第 23 卷　第 3 期　　集美大学学报（自然科学版）　　Vol. 23　No. 3
2018 年 5 月　　Journal of Jimei University (Natural Science)　　May 2018

[文章编号] 1007-7405(2018)03-0232-04　　DOI:10.19715/j.jmuzr.2018.03.011

具有时滞的复值微分系统的概周期解

方聪娜

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 研究一类具有时滞的复值微分系统的概周期解，利用实数域上的不动点定理及相关分析技巧，得到关于该系统的概周期解的存在性及唯一性的新结果。

[关键词] 复值微分系统；概周期解；时滞；不动点定理

[中图分类号] O 175.14

The Almost Periodic Solution of Complex-valued Differential Systems with Time Delay

FANG Congna

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: This paper studies the almost periodic solution for a class of complex-valued differential systems with time delay. Due to fixed point theorems on real number fields and relative analysis technique, some new results are obtained on the existence and uniqueness of almost periodic solution of the systems.

Keywords: complex-valued differential systems; almost periodic solution; time delay; fixed point theorem

0　引言

众所周知，泛函微分系统广泛应用于各个领域，如核物理学、电路信号处理、生态系统、神经网络、流行病学、化工循环系统等。许多学者致力于研究实值泛函微分系统并且取得了丰富的研究成果[1-7]。但是在诸多应用领域中，实值微分系统也有一定的局限性，如在电子信息工程领域，人们就需要处理复数数据，因此，复值泛函微分系统自然而然地被提出来。近年来，一些学者主要研究了复值泛函微分系统的稳定性及周期性的问题，特别是关于复值神经网络的研究取得了一定的成果[8-11]。从目前来看，对于复值微分系统概周期解的相关问题的研究很少，而概周期解比周期解更具有一般性，所以研究复值微分系统的概周期解具有一定的理论意义和实用价值。本文将复值微分系统分离成实部和虚部，研究了一类具有时滞的复值泛函微分系统的概周期解，得到了保证该系统存在唯一的概周期解的充分条件。

1　相关引理

定义 1　对于复值函数 $z(t)=x(t)+iy(t)\,(x(t)=\mathrm{Re}(z(t)),y(t)=\mathrm{Im}(z(t)))$，若 $x(t),y(t)$

[收稿日期] 2018-01-26　　[修回日期] 2018-04-18
[基金项目] 福建省自然科学基金项目（2018J01417）
[作者简介] 方聪娜（1977—），女，副教授，主要从事常微分方程及泛函微分方程的研究。

都是概周期函数，则称 $z(t)$ 为概周期函数。

考虑如下概周期系统

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t), \tag{1}$$

和

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{k}(t), \tag{2}$$

这里 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 t 的概周期函数矩阵，$\boldsymbol{k}(t)$ 是 t 的概周期函数向量。设 $\boldsymbol{X}(t)$ 是系统（1）的基本解矩阵。

引理 1[7]　对于系统（1）的 $\boldsymbol{A}(t) = [a_{ij}(t)]_{n\times n}$，若存在正可微函数 $d_i(t)$ $(d_1 \leqslant d_i(t) \leqslant d_2,\ d_1,\ d_2$ 为正的常数，$i = 1,2,\cdots,n)$ 及概周期函数 $a(t)$，使得 $d'_j(t) + d_j(t)a_{jj}(t) + \sum\limits_{i=1,i\neq j}^{n} |a_{ij}(t)| d_i(t) \leqslant a(t)d_j(t)$，$j = 1,2,\cdots,n$，则 $\|\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)\| \leqslant (d_2/d_1)\exp\left(\int_s^t a(r)\mathrm{d}r\right)$，$t \geqslant s$。

引理 2[7]　若引理 1 的条件成立且 $a(t)$ 的平均值 $M[a(t)] = \lim\limits_{t-s\to+\infty}\int_s^t a(\tau)\mathrm{d}\tau/(t-s) < 0$，则系统（2）存在唯一的概周期解，且它可表示为 $\boldsymbol{x}(t) = \int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)\boldsymbol{k}(s)\mathrm{d}s$。

2　主要结果及其证明

对于任意的 $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$，定义 $\boldsymbol{x}$ 的范数为 $\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$，相应地定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times n})$ 的范数为 $\|\boldsymbol{A}\| = \sup\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\neq 0}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|/\|\boldsymbol{x}\|$。

本文研究复值微分系统

$$\boldsymbol{Z}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{Z}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Z}(t)) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z}(t-\tau)) + \boldsymbol{H}(t), \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{Z}(t) = (z_1(t),z_2(t),\cdots,z_n(t))^{\mathrm{T}} \in C^n$，$\boldsymbol{A}(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n} \in \mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}(t) = (b_{ij}(t))_{n\times n} \in C^{n\times n}$，$\boldsymbol{D}(t) = (d_{ij}(t))_{n\times n} \in C^{n\times n}$，$\boldsymbol{H}(t) = (h_1(t),h_2(t),\cdots,h_n(t))^{\mathrm{T}} \in C^n$，$\tau > 0$ 为时滞，$\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{B}(t)$、$\boldsymbol{D}(t)$ 都是 t 的概周期函数矩阵，$\boldsymbol{H}(t)$ 是 t 的概周期函数向量，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Z}(t)) = (f_1(z_1(t)),f_2(z_2(t)),\cdots,f_n(z_n(t)))^{\mathrm{T}} \in C^n$，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z}(t-\tau)) = (g_1(z_1(t-\tau)),g_2(z_2(t-\tau)),\cdots,g_n(z_n(t-\tau)))^{\mathrm{T}} \in C^n$，$z_j(t) = x_j(t) + iy_j(t)$，$x_j(t) = \mathrm{Re}(z_j(t))$，$y_j(t) = \mathrm{Im}(z_j(t))$，$f_j(z_j(t)) = f_j^{\mathrm{R}}(x_j(t)) + if_j^{I}(y_j(t))$，$f_j^{\mathrm{R}}(x_j(t)) = \mathrm{Re}(f_j(z_j(t)))$，$f_j^{I}(y_j(t)) = \mathrm{Im}(f_j(z_j(t)))$，$g_j(z_j(t-\tau)) = g_j^{\mathrm{R}}(x_j(t-\tau)) + ig_j^{I}(y_j(t-\tau))$，$g_j^{\mathrm{R}}(x_j(t-\tau)) = \mathrm{Re}(g_j(z_j(t-\tau)))$，$g_j^{I}(y_j(t-\tau)) = \mathrm{Im}(g_j(z_j(t-\tau)))$，$f_j^{\mathrm{R}}(\cdot)$，$f_j^{I}(\cdot)$，$g_j^{\mathrm{R}}(\cdot)$，$g_j^{I}(\cdot)$ 为连续函数，$j = 1,2,\cdots,n$。

令 $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t))^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$；$\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}(t) + i\boldsymbol{B}^{I}(t)$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}(t) = (b_{ij}^{\mathrm{R}}(t))_{n\times n}$，$b_{ij}^{\mathrm{R}}(t) = \mathrm{Re}(b_{ij}(t))$，$\boldsymbol{B}^{I}(t) = (b_{ij}^{I}(t))_{n\times n}$，$b_{ij}^{I}(t) = \mathrm{Im}(b_{ij}(t))$；$\boldsymbol{D}(t) = \boldsymbol{D}^{\mathrm{R}}(t) + i\boldsymbol{D}^{I}(t)$，$\boldsymbol{D}^{\mathrm{R}}(t) = (d_{ij}^{\mathrm{R}}(t))_{n\times n}$，$d_{ij}^{\mathrm{R}}(t) = \mathrm{Re}(d_{ij}(t))$，$\boldsymbol{D}^{I}(t) = (d_{ij}^{I}(t))_{n\times n}$，$d_{ij}^{I}(t) = \mathrm{Im}(d_{ij}(t))$；$\boldsymbol{H}(t) = \boldsymbol{H}^{\mathrm{R}}(t) + i\boldsymbol{H}^{I}(t)$，$\boldsymbol{H}^{\mathrm{R}}(t) = (h_1^{\mathrm{R}}(t),h_2^{\mathrm{R}}(t),\cdots,h_n^{\mathrm{R}}(t))^{\mathrm{T}}$，$h_j^{\mathrm{R}}(t) = \mathrm{Re}(h_j(t))$，$\boldsymbol{H}^{I}(t) = (h_1^{I}(t),h_2^{I}(t),\cdots,h_n^{I}(t))^{\mathrm{T}}$，$h_j^{I}(t) = \mathrm{Im}(h_j(t))$；$\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}(t)) = (f_1^{\mathrm{R}}(x_1(t)),f_2^{\mathrm{R}}(x_2(t)),\cdots,f_n^{\mathrm{R}}(x_n(t)))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f}^{I}(\boldsymbol{y}(t)) = (f_1^{I}(y_1(t)),f_2^{I}(y_2(t)),\cdots,f_n^{I}(y_n(t)))^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}(t-\tau)) = (g_1^{\mathrm{R}}(x_1(t-\tau)),g_2^{\mathrm{R}}(x_2(t-\tau)),\cdots,g_n^{\mathrm{R}}(x_n(t-\tau)))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{g}^{I}(\boldsymbol{y}(t-\tau)) = (g_1^{I}(y_1(t-\tau)),g_2^{I}(y_2(t-\tau)),\cdots,g_n^{I}(y_n(t-\tau)))^{\mathrm{T}}$，则系统（3）可化为如下实值系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}(t)\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}(t)) - \boldsymbol{B}^{I}(t)\boldsymbol{f}^{I}(\boldsymbol{y}(t)) + \boldsymbol{D}^{\mathrm{R}}(t)\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}(t-\tau)) - \\ \qquad \boldsymbol{D}^{I}(t)\boldsymbol{g}^{I}(\boldsymbol{y}(t-\tau)) + \boldsymbol{H}^{\mathrm{R}}(t), \\ \boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{B}^{I}(t)\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}(t)\boldsymbol{f}^{I}(\boldsymbol{y}(t)) + \boldsymbol{D}^{I}(t)\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}(t-\tau)) + \\ \qquad \boldsymbol{D}^{\mathrm{R}}(t)\boldsymbol{g}^{I}(\boldsymbol{y}(t-\tau)) + \boldsymbol{H}^{I}(t)。 \end{cases} \tag{4}$$

定理 1　对于方程（3），设下列条件成立：1）对于 $\boldsymbol{A}(t)=[a_{ij}(t)]_{n\times n}$，存在正可微函数 $d_i(t)$（$d_1\leqslant d_i(t)\leqslant d_2$，$d_1,d_2$ 为正的常数，$i=1,2,\cdots,n$）及平均值小于 0 的概周期函数 $a(t)$，使得 $d'_j(t)+d_j(t)a_{jj}(t)+\sum\limits_{i=1,i\neq j}^{n}|a_{ij}(t)|d_i(t)\leqslant a(t)d_j(t)$，$j=1,2,\cdots,n$；2）存在正常数 l^j、q^j，使得 $\forall\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^n$，有 $\|\boldsymbol{f}^j(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{f}^j(\boldsymbol{u})\|\leqslant l^j\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|$，$\|\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{g}^j(\boldsymbol{u})\|\leqslant q^j\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|$，$j\in\{R,I\}$；3）$d_2[(B^{\mathrm{R}}+B^I)(l^{\mathrm{R}}+l^I)+(D^{\mathrm{R}}+D^I)(q^{\mathrm{R}}+q^I)]/(ad_1)<1$，其中 $B^j=\sup\{\|\boldsymbol{B}^j(t)\|\,|\,t\in\mathbf{R}\}$，$D^j=\sup\{\|\boldsymbol{D}^j(t)\|\,|\,t\in\mathbf{R}\}$，$j\in\{R,I\}$，$a=\inf\{-a(t)\,|\,t\in\mathbf{R}\}>0$，则方程（3）存在着唯一的概周期解。

证明　令 $G=\{\boldsymbol{V}(t)\,|\,\boldsymbol{V}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^{2n}$ 为概周期函数向量$\}$，则 G 在范数 $\|\boldsymbol{V}\|=\sup\{\|\boldsymbol{V}(t)\|\,|\,t\in\mathbf{R}\}$ 下是一个 Banach 空间。

对任意的 $\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\in G$，现在考虑如下的概周期微分系统

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}(t)\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{v}_1(t))-\boldsymbol{B}^I(t)\boldsymbol{f}^I(\boldsymbol{v}_2(t))+\boldsymbol{D}^{\mathrm{R}}(t)\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{v}_1(t-\tau))-\\ \qquad\boldsymbol{D}^I(t)\boldsymbol{g}^I(\boldsymbol{v}_2(t-\tau))+\boldsymbol{H}^{\mathrm{R}}(t),\\ \boldsymbol{y}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{B}^I(t)\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{v}_1(t))+\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}(t)\boldsymbol{f}^I(\boldsymbol{v}_2(t))+\boldsymbol{D}^I(t)\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{v}_1(t-\tau))+\\ \qquad\boldsymbol{D}^{\mathrm{R}}(t)\boldsymbol{g}^I(\boldsymbol{v}_2(t-\tau))+\boldsymbol{H}^I(t),\end{cases}\tag{5}$$

由条件 1）及引理 2 可知，系统（5）存在唯一的概周期解 $\boldsymbol{X}_V(t)=(\boldsymbol{x}_V(t),\boldsymbol{y}_V(t))^{\mathrm{T}}$，它可表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_V(t)=\int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)[\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}(s)\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{v}_1(s))-\boldsymbol{B}^I(s)\boldsymbol{f}^I(\boldsymbol{v}_2(s))+\boldsymbol{D}^{\mathrm{R}}(s)\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{v}_1(s-\tau))-\\ \qquad\boldsymbol{D}^I(s)\boldsymbol{g}^I(\boldsymbol{v}_2(s-\tau))+\boldsymbol{H}^{\mathrm{R}}(s)]\mathrm{d}s,\\ \boldsymbol{y}_V(t)=\int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)[\boldsymbol{B}^I(s)\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{v}_1(s))+\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}(s)\boldsymbol{f}^I(\boldsymbol{v}_2(s))+\boldsymbol{D}^I(s)\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{v}_1(s-\tau))+\\ \qquad\boldsymbol{D}^{\mathrm{R}}(s)\boldsymbol{g}^I(\boldsymbol{v}_2(s-\tau))+\boldsymbol{H}^I(s)]\mathrm{d}s。\end{cases}\tag{6}$$

作映射 $F:G\to G$ 如下：$F(\boldsymbol{V}(t))=\boldsymbol{X}_V(t)$，$\forall\boldsymbol{V}\in G$，则对于任意的 $\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{U}\in G$，由条件 2）、3）及引理 1 可得：$\|\boldsymbol{x}_V(t)-\boldsymbol{x}_U(t)\|=\|\int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)[\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}(s)(\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{v}_1(s))-\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{u}_1(s)))-\boldsymbol{B}^I(s)(\boldsymbol{f}^I(\boldsymbol{v}_2(s))-\boldsymbol{f}^I(\boldsymbol{u}_2(s)))+\boldsymbol{D}^{\mathrm{R}}(s)(\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{v}_1(s-\tau))-\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{u}_1(s-\tau)))-\boldsymbol{D}^I(s)(\boldsymbol{g}^I(\boldsymbol{v}_2(s-\tau))-\boldsymbol{g}^I(\boldsymbol{u}_2(s-\tau)))]\mathrm{d}s\|\leqslant\int_{-\infty}^{t}\|\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)\|[\|\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}(s)\|\|\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{v}_1(s))-\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{u}_1(s))\|+\|\boldsymbol{B}^I(s)\|\|\boldsymbol{f}^I(\boldsymbol{v}_2(s))-\boldsymbol{f}^I(\boldsymbol{u}_2(s))\|+\|\boldsymbol{D}^{\mathrm{R}}(s)\|\|\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{v}_1(s-\tau))-\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{u}_1(s-\tau))\|+\|\boldsymbol{D}^I(s)\|\|\boldsymbol{g}^I(\boldsymbol{v}_2(s-\tau))-\boldsymbol{g}^I(\boldsymbol{u}_2(s-\tau))\|]\mathrm{d}s\leqslant\int_{-\infty}^{t}d_2/d_1\exp(\int_s^t a(r)\mathrm{d}r)[B^{\mathrm{R}}l^{\mathrm{R}}\|\boldsymbol{v}_1(s)-\boldsymbol{u}_1(s)\|+B^Il^I\|\boldsymbol{v}_2(s)-\boldsymbol{u}_2(s)\|+D^{\mathrm{R}}q^{\mathrm{R}}\|\boldsymbol{v}_1(s-\tau)-\boldsymbol{u}_1(s-\tau)\|+D^Iq^I\|\boldsymbol{v}_2(s-\tau)-\boldsymbol{u}_2(s-\tau)\|]\mathrm{d}s\leqslant d_2[B^{\mathrm{R}}l^{\mathrm{R}}+B^Il^I+D^{\mathrm{R}}q^{\mathrm{R}}+D^Iq^I]\|\boldsymbol{V}-\boldsymbol{U}\|/(ad_1)$，$\|\boldsymbol{y}_V(t)-\boldsymbol{y}_U(t)\|=\|\int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)[\boldsymbol{B}^I(s)(\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{v}_1(s))-\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{u}_1(s)))+\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}(s)(\boldsymbol{f}^I(\boldsymbol{v}_2(s))-\boldsymbol{f}^I(\boldsymbol{u}_2(s)))+\boldsymbol{D}^I(s)(\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{v}_1(s-\tau))-\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{u}_1(s-\tau)))+\boldsymbol{D}^{\mathrm{R}}(s)(\boldsymbol{g}^I(\boldsymbol{v}_2(s-\tau))-\boldsymbol{g}^I(\boldsymbol{u}_2(s-\tau)))]\mathrm{d}s\|\leqslant\int_{-\infty}^{t}\|\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)\|[\|\boldsymbol{B}^I(s)\|\|\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{v}_1(s))-\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{u}_1(s))\|+\|\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}(s)\|\|\boldsymbol{f}^I(\boldsymbol{v}_2(s))-\boldsymbol{f}^I(\boldsymbol{u}_2(s))\|+\|\boldsymbol{D}^I(s)\|\|\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{v}_1(s-\tau))-\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{u}_1(s-\tau))\|+\|\boldsymbol{D}^{\mathrm{R}}(s)\|\|\boldsymbol{g}^I(\boldsymbol{v}_2(s-\tau))-\boldsymbol{g}^I(\boldsymbol{u}_2(s-\tau))\|]\mathrm{d}s\leqslant\int_{-\infty}^{t}d_2/d_1\exp(\int_s^t a(r)\mathrm{d}r)[B^Il^{\mathrm{R}}\|\boldsymbol{v}_1(s)-\boldsymbol{u}_1(s)\|+B^{\mathrm{R}}l^I\|\boldsymbol{v}_2(s))-\boldsymbol{u}_2(s)\|+D^Iq^{\mathrm{R}}\|\boldsymbol{v}_1(s-\tau)-\boldsymbol{u}_1(s-\tau)\|+D^{\mathrm{R}}q^I\|\boldsymbol{v}_2(s-\tau)-\boldsymbol{u}_2(s-\tau)\|]\mathrm{d}s\leqslant d_2[B^Il^{\mathrm{R}}+B^{\mathrm{R}}l^I+D^Iq^{\mathrm{R}}+D^{\mathrm{R}}q^I]\|\boldsymbol{V}-\boldsymbol{U}\|/(ad_1)$，因此，$\|F(\boldsymbol{V}(t))-F(\boldsymbol{U}(t))\|=\|\boldsymbol{X}_V(t)-\boldsymbol{X}_U(t)\|\leqslant\|\boldsymbol{x}_V(t)-\boldsymbol{x}_U(t)\|+\|\boldsymbol{y}_V(t)-\boldsymbol{y}_U(t)\|\leqslant d_2[(B^{\mathrm{R}}+B^I)(l^{\mathrm{R}}+l^I)+(D^{\mathrm{R}}+D^I)(q^{\mathrm{R}}+q^I)]\|\boldsymbol{V}-\boldsymbol{U}\|/(ad_1)$，由条件 3）可知映射 F 是一个压缩映射，从而由不动点定

理可知 F 在 G 中存在唯一的不动点，即存在唯一的 $(\boldsymbol{\varphi}(t),\boldsymbol{\phi}(t))^{\mathrm{T}}\in G$，使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varphi}(t)=\int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)[\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}(s)\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\varphi}(s))-\boldsymbol{B}^{I}(s)\boldsymbol{f}^{I}(\boldsymbol{\phi}(s))+\boldsymbol{D}^{\mathrm{R}}(s)\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\varphi}(s-\tau))-\\ \qquad \boldsymbol{D}^{I}(s)\boldsymbol{g}^{I}(\boldsymbol{\phi}(s-\tau))+\boldsymbol{H}^{\mathrm{R}}(s)]\mathrm{d}s,\\ \boldsymbol{\phi}(t)=\int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)[\boldsymbol{B}^{I}(s)\boldsymbol{f}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\varphi}(s))+\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}(s)\boldsymbol{f}^{I}(\boldsymbol{\phi}(s))+\boldsymbol{D}^{I}(s)\boldsymbol{g}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\varphi}(s-\tau))+\\ \qquad \boldsymbol{D}^{\mathrm{R}}(s)\boldsymbol{g}^{I}(\boldsymbol{\phi}(s-\tau))+\boldsymbol{H}^{I}(s)]\mathrm{d}s,\end{cases} \tag{7}$$

直接由式（7）的两边同时对 t 求导即知，$(\boldsymbol{\varphi}(t),\boldsymbol{\phi}(t))^{\mathrm{T}}$ 是方程（4）的唯一概周期解，从而方程（3）存在唯一的概周期解。

[参考文献]

[1] 郑祖庥. 泛函微分方程理论 [M]. 合肥：安徽教育出版社，1994.

[2] 沈根成，高国柱，李力锋. 具有扰动和无界时滞的一维泛函微分方程的渐近稳定性 [J]. 数学物理学报，1999，19(5)：493-500.

[3] 鲁世平，葛渭高，郑祖庥. 一类中立型泛函微分方程周期解问题 [J]. 数学年刊，2004，25A(5)：645-652.

[4] 李寿佛. Banach 空间中非线性刚性 Volterra 泛函微分方程稳定性分析 [J]. 中国科学（A 辑）：数学，2005，35(3)：286-301.

[5] 景兰，莫宜春. 一类泛函微分方程正周期解的存在性和多解性 [J]. 应用数学学报，2014，37(2)：234-246.

[6] 冯伟贞，李少娥. 泛函微分系统的脉冲控制 [J]. 高校应用数学学报，2014，29(2)：185-200.

[7] 方聪娜，王全义. 具无穷时滞的中立型 Volterra 积分微分方程的概周期解 [J]. 纯粹数学与应用数学，2009，25(3)：546-555.

[8] 张磊，宋乾坤. 带有变化分布时滞的复值神经网络 Lagrange 稳定性 [J]. 应用数学和力学，2017，38(10)：1180-1186.

[9] SREE H R V，MURTHY G R. Global dynamics of a class of complex valued neural networks [J]. International Journal of Neural Systems，2008，18(2)：165-171. DOI：10.1142/S0129065708001476.

[10] SHI Y C，CAO J D，CHEN G R. Exponential stability of complex-valued memristor-based neural networks with time-varying delays [J]. Applied Mathematics and Computation，2017，313：222-234. DOI：10.1016/J.AMC.2017.05.078.

[11] PAN J，LIU X Z，XIE W C. Exponential stability of a class of complex-valued neural networks with time-varying delays [J]. Neurocomputing，2015，164：293-299. DOI：10.1016/J.NEUCOM.2015.02.024.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）