

即 Ω_2 有界。

设 $\Omega=\{x\,|\,x\in X,\|x\|_1<1+M_3\}$，由式（7）~式（8）可知，$\Omega_1\cup\Omega_2\subset\Omega$，所以由前面的叙述可知引理 1 中的条件 a）和 b）均成立。

令 $H(x,\mu)=\mu x+(1-\mu)QNx$，$\forall x\in\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L$，$\mu\in[0,1]$。对任意 $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L$，$\mu\in[0,1]$，有 $x=c\in\mathbf{R}$ 及 $|c|>M_0$ 成立。于是，$xH(x,\mu)=\mu x^2-(1-\mu)\int_0^\omega(xf(t,\mathrm{e}^x)/\mathrm{e}^x)\mathrm{d}t/\omega$。若 $x>M_0$，则 $x>M_0\geqslant|\ln\eta|\geqslant\ln\eta$，即 $\mathrm{e}^x>\eta$，所以 $f(t,\mathrm{e}^x)<0$，从而 $xH(x,\mu)>0$。若 $x<-M_0$，则 $x<-M_0\leqslant-|\ln\delta|\leqslant\ln\delta$，即 $\mathrm{e}^x<\delta$，所以 $f(t,\mathrm{e}^x)>0$，从而 $xH(x,\mu)>0$。因为 $H(x,\mu)\neq0$，

$x \in \partial\Omega \cap \operatorname{Ker} L$，所以可由同伦不变性得：$\deg(QN,\Omega \cap \operatorname{Ker} L,0) = \deg(H(x,0),\Omega \cap \operatorname{Ker} L,0) = \deg(H(x,1),\Omega \cap \operatorname{Ker} L,0) = 1 \neq 0$，于是引理 1 的条件 c）成立，这就证明了方程（3）在 $\overline{\Omega}$ 上至少存在一个解，从而可知方程（1）至少存在一个正 ω – 周期解。

定理 3　若存在 $\delta > 0, \eta > 0, \alpha > 0$，使得当 $0 < u < \delta, t \in \mathbf{R}$ 时，$f(t,u) < 0$ 且 $|f(t,u)| \leqslant \alpha u$，当 $u > \eta, t \in \mathbf{R}$ 时，$f(t,u) > 0$，则二阶微分方程（1）至少存在一个正 ω – 周期解。

证明　设 $\Omega_1 = \{x: x \in \operatorname{Dom} L \subset X, Lx = \lambda Nx, \lambda \in (0,1)\}$。假设 $x = x(t) \in \Omega_1$，则存在一个 $\lambda \in (0,1)$，使得 $x = x(t)$ 是方程

$$x''(t) = -\lambda[(x'(t))^2 + f(t,\mathrm{e}^{x(t)})/\mathrm{e}^{x(t)}] \tag{9}$$

的一个解。假设 $x(t_0) = \min\limits_{t \in [0,\omega]} x(t), x(t_1) = \max\limits_{t \in [0,\omega]} x(t)$，$t_0, t_1 \in [0,\omega]$，那么，$x'(t_1) = x'(t_0) = 0$，且 $x''(t_0) \geqslant 0, x''(t_1) \leqslant 0$。

由方程（9）可知，$f(t_0,\mathrm{e}^{x(t_0)})/\mathrm{e}^{x(t_0)} \leqslant 0, f(t_1,\mathrm{e}^{x(t_1)})/\mathrm{e}^{x(t_1)} \geqslant 0$，故由定理 3 条件可得：$\mathrm{e}^{x(t_0)} \leqslant \eta$，$\mathrm{e}^{x(t_1)} \geqslant \delta$，即 $x(t_0) \leqslant \ln\eta$，$x(t_1) \geqslant \ln\delta$，从而可由介值定理推得：存在 $t_2 \in [0,\omega]$，使 $|x(t_2)| \leqslant \max\{|\ln\delta|, |\ln\eta|\} \triangleq D_1$。

假设 $x'(\tau_1) = \min\limits_{t \in [0,\omega]} x'(t)$，$x'(\tau_2) = \max\limits_{t \in [0,\omega]} x'(t)$，$\tau_1, \tau_2 \in [0,\omega]$，那么，$x''(\tau_1) = x''(\tau_2) = 0$。由方程（9）可知，

$$(x'(\tau_i))^2 = -f(\tau_i,\mathrm{e}^{x(\tau_i)})/\mathrm{e}^{x(\tau_i)} \geqslant 0, \tag{10}$$

即 $f(\tau_i,\mathrm{e}^{x(\tau_i)}) \leqslant 0, i = 1,2$，因此 $\mathrm{e}^{x(\tau_i)} \leqslant \eta$，即 $x(\tau_i) \leqslant \ln\eta, i = 1,2$。

因为 $f(t,\mathrm{e}^x)/\mathrm{e}^x$ 在 $[0,\omega] \times [\ln\delta, \ln\eta]$ 上连续，于是存在常数 $M > 0$，使得 $|f(t,\mathrm{e}^x)/\mathrm{e}^x| \leqslant M$，$\forall (t,x) \in [0,\omega] \times [\ln\delta, \ln\eta]$。又因为当 $x < \ln\delta(\mathrm{e}^x < \delta), t \in \mathbf{R}$ 时，$|f(t,\mathrm{e}^x)/\mathrm{e}^x| \leqslant \alpha$。所以，当 $(t,x) \in [0,\omega] \times (-\infty, \ln\eta]$ 时，$f(t,\mathrm{e}^x)/\mathrm{e}^x$ 有界，即：存在 $D_2 > 0$，使得 $|f(\tau_i,\mathrm{e}^{x(\tau_i)})/\mathrm{e}^{x(\tau_i)}| \leqslant D_2$，$i = 1,2$。由式（10）可知，$|x'(\tau_i)| \leqslant \sqrt{D_2}, i = 1,2$。因此，$\|x'\|_0 = \max\limits_{t \in [0,\omega]} |x'(t)| \leqslant \sqrt{D_2}$。

由拉格朗日中值定理可知，存在 $\xi \in (0,\omega)$，使得 $x(t) - x(t_2) = x'(\xi)(t - t_2), \forall t \in [0,\omega]$，故 $|x(t)| \leqslant |x(t_2)| + |x'(\xi)||t - t_2| \leqslant D_1 + \omega\sqrt{D_2}, \forall t \in [0,\omega]$。从而，$\|x\|_0 = \max\limits_{t \in [0,\omega]} |x(t)| \leqslant D_1 + \omega\sqrt{D_2}$，$\|x\|_1 = \max\{\|x\|_0, \|x'\|_0\} \leqslant \max\{\sqrt{D_2}, D_1 + \omega\sqrt{D_2}\} \triangleq D_3$。这就证明了 Ω_1 有界。

设 $\Omega_2 = \{x | x \in \operatorname{Ker} L, Nx \in \operatorname{Im} L\}$，类似于定理 1 的证明，可得 $\forall x \in \Omega_2$，有 $|x| \leqslant D_1$，即 Ω_2 有界。

设 $\Omega = \{x | x \in X, \|x\|_1 < 1 + D_3\}$，则引理 1 中的条件 a）和 b）均成立。令 $H(x,\mu) = -\mu x + (1-\mu)QNx, \forall x \in \Omega \cap \operatorname{Ker} L, \mu \in [0,1]$。类似于定理 2 的证明，可得引理 1 的条件 c）也成立，因此方程（1）至少存在一个正 ω – 周期解。

3　例子

例 1　考虑方程

$$-u''(t) = a(t)\sqrt{u} - b(t)u^{2/3} + h(t), \tag{11}$$

其中，$a(t) > 0, b(t) > 0, h(t) > 0$ 且为 $\mathbf{R}$ 上连续的 ω – 周期函数，容易验证定理 2 中的条件成立，于是由定理 2 知，方程（11）至少存在一个正的 ω – 周期解。

例 2　考虑方程

$$-u''(t) = f(t,u), \tag{12}$$

其中，$f(t,u) = \begin{cases} -a(t)u\ln(1+u), 0 < u \leqslant 1, t \in \mathbf{R}, \\ -a(t)\ln 2 + \sqrt{u}\ln u, u > 1, t \in \mathbf{R}, \end{cases}$ $a(t) > 0$ 且为 $\mathbf{R}$ 上连续的 ω – 周期函数。容易

验证定理 3 中的条件成立，于是由定理 3 知，方程（12）至少存在一个正的 ω – 周期解。

注 1　例 1 中，$\bar{f}_\infty = 0$，例 2 中，$\underline{f_0} = \bar{f}_\infty = 0$。显然，文献［1］的结果是无法判断方程（11）及方程（12）的正 ω – 周期解的存在性.

［参考文献］

［1］LI Y X. Positive periodic solutions of first and second order ordinary differential equations［J］. Chin Ann Math, 2004, 25(3): 413-420. DOI:10.1142/S025295990400038X.

［2］JUAN J N. Nonlinear second-order periodic boundary value problems［J］. J Math Anal Appl, 1988, 130(1): 22-29. DOI:10.1016/0022-247X(88)90383-6.

［3］GUIDORIZZI H L. Oscillating and periodic solutions of equations of the type $x'' + f_1(x)x' + f_2(x)(x')^2 + g(x) = 0$［J］. J Math Anal Appl, 1993, 176: 11-23. DOI:10.1006/jmaa.1993.1197.

［4］LIU Z L, LI F Y. Multiple positive solutions of nonlinear two-point boundary value problems［J］. J Math Anal Appl, 1996, 203: 610-625. DOI:10.1006/jmaa.1996.0400.

［5］RACHUNKOVA I, TVRDY M. Construction of lower and upper functions and their application to regular and singular periodic boundary value problems［J］. Nonlinear Analysis, 2001, 47: 3937-3948. DOI: 10.1016/S0362-546X(01)00513-2.

［6］PENG S G. Positive periodic solutions of nonlinear second order ordinary differential equations［J］. Mathematica Applicata, 2004, 17(2): 234-238.

［7］POURNAKI M R, RAZANI A. On the existence of periodic solutions for a class of generalized forced Liénard equations［J］. Applied Mathematics Letters, 2007, 20: 248-254. DOI:10.1016/j.aml.2007.09.012.

［8］LIU X L, SHI X Y. Existence of solutions for second-order periodic-integrable boundary value problems［J］. Applied Mathematics Letters, 2014, 37: 91-94. DOI:10.1016/j.aml.2014.06.004.

［9］MA R Y, CHEN R P, HE Z Q. Positive periodic solutions of second-order differential equations with weak singularities［J］. Applied Mathematics and Computation, 2014, 232: 97-103. DOI:10.1016/j.amc.2013.12.142.

［10］ROBERT E G, JEAN L M. Coincidence degree and nonlinear differential equations［M］. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）