[文章编号] 1007 - 7405(2018)01 - 0070 - 05

具有广义 Marshall-Olkin 分布部件并联系统随机比较性质

陈　豪，蔡南莲
（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 研究了具有二维 Marshall-Olkin 指数分布的两部件组成的并联系统似然比序性质，部分推广了相关文献的结论。同时考虑了具有广义二维 Marshall-Olkin 分布的两部件组成的并联系统，得到了并联系统的随机比较性质。

[关键词] Marshall-Olkin；相依；并联；似然比序；增凹序；随机序
[中图分类号] O 211. 5

Some Stochastic Comparison Properties on Parallel System with Components Obeying Generalized Bivariate Marshall-Olkin Distributions

CHEN Hao, CAI Nanlian
(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The parallel systems with two components obeying Marshall-Olkin distributions were considered, and some properties of likelihood ratio orders on it were obtained which generalized some conclusions. Meanwhile, several stochastic comparison properties were given for the parallel systems with two components obeying generalized Marshall-Olkin distributions.

Keywords: Marshall-Olkin; dependence; parallel systems; likelihood ratio orders; increase concave orders; usual stochastic orders

0　引言

二维 Marshall-Olkin 指数分布的定义可参见文献［1］。设 U_1,U_2,U_3 相互独立，分别服从参数为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12}$ 的指数分布，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12}>0$。令 $X_1=\min(U_1,U_3)$，$X_2=\min(U_2,U_3)$，则 (X_1,X_2) 的联合生存函数 $\bar{F}(x_1,x_2)=P(X_1>x_1,X_2>x_2)=\mathrm{e}^{-\lambda_1x_1-\lambda_2x_2-\lambda_{12}\max(x_1,x_2)}$，$x_1,x_2>0$。

定义 1　设 (X_1,X_2) 的联合生存函数为

$$\bar{F}(x_1,x_2)=P(X_1>x_1,X_2>x_2)=\mathrm{e}^{-\lambda_1x_1-\lambda_2x_2-\lambda_{12}\max(x_1,x_2)},x_1,x_2>0,\tag{1}$$

其中常数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12}>0$，称 (X_1,X_2) 服从参数为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12}$ 的二维 Marshall-Olkin 指数分布，记为 $(X_1,X_2)\sim \mathrm{BVE}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12})$。

二维 Marshall-Olkin 指数分布由 Marshall-Olkin[1] 首次提出，该分布的概率解释可参见文献［2］。

[收稿日期] 2017 - 04 - 25　　[修回日期] 2017 - 06 - 27
[基金项目] 国家自然科学基金项目（11771181）
[作者简介] 陈豪（1993—），男，硕士生，从事概率论与数理统计方向研究。通信作者：蔡南莲（1965—），女，教授，从事概率论与数理统计方向研究，E-mail：cainanlian@163. com。

容易得出，二维 Marshall-Olkin 指数分布是不相互独立。

下面给出广义二维 Marshall-Olkin 分布的定义。

设非负随机变量 S_1,S_2,S_3 相互独立，S_i 的分布函数为 $G_i,i=1,2,3$。令 $X_1=\min(S_1,S_3)$，$X_2=\min(S_2,S_3)$，则 (X_1,X_2) 的联合生存函数为：$\bar F(x_1,x_2)=P(X_1>x_1,X_2>x_2)=P(S_1>x_1,S_2>x_2,S_3>\max(x_1,x_2))=\bar G_1(x_1)\bar G_2(x_2)\bar G_3(\max(x_1,x_2))$，$x_1,x_2>0$。

定义 2　设非负随机变量 S_i 的分布函数为 $G_i,i=1,2,3$。如果 (X_1,X_2) 的联合生存函数为

$$\bar F(x_1,x_2)=P(X_1>x_1,X_2>x_2)=\bar G_1(x_1)\bar G_2(x_2)\bar G_3(\max(x_1,x_2)),\ x_1,x_2>0,\tag{2}$$

称 (X_1,X_2) 为广义二维 Marshall-Olkin 分布，记为 $(X_1,X_2)\sim \mathrm{GMO}(S_1,S_2,S_3)$。

广义二维 Marshall-Olkin 分布见文献［3］。

设 $(X_1,X_2)\sim \mathrm{GMO}(S_1,S_2,S_3)$，则边际生存函数分别为：$\bar F_1(x)=P(X_1>x)=\bar G_1(x)\bar G_3(x)$，$x>0$；$\bar F_2(x)=\bar G_2(x)\bar G_3(x)$，$x>0$。

随机序的定义可参见文献［4－6］，它们在可靠性理论、保险精算领域应用广泛。

定义 3　设 X,Y 为两个随机变量，密度函数分别为 $f(x)$，$g(x)$，分布函数分别为 $F(x)$，$G(x)$。1）称 X 依随机序小于 Y，如果 $\forall x\in\mathbf{R}$，$\bar F(x)\leqslant\bar G(x)$，记为 $X\leqslant_{st}Y$；2）称 X 依增凹序小于 Y，如果对使得积分存在的增凹函数 f，都有 $Ef(X)\leqslant Ef(Y)$，记为 $X\leqslant_{icv}Y$；3）称 X 依故障率小于 Y，如果对于 $\forall x$，$f(x)/\bar F(x)\geqslant g(x)/\bar G(x)$，记为 $X\leqslant_{hr}Y$；4）称 X 依似然比序小于 Y，如果 $g(x)/f(x)$ 关于 x 单调不降，记为 $X\leqslant_{lr}Y$。

显然上面随机序有如下关系：$X\leqslant_{lr}Y\Rightarrow X\leqslant_{hr}Y\Rightarrow X\leqslant_{st}Y$，$X\leqslant_{st}Y\Rightarrow X\leqslant_{icv}Y$（见文献［5］）。

从定义 3 可以得出随机序概念的意义。设 X,Y 分别表示两个元件的寿命，$X\leqslant_{st}Y$ 表示元件 X 的可靠度小于元件 Y 的可靠度；$X\leqslant_{hr}Y$ 表示元件 X 的故障率大于元件 Y 的故障率。

次序统计量的研究是学界的研究热点，已引起国内外学者的广泛关注，最大次序统计量对应着并联系统寿命。近年来，很多学者在独立假设下研究次序统计量，如：文献［7］探讨了相互独立不同分布的样本次序统计量在故障率序下的随机比较性质，并得到了两个独立具有指数分布的部件并联系统的故障率的上界；文献［8］研究了多个相互独立具有不同指数分布的部件并联系统故障率的性质，并得到了多个不同的指数分布部件并联系统故障率的上界，该上界优于文献［7］得到的。更多的结果，可参见文献［9］。

文献［10］在相依假设下研究了两个部件的并联、串联系统的随机比较性质。在两部件服从 Marshall-Olkin 指数分布条件下，研究了两个部件的并联、串联系统在故障率序意义下的随机比较性质。

设 $(X_1,X_2)\sim \mathrm{BVE}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12})$，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12}>0$。由元件 X_1,X_2 组成并联系统寿命 $X_{(2)}=\max(X_1,X_2)$，则 $X_{(2)}$ 的生存函数

$$\bar F_{(2)}(t)=\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t}+\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t}-\mathrm{e}^{-\lambda t},t>0。\tag{3}$$

$X_{(2)}$ 密度函数

$$f_{(2)}(t)=(\lambda_1+\lambda_{12})\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t}+(\lambda_2+\lambda_{12})\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t},\ t>0,\tag{4}$$

其中 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}$。

引理 1[10]　设 $(X_1,X_2)\sim \mathrm{BVE}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12})$，$(Y_1,Y_2)\sim \mathrm{BVE}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_{12})$，$\lambda_1\leqslant\gamma_1\leqslant\gamma_2\leqslant\lambda_2$，$\lambda_1+\lambda_2\leqslant\gamma_1+\gamma_2$，$\lambda_{12}\leqslant\gamma_{12}$。$X_{(2)}=\max(X_1,X_2)$，$Y_{(2)}=\max(Y_1,Y_2)$，则 $Y_{(2)}\leqslant_{hr}X_{(2)}$。

本文对引理 1 做了部分推广，证明了在一定条件下，引理 1 在似然比序意义下仍然成立。并考虑了部件服从广义二维 Marshall-Olkin 分布时，并联系统的随机序、增凹序的随机比较性质。

文中，均假设随机变量非负，分布函数是绝对连续的，具有概率密度函数，文中提到“单调增加”均指“单调不降”，“单调下降”均指“单调不增”。

1 二维 Marshall-Olkin 指数分布并联系统似然比序性质

本节将研究具有二维 Marshall-Olkin 指数分布的相依部件组成的并联系统的似然比序性质，有下面的定理 1。

定理 1 设 $(X_1,X_2)\sim BVE(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12})$，$(Y_1,Y_2)\sim BVE(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_{12})$，$X_{(2)}=\max(X_1,X_2)$，$Y_{(2)}=\max(Y_1,Y_2)$。设 $\lambda_1=\gamma_1=\lambda_2=\gamma_2$，$\lambda_{12}<\gamma_{12}$，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12},\gamma_1,\gamma_2,\gamma_{12}>0$，则 $Y_{(2)}\leqslant_{lr}X_{(2)}$。

证明 设 $\lambda_1=\gamma_1=\lambda_2=\gamma_2=a$，$\lambda_{12}=\lambda<\gamma_{12}=\mu$，设 $X_{(2)}$，$Y_{(2)}$ 的生存函数分别为：$\bar{F}(2)(t;a,\lambda)$，$\bar{G}(2)(t;a,\mu)$；密度函数分别为：$f_{(2)}(t;a,\lambda)$，$g_{(2)}(t;a,\mu)$。由式（3）得：$\bar{F}(2)(t;a,\lambda)=2\mathrm{e}^{-(a+\lambda)t}-\mathrm{e}^{-(2a+\lambda)t}$，$t>0$；$\bar{G}(2)(t;a,\mu)=2\mathrm{e}^{-(a+\mu)t}-\mathrm{e}^{-(2a+\mu)t}$，$t>0$；$f_{(2)}(t;a,\lambda)=2(a+\lambda)\mathrm{e}^{-(a+\lambda)t}-(2a+\lambda)\mathrm{e}^{-(2a+\lambda)t}$，$t>0$；$g_{(2)}(t;a,\mu)=2(a+\mu)\mathrm{e}^{-(a+\mu)t}-(2a+\mu)\mathrm{e}^{-(2a+\mu)t}$，$t>0$。

由定义 3，只要证明

$$H(t)=[2(a+\lambda)\mathrm{e}^{-(a+\lambda)t}-(2a+\lambda)\mathrm{e}^{-(2a+\lambda)t}]/[2(a+\mu)\mathrm{e}^{-(a+\mu)t}-(2a+\mu)\mathrm{e}^{-(2a+\mu)t}] \tag{5}$$

关于 t 单调增即可。

计算得：$t>0$，$[g_{(2)}(t;a,\mu)]^2H'(t)=(\mu-\lambda)\mathrm{e}^{-(\mu-\lambda)t}[(2a+2\lambda)(2a+2\mu)-(6a^2+6a\lambda+6a\mu+4\lambda\mu)\mathrm{e}^{-at}+(2a+\lambda)(2a+\mu)\mathrm{e}^{-2at}]$。

令 $y=\mathrm{e}^{-at}$，$A=(2a+\lambda)(2a+\mu)$，$B=-(6a^2+6a\lambda+6a\mu+4\lambda\mu)$，$C=(2a+2\lambda)(2a+2\mu)$。由于 $\lambda<\mu$，只需证：

$$\forall y\in(0,1],J(y)=Ay^2+By+C\geqslant 0 \tag{6}$$

即可。

令 $y_0=-(B/2A)=[3a^2+3a\lambda+3a\mu+2\lambda\mu]/[(2a+\lambda)(2a+\mu)]$。

ⅰ）当 $y_0\geqslant 1$，因为 $J(0)=C>0$，计算得 $J(1)=A+B+C=\lambda\mu>0$，所以，$\forall y\in(0,1]$，$J(y)\geqslant 0$。

ⅱ）当 $0<y_0<1$，即 $3a^2+3a\lambda+3a\mu+2\lambda\mu<(2a+\lambda)(2a+\mu)$，这时 $J(y)$ 在 y_0 处达到最小值。

$J(y_0)=C-[B^2/(4A)]=4(a+\lambda)(a+\mu)-[(6a^2+6a\lambda+6a\mu+4\lambda\mu)^2]/[4(2a+\lambda)(2a+\mu)]\geqslant 4(a+\lambda)(a+\mu)-(2a+\lambda)(2a+\mu)=2a\lambda+2a\mu+3\lambda\mu>0$，所以，$\forall y\in(0,1]$，均有 $J(y)>0$。故式（6）成立，从而式（5）关于 t 单调增，定理 1 得证。

注 1 定理 1 中，$\lambda_1,\lambda_2,\gamma_1,\gamma_2,\lambda_{12},\gamma_{12}$ 满足的条件是引理 1 条件的加强特殊情形，这时定理 1 的结论比引理 1 强。

命题 1 设 $(X_1,X_2)\sim \mathrm{BVE}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12})$，$(Y_1,Y_2)\sim \mathrm{BVE}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_{12})$，$X_{(2)}=\max(X_1,X_2)$，$Y_{(2)}=\max(Y_1,Y_2)$。有：1）当 $\lambda_1<\gamma_1=\gamma_2=\lambda_2$，$\lambda_{12}=\gamma_{12}$，不能得出 $Y_{(2)}\leqslant_{lr}X_{(2)}$；2）当 $\lambda_1<\gamma_1$，$\lambda_1+\lambda_2=\gamma_1+\gamma_2$，$\lambda_{12}=\gamma_{12}$，不能得出 $Y_{(2)}\leqslant_{lr}X_{(2)}$。

证明 由式(4)，$Y_{(2)}\leqslant_{lr}X_{(2)}\Leftrightarrow[(\lambda_1+\lambda_{12})\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t}+(\lambda_2+\lambda_{12})\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t}-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12})\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12})t}]/[(\gamma_1+\gamma_{12})\mathrm{e}^{-(\gamma_1+\gamma_{12})t}+(\gamma_2+\gamma_{12})\mathrm{e}^{-(\gamma_2+\gamma_{12})t}-(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_{12})\mathrm{e}^{-(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_{12})t}]$ 关于 $t>0$ 单调不降。

$$\Leftrightarrow I(y)=[(\lambda_1+\lambda_{12})y^{\lambda_1+\lambda_{12}}+(\lambda_2+\lambda_{12})y^{\lambda_2+\lambda_{12}}-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12})y^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}}]/[(\gamma_1+\gamma_{12})y^{\gamma_1+\gamma_{12}}+(\gamma_2+\gamma_{12})y^{\gamma_2+\gamma_{12}}-(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_{12})y^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_{12}}] \tag{7}$$

关于 $y\in(0,1]$ 单调不增，其中 $y=\mathrm{e}^{-t}$。

1）当 $\lambda_1=0.4,\gamma_1=\gamma_2=\lambda_2=0.7$，$\lambda_{12}=\gamma_{12}=0.6$，从图 1 可以看出，$I(y)$ 关于 $y\in(0,1]$ 先单调降后单调增，利用式（7），不成立 $Y_{(2)}\leqslant_{lr}X_{(2)}$。

2）当 $\lambda_1=0.4$，$\gamma_1=0.5$，$\lambda_2=0.6$，$\gamma_2=0.5$，$\lambda_{12}=\gamma_{12}=0.7$，从图 2 可以看出，$I(y)$ 关于

$y \in (0,1]$ 先单调降后单调增，利用式（7），不成立 $Y_{(2)} \leqslant_{lr} X_{(2)}$。

注 2　命题 1 中，$\lambda_1,\lambda_2,\gamma_1,\gamma_2,\lambda_{12},\gamma_{12}$ 均满足引理 1 的条件，但是引理 1 的结论不能加强为 $Y_{(2)} \leqslant_{lr} X_{(2)}$。

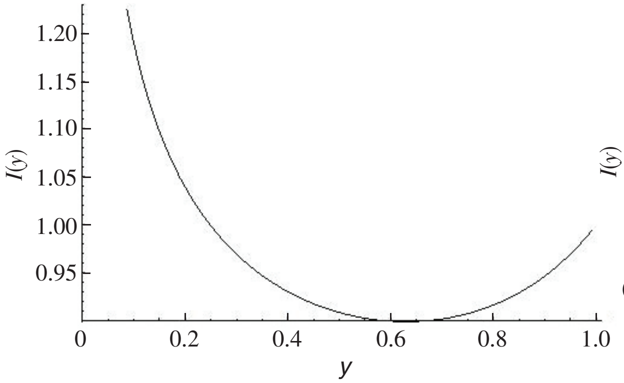

图 1　$I(y)$ 的函数图像（λ_1=0.4，γ_1=γ_2=λ_2=0.7，λ_{12}=γ_{12}=0.6）

Fig.1　Image of $I(y)$ function（λ_1=0.4，γ_1=γ_2=λ_2=0.7，λ_{12}=γ_{12}=0.6）

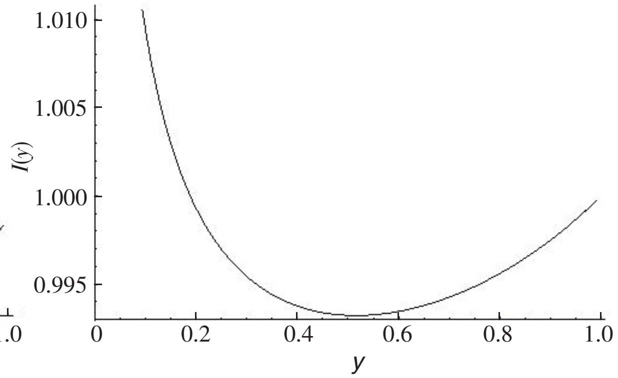

图 2　$I(y)$ 的函数图像（λ_1=0.4，γ_1=0.5，λ_2=0.6，γ_2=0.5，λ_{12}=γ_{12}=0.7）

Fig.2　Image of $I(y)$ function（λ_1=0.4，γ_1=0.5，λ_2=0.6，γ_2=0.5，λ_{12}=γ_{12}=0.7）

2　广义的二维 Marshall-Olkin 分布并联系统随机比较

在随机序、增凹序意义下，本节讨论了具有广义二维 Marshall-Olkin 分布的并联系统的随机比较性质。

下面介绍引理 2、引理 3，可参见文献［6］。

引理 2　设 $X_1,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,\cdots,Y_n$ 分别是相互独立的随机变量，且 $X_i \leqslant_{st} Y_i$，$i=1,\cdots,n$，则对任意 n 元单调不减函数（即对每一变元都是单调不减的）ψ，有 $\psi(X_1,\cdots,X_n) \leqslant_{st} \psi(Y_1,\cdots,Y_n)$。

引理 3　设 $X_1,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,\cdots,Y_n$ 分别是相互独立的随机变量，且 $X_i \leqslant_{cv} Y_i$，$i=1,\cdots,n$，则对任意 n 元单调不减凹函数 f（即对每一变元都是单调不减和凹的），有 $f(X_1,\cdots,X_n) \leqslant_{cv} f(Y_1,\cdots,Y_n)$。

为了研究并联系统的随机序性质，先证明引理 4。

引理 4　设 S_1,S_2,S_3 相互独立，S_i 的分布函数为 G_i，$i=1,2,3$。$(X_1,X_2) \sim GMO(S_1,S_2,S_3)$，令 $X_{(2)}=\max(X_1,X_2)$，则：1）$X_{(2)}$ 的生存函数 $\bar{F}_{(2)}(x)=P(\max(S_1,S_2)>x)P(S_3>x)$，$x>0$；2）$X_{(2)}=\min\{\max(S_1,S_2),S_3\}$。

证明　1）由式（2），$X_{(2)}$ 的生存函数为：$\bar{F}_{(2)}(x)=P(\max(X_1,X_2)>x)=P[(X_1>x)\cup(X_2>x)]=\bar{G}_1(x)\bar{G}_3(x)+\bar{G}_2(x)\bar{G}_3(x)-\bar{G}_1(x)\bar{G}_2(x)\bar{G}_3(x)=[\bar{G}_1(x)+\bar{G}_2(x)-\bar{G}_1(x)\bar{G}_2(x)]\bar{G}_3(x)=P(\max(S_1,S_2)>x)P(S_3>x)$。

2）证明略。

引理 5　1）设 $f(x_1,x_2)=\max(x_1,x_2)$，则 $f(x_1,x_2)$ 是关于每个变量 $x_i(i=1,2)$ 单调不降凸函数；2）设 $g(x_1,x_2)=\min\{x_1,x_2\}$，则 $g(x_1,x_2)$ 关于是每个变量 $x_i(i=1,2)$ 单调不降凹函数。

证明　1）固定 x_2，$f(x_1,x_2)=\begin{cases}x_2, & x_1<x_2\\ x_1, & x_1\geqslant x_2\end{cases}$ 是关于 x_1 单调不降凸函数，同理可证，固定 x_1，$f(x_1,x_2)$ 是关于 x_2 单调不降凸函数。

2）固定 x_2，$g(x_1,x_2)=\min\{x_1,x_2\}=\begin{cases}x_1, & x_1<x_2\\ x_2, & x_1\geqslant x_2\end{cases}$ 是关于 x_1 单调不降凹函数，同理可证，固定 x_1，$g(x_1,x_2)$ 关于 x_2 单调不降凹函数。

关于部件具有广义 Marshall-Olkin 分布的并联系统，有如下的随机序性质，即定理 2。

定理 2 设 S_1, S_2, S_3 相互独立，T_1, T_2, T_3 相互独立。$(X_1, X_2) \sim \mathrm{GMO}(S_1, S_2, S_3)$，$(Y_1, Y_2) \sim GMO(T_1, T_2, T_3)$，$S_i \leqslant_{st} T_i$，$i = 1, 2, 3$。令 $X_{(2)} = \max(X_1, X_2)$，$Y_{(2)} = \max(Y_1, Y_2)$，则 $X_{(2)} \leqslant_{st} Y_{(2)}$。

证明 令 $f(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$，因为 $S_i \leqslant_{st} T_i$，$i = 1, 2$。由引理 2 得：

$$\max(S_1, S_2) = f(S_1, S_2) \leqslant_{st} f(T_1, T_2) = \max(T_1, T_2)。 \tag{8}$$

因 $S_3 \leqslant_{st} T_3$，且 $\max(S_1, S_2)$ 与 S_3 相互独立，$\max(T_1, T_2)$ 与 T_3 相互独立。令 $g(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$，由引理 3、引理 4 及式（8）得：$X_{(2)} = \min(\max(S_1, S_2), S_3) = g(\max(S_1, S_2), S_3) \leqslant_{st} g(\max(T_1, T_2), T_3) = \min(\max(T_1, T_2), T_3) = Y_{(2)}$。定理 2 得证。

定理 3 设 S_1, S_2, S_3 相互独立，T_1, T_2, T_3 相互独立。$(X_1, X_2) \sim \mathrm{GMO}(S_1, S_2, S_3)$，$(Y_1, Y_2) \sim GMO(T_1, T_2, T_3)$，$S_i \leqslant_{st} T_i$，$i = 1, 2$，$S_3 \leqslant_{icv} T_3$。令 $X_{(2)} = \max(X_1, X_2)$，$Y_{(2)} = \max(Y_1, Y_2)$，则 $X_{(2)} \leqslant_{icv} Y_{(2)}$。

证明 令 $f(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$，因为 $S_i \leqslant_{st} T_i$，$i = 1, 2$。由引理 2 得：$\max(S_1, S_2) = f(S_1, S_2) \leqslant_{st} f(T_1, T_2) = \max(T_1, T_2)$。从而有 $\max(S_1, S_2) \leqslant_{icv} \max(T_1, T_2)$。

又因为 $S_3 \leqslant_{icv} T_3$，且 $\max(S_1, S_2)$ 与 S_3 相互独立，$\max(T_1, T_2)$ 与 T_3 相互独立，因为 $g(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ 是关于每个变量 $x_i (i = 1, 2)$ 单调不降凹函数。由引理 4 的 2）得：$X_{(2)} = \min(\max(S_1, S_2), S_3) \leqslant_{icv} \min(\max(T_1, T_2), T_3) = Y_{(2)}$，定理 3 得证。

［参考文献］

［1］MARSHALL A W，OLKIN I. A generalized bivariate exponential distribution［J］. J Appl Prob，1967，4：291-302.

［2］曹晋华. 可靠性数学引论［M］. 北京：高等教育出版社，2006.

［3］LI X，PELLEREY F. Generalized Marshall-Olkin distributions and related bivariate aging properties［J］. Journal of Multivariate Analysis，2011，102：1399-1409. DOI:10.1016/j.jmva.2011.05.006.

［4］MÜLLER A，STOYAN D. Comparison methods for stochastic models and risks［M］. Chichester：Wiley，West Sussex，2002.

［5］SHAKED M，SHANTHIKUMAR J G. Stochastic orders and their applications［M］. New York：Academic Press，1994.

［6］邓永录. 随机模型及其应用［M］. 北京：高等教育出版社，1994.

［7］BOLAND P J，EL-NEWEIHI E，PROSCHAN F. Applications of the hazard rate ordering in reliability and order statistics［J］. Journal of Applied Probability，1994，31(1)：180-192. DOI:10.2307/3215245.

［8］KHALEDI B E，KOCHAR S. Some new results on stochastic comparisons of parallel systems［J］. Journal of Applied Probability，2000，37(4)：1123-1128. DOI:10.1239/jap/1014843091.

［9］BALAKRISHNAN N，ZHAO P. Ordering properties of order statistics from heterogeneous populations：a review with an emphasis on some recent developments［J］. Probability in the Engineering and Informational Science，2013，27(4)：403-443.

［10］JOO S，MI J. Some properties of hazard rate functions of systems with two components［J］. Journal of Statistical Planning and Inference，2010，140(2)：445-451. DOI:10.1016/j.jspi.2009.07.023.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）