第 23 卷　第 3 期
2018 年 5 月

集美大学学报（自然科学版）
Journal of Jimei University(Natural Science)

Vol. 23　No. 3
May 2018

[文章编号] 1007 – 7405(2018)03 – 0222 – 10　　DOI:10.19715/j.jmuzr.2018.03.010

具有偏利关系的随机三种群模型的动力学分析

付盈洁，魏春金，张树文

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 研究一类具有偏利关系的随机三种群模型。证明系统的全局正解的存在唯一性、均值有界性，给出了种群灭绝与平均持续生存的条件，并证明了平稳分布的存在性。最后由理论结果和数值模拟可知：当噪声强度较大时，种群快速灭绝；当噪声强度较小时，种群减少速度变慢，并会持续生存。

[关键词] 捕食 – 食饵系统；随机扰动；均值有界；平稳分布

[中图分类号] O 175.13

Dynamics of Stochastic Three Populations Model with Partial-dvantage for Prey

FU Yingjie, WEI Chunjin, ZHANG Shuwen

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: A stochastic three populations model with partial-advantage for prey was studied. Firstly, the existence and uniqueness of the positive global solution starting from the positive initial value and the mean boundedness of the system were proved. Secondly, the sufficient conditions for the solution of population extinction and persistence in the mean were obtained, and the existence of stationary distribution under certain conditions was proved. Finally, the theoretical results and numerical simulations showed that the population would extinct as the enhancing of noise intensity, while the reductive speed of the population would slow down as the weakening of noise intensity, and the population would be persistent.

Keywords: predator-prey system; random disturbance; mean boundedness; stationary distribution

0　引言

种群生态学是研究种群数量动态与环境相互作用关系的科学，它是在个体、种群、群落中以种群为研究对象的生态学分支。一般来说，种群间相互作用的关系可以分为竞争、捕食和互惠关系[1-2]。对于一些比较经典的模型，如单种群 Logistic 增长模型、两种群 Lotka-Volterra 模型，已经被许多生物学家广泛研究[3-6]，并取得了很好的结果。但是，在现实环境中，捕食者与捕食者之间，捕食者与食饵之间也会出现偏利的情形，如：兰花生长在乔木上，对乔木没有影响，但有利于自己获得阳光和吸收营养。但目前对于偏利关系的三种群模型的研究相对较少[7-8]，文献［8］考虑了如下食饵具有偏利合作关系的捕食 – 食饵系统：

[收稿日期] 2017 – 02 – 26　　[修回日期] 2017 – 04 – 06
[基金项目] 福建省自然科学基金项目（2016J01667，2016J05012）
[作者简介] 付盈洁（1991—），女，硕士生，从事生物数学方向研究。通信作者：魏春金（1973—），女，教授，硕导，从事生物数学方向研究，E-mail:1083684309@qq.com。

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = x_1(t)(r_1 - a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)),\\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)(r_2 - a_{22}x_2(t) - \alpha y(t)),\\ \dot{y}(t) = y(t)(r_3 - \beta y(t)/(k + x_2(t)))。\end{cases} \tag{1}$$

其中：$x_1(t),x_2(t),y(t)$ 分别代表种群 x_1,x_2,y 在 t 时刻的密度；$r_i > 0(i = 1,2,3)$ 表示种群的内禀增长率；$a_{11} > 0,a_{22} > 0,\beta > 0$ 分别表示种群的密度制约系数；$a_{12} > 0$ 表示种群 x_2 对种群 x_1 的偏惠系数；$k > 0$ 表示捕食者的环境容纳量。

文献［8］只对确定性模型进行了研究。但在现实环境中，存在许多随机或偶然的因素影响着生物种群的变化[9-12]，比如：环境噪声会在不同程度上影响增长率、环境容量、竞争系数和系统的其他参数，自然界中任何生物和种群都不可避免地受到外界环境随机因素，人类对环境的破坏，地震、暴雨等自然灾害的影响。因此，本文考虑如下具有第二类功能性反应的随机捕食－食饵模型：

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t) = x(t)(r_1 - a_{11}x(t) + by(t) - cz(t)/(1 + x(t)))\mathrm{d}t + \sigma_1 x(t)\mathrm{d}B_1(t),\\ \mathrm{d}y(t) = y(t)(r_2 - a_{22}y(t))\mathrm{d}t + \sigma_2 y(t)\mathrm{d}B_2(t),\\ \mathrm{d}z(t) = z(t)(-d - a_{33}z(t) + kcx(t)/(1 + x(t)))\mathrm{d}t + \sigma_3 z(t)\mathrm{d}B_3(t)。\end{cases} \tag{2}$$

其中：$x(t),y(t),z(t)$ 分别代表种群 x,y,z 在 t 时刻的密度；$r_i > 0(i = 1,2)$ 分别表示种群 x,y 的内禀增长率；d 表示种群 z 的死亡率；$a_{11} > 0,a_{22} > 0,a_{33} > 0$ 分别表示种群的密度制约系数；$b > 0$ 表示种群 y 对种群 x 的偏惠系数；$c > 0$ 是捕食率，$k > 0$ 是食饵转化率，$\sigma_i^2(i = 1,2,3)$ 是白噪声强度；$B_1(t)$，$B_2(t),B_3(t)$ 是定义在完备概率空间上相互独立的标准布朗运动。

文中，总假设 $(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0},P)$ 为完备的概率空间，其中 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ 是 Ω 上的一个 σ－代数且满足通常条件（即右连续，$\mathscr{F}_0$ 包含所有的零测集）。并记 $R_+^3 = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 : x_i > 0,i = 1,2,3\}$。

1　预备知识

给出本文所需要的一些记号如下：$R_+^n = \{(a_1,a_2,\cdots,a_n) \in R^n \mid a_i > 0,i = 1,2,\cdots,n\}$，$u_x = \partial u/\partial x$，$u_{xx} = \partial^2 u/\partial x^2$，$\langle f(t)\rangle_t = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$，$\langle f(t)\rangle^* = \limsup\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$，$\langle f(t)\rangle_* = \liminf\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$。

L^1 代表 1 次函数的空间，1 次可积。

设 $x(t) = (x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))(t \geq 0)$ 是随机微分方程

$$\mathrm{d}x(t) = f(x(t),t)\mathrm{d}t + g(x(t),t)\mathrm{d}B(t) \tag{3}$$

的解，其中 $f \in \mathscr{L}^1(R^n \times R+,R^n)$，$g \in \mathscr{L}^2(R^n \times R_+,R^{n\times m})$，$B(t)$ 是 n 维布朗运动。

定义 1[13]　1）若种群 $x(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$，a. s.，则种群 $x(t)$ 是灭绝的；2）若存在一个正常数 l，使得种群 $x(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s = l$，a. s.，则种群 $x(t)$ 是平均持续生存的；3）若存在一个正常数 l，使得种群 $x(t)$ 满足 $\limsup\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s \leq l$，a. s.，则种群 $x(t)$ 是弱平均持续生存的。

定理 1[14]（存在唯一性定理）　假设 $f(x(t),t),g(x(t),t)$ 关于 $x(t)$ 满足以下条件，1）局部 Lipschitz 条件：存在 $c_k > 0(k = 1,2,\cdots)$，使得对 $\forall x,y \in R^n$ 且 $|x| \vee |y| \leq k$，有不等式 $|f(x,t) - f(y,t)| \vee |g(x,t) - g(y,t)| \leq c_k|x - y|$ 成立；2）线性增长条件：存在 $c > 0$，使得 $|f(x,t)| \vee |g(x,t)| \leq c|1 + |x||$，$\forall (x,t) \in R^n \times R_+$，则初始条件为 $x(0) = x_0 \in R^n$ 的系统（3）存在唯一连续的局部解 $x(t)$，$t \in [0,\tau_e)$，其中 τ_e 是爆破时间。

定理 2[14]（伊藤公式）　设 $x(t)(t \geq 0)$ 是伊藤过程，其随机微分为 $\mathrm{d}x(t) = f(t)\mathrm{d}t + g(t)\mathrm{d}B_t$，其中 $f \in \mathscr{L}^1(R_+,R^n)$，$g \in \mathscr{L}^2(R_+,R^{n\times m})$。若 $V(x(t),t) \in C^{2,1}(R^n \times R_+;R)$，则 $V(x(t),t)$ 仍然是伊

藤过程，具有随机微分 $\mathrm{d}V(x(t),t) = V_t(x(t),t)\mathrm{d}t + V_x(x(t),t)\mathrm{d}x(t) + \mathrm{d}x^T(t)V_{xx}(x(t),t)\mathrm{d}x(t)/2$ 。

引理 1[15] 设 $x(t) \in C(\Omega \times [0, +\infty))$ ，则有：1）若存在正数 T,μ_0 ，使得 $t \geqslant T$ 时，有 $\ln x(t) \leqslant \mu t - \mu_0\int_0^t x(s)\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n}(\beta_i B_i(t))$ 成立，其中 $\beta_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是常数，那么 $\begin{cases}\langle x(t)\rangle^* \leqslant \mu/\mu_0, \text{a.s.}, & \mu > 0,\\ \lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0, \text{a.s.}, & \mu < 0;\end{cases}$ 2）若存在正数 T,μ,μ_0 ，使得 $t \geqslant T$ 时，有 $\ln x(t) \geqslant \mu t - \mu_0\int_0^t x(s)\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n}(\beta_i B_i(t))$ 成立，其中 $\beta_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是常数，那么 $\langle x(t)\rangle_* \geqslant \mu/\mu_0, \text{a.s.}$ 。

令 $X(t)$ 为 R^l 中的一个自治 Markov 过程（R^l 表示 l 维欧几里得空间），满足如下随机过程：$\mathrm{d}X(t) = b(X)\mathrm{d}t + \sum_{r=1}^{k}\sigma_r(X)\mathrm{d}B_r(t)$ ，扩散矩阵为：$\boldsymbol{A}(x) = (a_{ij}(x)), a_{ij}(x) = \sum_{r=1}^{k}(\sigma_r^i(x)\sigma_r^j(x))$ 。

引理 2[16] 如果存在一个具有正则边界 Γ 的有界开集 $U\subset R^l$，满足如下性质：1）F_u 在 U 中是一致椭圆，其中 $F_u = f(x)u_x + \mathrm{tr}(A(x)u_{xx})/2$ ，即证存在正数 M，满足 $\sum_{i,j=1}^{l}(a_{ij}(x)\xi_i\xi_j) \geqslant M|\xi|^2, x \in U, \xi \in R^l$ ；2）存在邻域 U 和非负 C^2 函数 $V(x)$ ，使得对任意的 $x \in R^l \setminus U$ ，有 $LV < 0$ ，则 Markov 过程 $X(t)$ 存在平稳分布 $\mu(\cdot)$ 。令 $g(\cdot)$ 为关于测度 μ 可积的函数，则对所有的 $x \in R^l$ ，有 $P(\lim\limits_{t\to+\infty}(\int_0^t g(x(t))\mathrm{d}t/t) = \int_{R^l} g(x)\mu(\mathrm{d}x)) = 1$ 成立。

2 主要结论

定理 3 对于任意给定的初值 $(x(0),y(0),z(0)) \in R_+^3$ ，系统（2）存在唯一正解 $(x(t),y(t),z(t)), t \geqslant 0$ ，且此解以概率 1 停留在 R_+^3 中。

证明 对任意的 $t>0$，作变换：$u = \ln x, v = \ln y, w = \ln z$ ，则系统（2）变为系统（4）：

$$\begin{cases}\mathrm{d}u = (r_1 - \sigma_1^2/2 - a_{11}\mathrm{e}^u + b\mathrm{e}^v - c\mathrm{e}^w/(1+\mathrm{e}^u))\mathrm{d}t + \sigma_1\mathrm{d}B_1(t),\\ \mathrm{d}v = (r_2 - \sigma_2^2/2 - a_{22}\mathrm{e}^v)\mathrm{d}t + \sigma_2\mathrm{d}B_2(t),\\ \mathrm{d}w = (-d - \sigma_3^2/2 - a_{33}\mathrm{e}^w + kc\mathrm{e}^u/(1+\mathrm{e}^u))\mathrm{d}t + \sigma_3\mathrm{d}B_3(t)。\end{cases} \tag{4}$$

且初始值 $(u(0),v(0),w(0)) = (\ln x(0),\ln y(0),\ln z(0))$ 。由于系统（4）满足局部 Lipschitz 连续，则系统（4）存在唯一局部解 $(u(t),v(t),w(t)), t \in [0,\tau_e)$ ，其中 τ_e是爆破时间。因此，得到 $(x(t),y(t),z(t)) = (\mathrm{e}^{u(t)},\mathrm{e}^{v(t)},\mathrm{e}^{w(t)}), t \in [0,\tau_e)$ 是系统（2）在初值 $(x(0),y(0),z(0))$ 条件下的唯一局部解。为了证明这个解是全局的，只需证明 $\tau_e = +\infty$ 。

令 $k_0 > 0$ 足够大，使得 $(x(t),y(t),z(t)) \in [1/k_0,k_0]\times[1/k_0,k_0]\times[1/k_0,k_0]$ ，对于任意的正数 $k \geqslant k_0$ ，定义一个停时序列：$\tau_k = \inf\{t \in [0,\tau_e): x(t) \notin (1/k,k)$ ，或者 $y(t) \notin (1/k,k)$ ，或者 $z(t) \notin (1/k,k)\}$ 。

定义 $\inf\Phi = +\infty$（Φ 代表一个空集）。显然，当 $k\to\infty$ 时，τ_k 是单调递增的，且 $\tau_k < \tau_e$ ，因此有 $\tau_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty}\tau_k$ ，其中 $\tau_\infty \leqslant \tau_e$ ，a.s.，因此，只需证明 $\tau_\infty \to \infty$ ，a.s.。

假设 $\tau_\infty \nrightarrow \infty$ ，则存在常数 $T \geqslant 0$ ，$\epsilon \in (0,1)$ 和一个整数 $k_1 \geqslant k_0$ ，有

$$P\{\tau_k \leqslant T\} \geqslant \epsilon, \forall k \geqslant k_1 \tag{5}$$

成立。

定义一个 C^2 函数 $V: R_+^3 \to R_+$ ，$V(X) = (x - 1 - \ln x) + (y - 1 - \ln y) + (z - 1 - \ln z)$ 。显然，$V(X)$（其中 $X = (x(t),y(t),z(t))$）是正定函数。

利用伊藤公式可得：$\mathrm{d}V(X) = LV(X)\mathrm{d}t + (x-1)\sigma_1\mathrm{d}B_1(t) + (y-1)\sigma_2\mathrm{d}B_2(t) + (z-1)\sigma_3\mathrm{d}B_3(t)$ ，其中，$LV(X) = [-(a_{11}/2)x^2 + bxy - (a_{22}/2)y^2] + [-(a_{11}/2)x^2 + (r_1 + a_{11})x - cxz/(1+x) - r_1 +$

$cz/(1+x)+\sigma_1^2/2-(a_{22}/2)y^2+(r_2+a_{22}-b)y-r_2+\sigma_2^2/2-a_{33}z^2+a_{33}z-dz+d+kcxz/(1+x)-kcz/(1+x)+\sigma_3^2/2]$。这里 $L(X)$ 是指 $V(X)$ 的扩散算子。由于 $-(a_{11}/2)x^2+bxy-(a_{22}/2)y^2$ 必有界，设界为 M_1，且 $-(a_{11}/2)x^2+(r_1+a_{11})x-cxz/(1+x)-r_1+cz/(1+x)+\sigma_1^2/2-(a_{22}/2)y^2+(r_2+a_{22}-b)y-r_2+\sigma_2^2/2-a_{33}z^2+a_{33}z-dz+d+kcxz/(1+x)-kcz/(1+x)+\sigma_3^2/2$ 必有界，设界为 M_2，则存在正常数 $M=M_1+M_2$，使得 $LV(X)\leqslant M_1+M_2=M$，所以有：$\mathrm{d}V(X)\leqslant M\mathrm{d}t+(x-1)\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)+(y-1)\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)+(z-1)\sigma_3\mathrm{d}B_3(t)$。将上式两边从 0 到 $\tau_k\wedge T$ 积分得：$\int_0^{\tau_k\wedge T}\mathrm{d}V(X)\leqslant\int_0^{\tau_k\wedge T}M\mathrm{d}t+\int_0^{\tau_k\wedge T}(x-1)\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)+\int_0^{\tau_k\wedge T}(y-1)\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)+\int_0^{\tau_k\wedge T}(z-1)\sigma_3\mathrm{d}B_3(t)$，同时对上式两边取期望：$E(V(x(\tau_k\wedge T),y(\tau_k\wedge T),z(\tau_k\wedge T)))\leqslant V(x_0,y_0,z_0)+M(\tau_k\wedge T)<V(x_0,y_0,z_0)+MT$。

设 $\Omega_k=\{\tau_k\leqslant T\}(k>k_1)$，由式（5）可知 $P(\Omega_k)\geqslant\epsilon$。则对任意的 $\lambda\in\Omega_k$，有 $x(\tau_k,\lambda)\notin(1/k,k)$，或 $y(\tau_k,\lambda)\notin(1/k,k)$，或 $z(\tau_k,\lambda)\notin(1/k,k)$，且 $V(x(\tau_k),y(\tau_k),z(\tau_k))\geqslant((1/k)-1-\ln(1/k))\wedge(k-1-\ln k)$。因此，有 $V(x_0,y_0,z_0)+MT\geqslant E(V(x(\tau_k\wedge T),y(\tau_k\wedge T),z(\tau_k\wedge T)))=E(1_{\Omega_{k(\lambda)}}V(x(\tau_k\wedge T),y(\tau_k\wedge T),z(\tau_k\wedge T)))\geqslant\epsilon[((1/k)-1-\ln(1/k))\wedge(k-1-\ln k)]$。其中 $1_{\Omega_{k(\lambda)}}$ 是 Ω_k 的指标函数。令 $k\to+\infty$，则有 $\infty>V(x_0,y_0,z_0)+MT=\infty$ 导致矛盾，因此必有 $\tau_\infty=\infty$，a. s.。

定理 4　如果 $X(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 是系统（2）满足初值 $(x(0),y(0),z(0))\in R_+^3$ 的解，则系统（2）的解满足 $\limsup\limits_{t\to+\infty}E(x(t)+y(t)+z(t))\leqslant H$，其中 H 是一个正常数。

证明　定义 $V(x(t),y(t),z(t))=x(t)+y(t)+z(t)$，对 $\mathrm{e}^tV(X)$(其中 $X=(x(t),y(t),z(t))$)运用伊藤公式，有：$\mathrm{d}\mathrm{e}^tV(X)=\mathrm{e}^tV(X)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^t\mathrm{d}V(X)=\mathrm{e}^t(V(X)\mathrm{d}t+\mathrm{d}V(X))=\mathrm{e}^t(V(X))+r_1x-a_{11}x^2+bxy-cxz/(1+x)+r_2y-a_{22}y^2-dz+kcxz/(1+x)-a_{33}z^2)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^t(\sigma_1x\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2y\mathrm{d}B_2(t)+\sigma_3z\mathrm{d}B_3(t))=\mathrm{e}^tL(X)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^t(\sigma_1x\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2y\mathrm{d}B_2(t)+\sigma_3z\mathrm{d}B_3(t))$，其中 $L(X)=V(X)+r_1x-a_{11}x^2+bxy-cxz/(1+x)+r_2y-a_{22}y^2-dz+kcxz/(1+x)-a_{33}z^2$（$L(X)$ 是 $V(X)$ 的扩散算子）。显然 $L(X)$ 是有界的，则必存在一个正常数 H，使得 $L(X)\leqslant H$，从而有 $\mathrm{d}\mathrm{e}^tV(X)\leqslant\mathrm{e}^tH\mathrm{d}t+\mathrm{e}^t(\sigma_1x\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2y\mathrm{d}B_2(t)+\sigma_3z\mathrm{d}B_3(t))$，两边从 0 到 t 积分得：$\int_0^t\mathrm{d}\mathrm{e}^tV(X)\leqslant\int_0^t\mathrm{e}^tH\mathrm{d}t+\int_0^t\mathrm{e}^t\sigma_1x\mathrm{d}B_1(t)+\int_0^t\mathrm{e}^t\sigma_2y\mathrm{d}B_2(t)+\int_0^t\mathrm{e}^t\sigma_3z\mathrm{d}B_3(t)$，对上式两边取期望，有 $\mathrm{e}^tE(V(X))-\mathrm{e}^tV(0)\leqslant H(\mathrm{e}^t-1)$，两边同时除以 e^t 并取极限可得 $\limsup\limits_{t\to+\infty}E(x(t)+y(t)+z(t))\leqslant H$，即系统（2）的解是均值有界的。

定理 5　对于随机单种群模型 $\mathrm{d}y(t)=y(t)(r_2-a_{22}y(t))\mathrm{d}t+\sigma_2y(t)\mathrm{d}B_2(t)$，1）若 $r_2-\sigma_2^2/2>0$，则 $\langle y(t)\rangle_t=(r_2-\sigma_2^2/2)/a_{22}$ 且 $\lim\limits_{t\to+\infty}t^{-1}\ln y(t)=0$，a. s.；2）若 $r_2-\sigma_2^2/2<0$，则 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$，a. s.。

证明　对 $\ln y(t)$ 运用伊藤公式，有 $\mathrm{d}\ln y(t)=(r_2-a_{22}y-\sigma_2^2/2)\mathrm{d}t+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)$，两边从 0 到 t 积分得，$\int_0^t\mathrm{d}\ln y(t)=\int_0^t(r_2-a_{22}y-\sigma_2^2/2)\mathrm{d}t+\int_0^t\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)$，即：$\ln y(t)-\ln y(0)=(r_2-\sigma_2^2/2)t-a_{22}\int_0^ty\mathrm{d}t+\sigma_2B_2(t)$，两边同时除以 t 得

$$t^{-1}\ln y(t)=t^{-1}\ln y(0)+(r_2-\sigma_2^2/2)-t^{-1}a_{22}\int_0^ty\mathrm{d}t+t^{-1}\sigma_2B_2(t),\tag{6}$$

两边同取极限有

$$\lim_{t\to+\infty}t^{-1}\ln y(t)=\lim_{t\to+\infty}[t^{-1}\ln y(0)+(r_2-\sigma_2^2/2)-t^{-1}a_{22}\int_0^ty\mathrm{d}t+t^{-1}\sigma_2B_2(t)]。\tag{7}$$

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}t^{-1}\ln y(0)=0$，则对任意小的 $\varepsilon_1>0$，存在 $k_1>0$，使得当 $t\geqslant k_1$ 时，有 $-\varepsilon_1\leqslant$

$t^{-1}\ln y(0) \leqslant \varepsilon_1$。当 $r_2-\sigma_2^2/2>0$ 时，由式（6）知，$t^{-1}\ln y(t)=t^{-1}\ln y(0)+(r_2-\sigma_2^2/2)-t^{-1}a_{22}\int_0^t y\mathrm{d}t+t^{-1}\sigma_2B_2(t)\leqslant r_2-\sigma_2^2/2+\varepsilon_1-t^{-1}a_{22}\int_0^t y\mathrm{d}t+t^{-1}\sigma_2B_2(t)$，$t^{-1}\ln y(t)\geqslant r_2-\sigma_2^2/2-\varepsilon_1-t^{-1}a_{22}\int_0^t y\mathrm{d}t+t^{-1}\sigma_2B_2(t)$。

由引理 1 可知，$\langle y(t)\rangle^*\leqslant(r_2-\sigma_2^2/2+\varepsilon_1)/a_{22}$，$\langle y(t)\rangle_*\geqslant(r_2-\sigma_2^2/2-\varepsilon_1)/a_{22}$，令 $\varepsilon_1\to0$，有 $\langle y(t)\rangle^*\leqslant(r_2-\sigma_2^2/2)/a_{22}$，$\langle y(t)\rangle_*\geqslant(r_2-\sigma_2^2/2)/a_{22}$，即 $\langle y(t)\rangle_t=(r_2-\sigma_2^2/2)/a_{22}$，a. s.。又因 $\lim\limits_{t\to+\infty}t^{-1}B_2(t)=0$，则结合上式和式（7）得 $\lim\limits_{t\to+\infty}t^{-1}\ln y(t)=0$，a. s. 成立。

当 $r_2-\sigma_2^2/2<0$，对于 $t^{-1}\ln y(t)\leqslant\varepsilon_1+(r_2-\sigma_2^2/2)-t^{-1}a_{22}\int_0^t y\mathrm{d}t+t^{-1}\sigma_2B_2(t)$，令 $\varepsilon_1\to0$，由引理 1 得 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$ a. s.。

推论 1 由定理 5 知，当 $\sigma_2^2<2r_2$ 时，种群 $y(t)$ 是持续生存的，但是当 σ_2 逐渐增大，增长到 $\sigma_2^2>2r_2$ 时，种群 $y(t)$ 由生存转向灭绝。由此可知噪声强度对种群的影响很大，当噪声强度较小时，种群可持续生存，而当噪声强度较大时，种群将会灭绝。

定理 6 对于随机系统（2），令常数 $m=r_1-\sigma_1^2/2$，$n=r_2-\sigma_2^2/2$，$q=d+\sigma_3^2/2$，则有：1）若 $m<0$，$n<0$，则种群 $x(t),y(t),z(t)$ 均灭绝；2）若 $m>0$，$n<0$，ⅰ）若 $kcm-a_{11}q>0$，则种群 $x(t)$ 平均持续生存，种群 $z(t)$ 弱平均持续生存，种群 $y(t)$ 灭绝，ⅱ）若 $kcm-a_{11}q<0$，则种群 $x(t)$ 平均持续生存，种群 $y(t),z(t)$ 灭绝；3）若 $n>0$ 且 $a_{22}m+bn>0$，$kc(a_{22}m+bn)-a_{11}a_{22}q>0$，无论 m 值的正负，均有种群 $y(t)$ 平均持续生存，种群 $x(t),z(t)$ 弱平均持续生存。

证明 1）对 $\ln x(t),\ln y(t),\ln z(t)$ 运用伊藤公式，有 $\mathrm{d}\ln x(t)=(r_1-a_{11}x+by-cz/(1+x)-\sigma_1^2/2)\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)$，两边从 0 到 t 积分得：

$$\ln x(t)-\ln x(0)=(r_1-\sigma_1^2/2)t-a_{11}\int_0^t x\mathrm{d}t+b\int_0^t y\mathrm{d}t-c\int_0^t z/(1+x)\mathrm{d}t+\sigma_1B_1(t),\tag{8}$$

同理有

$$\ln y(t)-\ln y(0)=(r_2-\sigma_2^2/2)t-a_{22}\int_0^t y\mathrm{d}t+\sigma_2B_2(t),\tag{9}$$

$$\ln z(t)-\ln z(0)=(-d-\sigma_3^2/2)t-a_{33}\int_0^t z\mathrm{d}t+kc\int_0^t x/(1+x)\mathrm{d}t+\sigma_3B_3(t)。\tag{10}$$

由定理 5 的结论可知，当 $r_2-\sigma_2^2/2<0$，则 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$，a. s.，即种群 $y(t)$ 是灭绝的。则对任意的 $\varepsilon_2>0$，存在 $k_2>0$，使得当 $t\geqslant k_2$ 时，有

$$-\varepsilon_2\leqslant y(t)\leqslant\varepsilon_2。\tag{11}$$

将式（8）两边同除以 t 并移项得

$$t^{-1}\ln x(t)=t^{-1}\ln x(0)+(r_1-\sigma_1^2/2)-t^{-1}a_{11}\int_0^t x\mathrm{d}t+t^{-1}b\int_0^t y\mathrm{d}t-t^{-1}c\int_0^t z/(1+x)\mathrm{d}t+t^{-1}\sigma_1B_1(t)。\tag{12}$$

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}t^{-1}\ln x(0)=0$，由极限定义，对任意的 $\varepsilon_3>0$，存在 $k_3>0$，使得当 $t\geqslant k_3$ 时，有

$$-\varepsilon_3\leqslant t^{-1}\ln x(0)\leqslant\varepsilon_3,\tag{13}$$

将式（11）和式（13）代入式（12）并放缩得

$$t^{-1}\ln x(t)\leqslant\varepsilon_3+(r_1-\sigma_1^2/2)+b\varepsilon_2-t^{-1}a_{11}\int_0^t x\mathrm{d}t+t^{-1}\sigma_1B_1(t)。\tag{14}$$

当 $r_1-\sigma_1^2/2<0$ 时，存在任意小的 $\varepsilon_2>0$，$\varepsilon_3>0$，使得 $\varepsilon_3+(r_1-\sigma_1^2/2)+b\varepsilon_2<0$ 成立，则由引理 1 可得 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$，a. s.，由极限定义得：种群 $x(t)$ 是灭绝的。则对任意的 $\varepsilon_4>0$，存在

$k_4>0$,使得当 $t\geqslant k_4$ 时，有

$$-\varepsilon_4\leqslant x(t)\leqslant\varepsilon_4, \tag{15}$$

将式（10）两边同除以 t 并移项、放缩得：

$$t^{-1}\ln z(t)\leqslant t^{-1}\ln z(0)+(-d-\sigma_3^2/2)-t^{-1}a_{33}\int_0^t z\mathrm{d}t+t^{-1}kc\int_0^t x\mathrm{d}t+t^{-1}\sigma_3B_3(t)。 \tag{16}$$

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}t^{-1}\ln z(0)=0$，则对任意的 $\varepsilon_5>0$，存在 $k_5>0$，使得当 $t\geqslant k_5$ 时，有

$$-\varepsilon_5\leqslant t^{-1}\ln z(0)\leqslant\varepsilon_5, \tag{17}$$

将式（15）和式（17）代入式（16）可得：$t^{-1}\ln z(t)\leqslant\varepsilon_5-(d+\sigma_3^2/2)+kc\varepsilon_4-t^{-1}a_{33}\int_0^t z\mathrm{d}t+t^{-1}\sigma_3B_3(t)$，则存在任意小的 $\varepsilon_4\to0$，$\varepsilon_5\to0$，使得 $\varepsilon_5-(d+\sigma_3^2/2)+kc\varepsilon_4\to-(d+\sigma_3^2/2)<0$ 成立，则由引理 1 可得 $\lim\limits_{t\to+\infty}z(t)=0$，a. s.，即种群 $z(t)$ 是灭绝的。

2）由 1）的证明可知，当 $r_2-\sigma_2^2/2<0$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$，即种群 $y(t)$ 灭绝。并且对任意小的 $\varepsilon_2>0$，$\varepsilon_3>0$，由式（8）知：$t^{-1}\ln x(t)\leqslant\varepsilon_3+(r_1-\sigma_1^2/2)+b\varepsilon_2-t^{-1}a_{11}\int_0^t x\mathrm{d}t+t^{-1}\sigma_1B_1(t)$，$t^{-1}\ln x(t)\geqslant-\varepsilon_3+(r_1-\sigma_1^2/2)-b\varepsilon_2-t^{-1}a_{11}\int_0^t x\mathrm{d}t+t^{-1}\sigma_1B_1(t)$。当 $r_1-\sigma_1^2/2>0$ 时，存在任意小的 $\varepsilon_2>0$，$\varepsilon_3>0$，有 $\varepsilon_3+(r_1-\sigma_1^2/2)+b\varepsilon_2>0$ 且 $-\varepsilon_3+(r_1-\sigma_1^2/2)-b\varepsilon_2>0$ 成立。由引理 1 得：$\langle x(t)\rangle^*\leqslant-\varepsilon_3/a_{11}+(r_1-\sigma_1^2/2)/a_{11}-b\varepsilon_2/a_{11}$，$\langle x(t)\rangle_*\geqslant\varepsilon_3/a_{11}+(r_1-\sigma_1^2/2)/a_{11}+b\varepsilon_2/a_{11}$。令 $\varepsilon_2\to0$，$\varepsilon_3\to0$，有：$\langle x(t)\rangle^*\leqslant(r_1-\sigma_1^2/2)/a_{11}$，$\langle x(t)\rangle_*\geqslant(r_1-\sigma_1^2/2)/a_{11}$，即 $\langle x(t)\rangle_t=(r_1-\sigma_1^2/2)/a_{11}$ a. s.，即种群 $x(t)$ 是平均持续生存的。则对任意的 $\varepsilon_6>0$，存在 $k_6>0$，使得当 $t\geqslant k_6$ 时，有 $(r_1-\sigma_1^2/2)/a_{11}-\varepsilon_6\leqslant t^{-1}\int_0^t x\mathrm{d}t\leqslant(r_1-\sigma_1^2/2)/a_{11}+\varepsilon_6$。对任意小的 $\varepsilon_5>0$，$\varepsilon_6>0$，由式（10）知：$t^{-1}\ln z(t)\leqslant t^{-1}\ln z(0)+(-d-\sigma_3^2/2)-t^{-1}a_{33}\int_0^t z\mathrm{d}t+t^{-1}kc\int_0^t x\mathrm{d}t+t^{-1}\sigma_3B_3(t)\leqslant\varepsilon_5-(d+\sigma_3^2/2)+kc((r_1-\sigma_1^2/2)/a_{11}+\varepsilon_6)-t^{-1}a_{33}\int_0^t z\mathrm{d}t+t^{-1}\sigma_3B_3(t)$。

ⅰ）当 $[kc(r_1-\sigma_1^2/2)-a_{11}(d+\sigma_3^2/2)]/(a_{11}a_{33})>0$ 时，存在 $\varepsilon_5>0$，$\varepsilon_6>0$，使得 $\varepsilon_5-(d+\sigma_3^2/2)+kc((r_1-\sigma_1^2/2)/a_{11}+\varepsilon_6)>0$。令 $\varepsilon_5\to0$，$\varepsilon_6\to0$，由引理 1 知 $\langle z(t)\rangle^*\leqslant[kc(r_1-\sigma_1^2/2)-a_{11}(d+\sigma_3^2/2)]/(a_{11}a_{33})$，a. s.，即种群 $z(t)$ 是弱平均持续生存的。

ⅱ）当 $[kc(r_1-\sigma_1^2/2)-a_{11}(d+\sigma_3^2/2)]/(a_{11}a_{33})<0$ 时，存在 $\varepsilon_5>0$，$\varepsilon_6>0$，使得 $\varepsilon_5-(d+\sigma_3^2/2)+kc((r_1-\sigma_1^2/2)/a_{11}+\varepsilon_6)<0$。令 $\varepsilon_5\to0$，$\varepsilon_6\to0$，由引理 1 知 $\lim\limits_{t\to+\infty}z(t)=0$，a. s.，即种群 $z(t)$ 是灭绝的。

3）由定理 5 知，当 $r_2-\sigma_2^2/2>0$ 时，$\langle y(t)\rangle_t=(r_2-\sigma_2^2/2)/a_{22}$，即种群 $y(t)$ 是平均持续生存的。则对任意的 $\varepsilon_7>0$，存在 $k_7>0$，使得当 $t\geqslant k_7$ 时，有

$$t^{-1}\int_0^t y\mathrm{d}t\leqslant(r_2-\sigma_2^2/2)/a_{22}+\varepsilon_7。 \tag{18}$$

由式（8）、式（13）、式（18）可知，$t^{-1}\ln x(t)\leqslant\varepsilon_3+(r_1-\sigma_1^2/2)+b((r_2-\sigma_2^2/2)/a_{22}+\varepsilon_7)-t^{-1}a_{11}\int_0^t x\mathrm{d}t+t^{-1}\sigma_1B_1(t)$。当 $[b(r_2-\sigma_2^2/2)+a_{22}(r_1-\sigma_1^2/2)]/(a_{11}a_{22})>0$ 时，令 $\varepsilon_3\to0$，$\varepsilon_7\to0$，有 $\langle x(t)\rangle^*=[b(r_2-\sigma_2^2/2)+a_{22}(r_1-\sigma_1^2/2)]/(a_{11}a_{22})$，即种群 $x(t)$ 是弱平均持续生存的。则对任意的 $\varepsilon_8>0$，存在 $k_8>0$，使得当 $t\geqslant k_8$ 时，有

$$t^{-1}\int_0^t x\mathrm{d}t\leqslant[b(r_2-\sigma_2^2/2)+a_{22}(r_1-\sigma_1^2/2)]/(a_{11}a_{22})+\varepsilon_8, \tag{19}$$

由式（16）、式（17）、式（19）可知：$t^{-1}\ln z(t) \leqslant \varepsilon_5 - (d + \sigma_3^2/2) + kc\{[b(r_2 - \sigma_2^2/2) + a_{22}(r_1 - \sigma_1^2/2)]/(a_{11}a_{22}) + \varepsilon_8\} - t^{-1}a_{33}\int_0^t z\mathrm{d}t + t^{-1}\sigma_3 B_3(t)$，当 $[kc(b(r_2 - \sigma_2^2/2) + a_{22}(r_1 - \sigma_1^2/2)) - a_{11}a_{22}(d + \sigma_3^2/2)]/(a_{11}a_{22}a_{33}) > 0$ 时，令 $\varepsilon_5 \to 0$，$\varepsilon_8 \to 0$，有 $\langle z(t)\rangle^* = [kc(b(r_2 - \sigma_2^2/2) + a_{22}(r_1 - \sigma_1^2/2)) - a_{11}a_{22}(d + \sigma_3^2/2)]/(a_{11}a_{22}a_{33})$，即种群 $z(t)$ 是弱平均持续生存的。

推论 2 由定理 6 的 3）知，当 $n = r_2 - \sigma_2^2/2 > 0$、$m = r_1 - \sigma_1^2/2 < 0$、偏利系数 $b = 0$ 时，种群 $x(t)$ 灭绝；当 $n = r_2 - \sigma_2^2/2 > 0$、$m = r_1 - \sigma_1^2/2 < 0$、偏利系数 $0 < b < -a_{22}(r_1 - \sigma_1^2/2)/(r_2 - \sigma_2^2/2)$ 时，种群 $x(t)$ 灭绝；当 $n = r_2 - \sigma_2^2/2 > 0$、$m = r_1 - \sigma_1^2/2 < 0$、偏利系数 $b > -a_{22}(r_1 - \sigma_1^2/2)/(r_2 - \sigma_2^2/2)$ 时，种群 $x(t)$ 持续生存。因此可知偏惠系数 b 对种群 $x(t)$ 的影响。

定理 7 如果 $2a_{11}d/(kc - d) < \Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4a_{11}(\Delta + a_{11})}$，其中 $\Delta = br_2/a_{22} + r_1 - a_{11}$，且 $\alpha = a_{11}(1 + x^*) - cz^* - b(1 + x^*)/(2\epsilon) - c(k + (1 + x^*))/(2\epsilon) > 0$，$\beta = a_{22} - b(1 + x^*)\epsilon/2 > 0$，$\gamma = a_{33}(1 + x^*) - c(k + (1 + x^*))\epsilon/2 > 0$，$\delta = \sigma_1^2 x^*(1 + x^*)/2 + \sigma_2^2 y^*/2 + \sigma_3^2 z^*(1 + x^*)/2 > 0$，并满足：$\delta < \min\{\alpha(x^*)^2, \beta(y^*)^2, \gamma(z^*)^2\}$，其中 (x^*, y^*, z^*) 是与系统（2）相对应的确定性系统的正平衡态，则随机模型（2）的任意具有正初值的解 $(x(t), y(t), z(t))$ 存在平稳分布 $\mu(\cdot)$，并且 $\mu(\cdot)$ 具有遍历性。

证明 由于 $2a_{11}d/(kc - d) < \Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4a_{11}(\Delta + a_{11})}$，其中 $\Delta = br_2/a_{22} + r_1 - a_{11}$ 成立，则与系统（2）相对应的确定性系统存在正平衡态，则 (x^*, y^*, z^*) 满足如下条件

$$\begin{cases} r_1 = a_{11}x^* - by^* + cz^*/(1 + x^*), \\ r_2 = a_{22}y^*, \\ -d = a_{33}z^* - kcx^*/(1 + x^*), \end{cases} \tag{20}$$

成立。

构造函数 $V(X) = (1 + x^*)(x - x^* - x^*\ln(x/x^*)) + (y - y^* - y^*\ln(y/y^*)) + (1 + x^*)(z - z^* - z^*\ln(z/z^*))$，显然 $V(X)$ 是正定函数。

沿着系统（2）的解求随机微分，$\mathrm{d}V(X) = (1 + x^*)(x - x^*)[(r_1 - a_{11}x + by - cz/(1 + x))\mathrm{d}t + \sigma_1\mathrm{d}B_1(t)] + (\sigma_1^2 x^*(1 + x^*)/2)\mathrm{d}t + (y - y^*)[(r_2 - a_{22}y)\mathrm{d}t + \sigma_2\mathrm{d}B_2(t)] + (\sigma_2^2 y^*/2)\mathrm{d}t + (1 + x^*)(z - z^*)[(-d - a_{33}z + kcx/(1 + x))\mathrm{d}t + \sigma_3\mathrm{d}B_3(t)] + (\sigma_3^2 z^*(1 + x^*)/2)\mathrm{d}t$，将式（20）代入上式可知，$\mathrm{d}V(X) = LV(X)\mathrm{d}t + (1 + x^*)(x - x^*)\sigma_1\mathrm{d}B_1(t) + (y - y^*)\sigma_2\mathrm{d}B_2(t) + (1 + x^*)(z - z^*)\sigma_3\mathrm{d}B_3(t)$，其中，$LV(X) = -a_{11}(1 + x^*)(x - x^*)^2 + b(1 + x^*)(x - x^*)(y - y^*) + \sigma_1^2 x^*(1 + x^*)/2 + (cz^*(x - x^*)^2 - c(1 + x^*)(x - x^*)(z - z^*))/(1 + x) - a_{22}(y - y^*)^2 + \sigma_2^2 y^*/2 - a_{33}(1 + x^*)(z - z^*)^2 + kc(x - x^*)(z - z^*)/(1 + x) + \sigma_3^2 z^*(1 + x^*)/2$。

由于不等式 $(cz^*(x - x^*)^2 - c(1 + x^*)(x - x^*)(z - z^*))/(1 + x) \leqslant (cz^*(x - x^*)^2 + c(1 + x^*)|x - x^*||z - z^*|)/(1 + x) \leqslant cz^*(x - x^*)^2 + c(1 + x^*)|x - x^*||z - z^*|$ 和不等式 $kc(x - x^*)(z - z^*)/(1 + x) \leqslant kc|x - x^*||z - z^*|$ 成立，且由杨氏不等式[17]：$|x - x^*||y - y^*| \leqslant [(x - x^*)^2/(2\epsilon) + \epsilon(y - y^*)^2/2]$，$|x - x^*||z - z^*| \leqslant [(x - x^*)^2/(2\epsilon) + \epsilon(z - z^*)^2/2]$，则有：$LV(X) \leqslant -(a_{11}(1 + x^*) - cz^*)(x - x^*)^2 + b(1 + x^*)[(x - x^*)^2/(2\epsilon) + \epsilon(y - y^*)^2/2] - a_{22}(y - y^*)^2 - a_{33}(1 + x^*)(z - z^*)^2 + c(k + (1 + x^*))[(x - x^*)^2/(2\epsilon) + \epsilon(z - z^*)^2/2] + \sigma_1^2 x^*(1 + x^*)/2 + \sigma_2^2 y^*/2 + \sigma_3^2 z^*(1 + x^*)/2 \leqslant -\alpha(x - x^*)^2 - \beta(y - y^*)^2 - \gamma(z - z^*)^2 + \delta$，其中常数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 分别为：$\alpha = a_{11}(1 + x^*) - cz^* - b(1 + x^*)/(2\epsilon) - c(k + (1 + x^*))/(2\epsilon)$，$\beta = a_{22} - b(1 + x^*)\epsilon/2$，$\gamma = a_{33}(1 + x^*) - c(k + (1 + x^*))\epsilon/2$，$\delta = \sigma_1^2 x^*(1 + x^*)/2 + \sigma_2^2 y^*/2 + \sigma_3^2 z^*(1 + x^*)/2$。若 δ 满足 $\delta < \min\{\alpha(x^*)^2, \beta(y^*)^2, \gamma(z^*)^2\}$，则这个椭球体 $\alpha(x - x^*)^2 + \beta(y - y^*)^2 + \gamma(z - z^*)^2 = \delta$ 在 R_+^3 中，任作该椭球体的一邻

域 U，使得 $\bar{U}\subseteq R_+^3$，$\bar{U}$ 是 U 的闭包，则对于任意的 $(x,y,z)\in R_+^3\setminus U$ 时，都有 $LV<0$。

另外，由系统（2），$\mathrm{d}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(r_1-a_{11}x+by-cz/(1+x))\\y(r_2-a_{22}y)\\z(-d-a_{33}z+kcx/(1+x))\end{pmatrix}\mathrm{d}t+\begin{pmatrix}\sigma_1 x(t)\\0\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}B_1(t)+\begin{pmatrix}0\\\sigma_2 y(t)\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}B_2(t)+\begin{pmatrix}0\\0\\\sigma_3 z(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}B_3(t)$，可知其扩散矩阵为：$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\begin{pmatrix}\sigma_1^2x^2(t)&0&0\\0&\sigma_2^2y^2(t)&0\\0&0&\sigma_3^2z^2(t)\end{pmatrix}$。

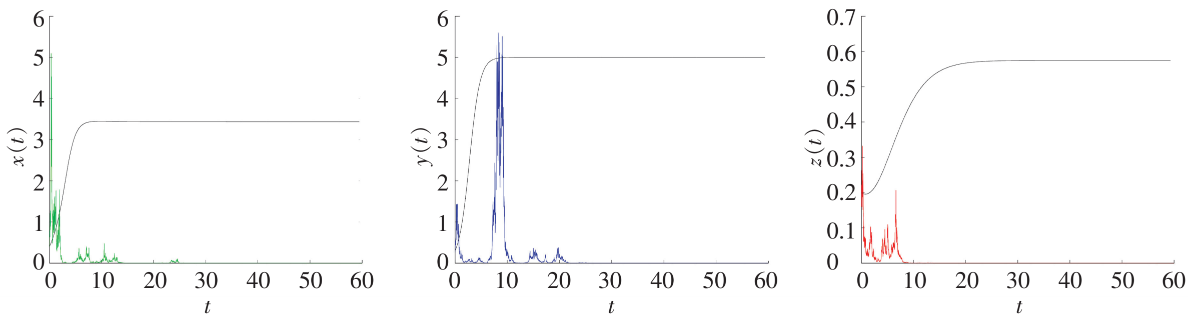
当 $(x,y,z)\in\bar{U}$ 时，记 $M=\min\{\sigma_1^2x^2(t),\sigma_2^2y^2(t),\sigma_3^2z^2(t)\}$，则 $M>0$ 且对任意的 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in R_+^3$，有 $\sum_{i,j=1}^{3}(a_{i,j}\varepsilon_i\varepsilon_j)=\sigma_1^2x^2\xi_1^2+\sigma_2^2y^2\xi_2^2+\sigma_3^2z^2\xi_3^2\geqslant M|\xi|^2$ 对所有的 $(x,y,z)\in\bar{U}$，$\xi\in R_+^3$ 成立。由引理 2 知，随机模型（2）的任意具有正初值的解 $(x(t),y(t),z(t))$ 存在平稳分布 $\mu(\cdot)$，并且 $\mu(\cdot)$ 具有遍历性。

3　数值模拟

为验证结果的正确性，对定理 6 的结果进行数值模拟。

取 $r_1=1,r_2=1,d=0.1,a_{11}=1,a_{22}=0.2,a_{33}=0.5,a=0.3,b=0.5,c=0.5,k=1$，并取系统（2）的初始值为 $(0.4,0.3,0.2)$，则有：

1）当 $\sigma_1=2,\sigma_2=1.5,\sigma_3=1.4$ 时，则 $m=r_1-\sigma_1^2/2<0$，$n=r_2-\sigma_2^2/2<0$，由定理 6 的 1）知，种群 $x(t),y(t),z(t)$ 均灭绝，见图 1。



a) $x(t)$　　b) $y(t)$　　c) $z(t)$

说明：彩色曲线代表系统(2)的解，黑色线代表其相应的确定性模型的解。

Notes: The color line represent the solution of system(2), and the black line represent the solution of the corresponding deterministic system.

图 1　系统(2)及相应的确定性模型在初值为(0.4,0.3,0.2)且 σ_1=2,σ_2=1.5,σ_3=1.4 下的时间序列图

Fig.1　Sample path of system(2) and its corresponding deterministic system with initial value (0.4,0.3,0.2) and σ_1=2,σ_2=1.5,σ_3=1.4

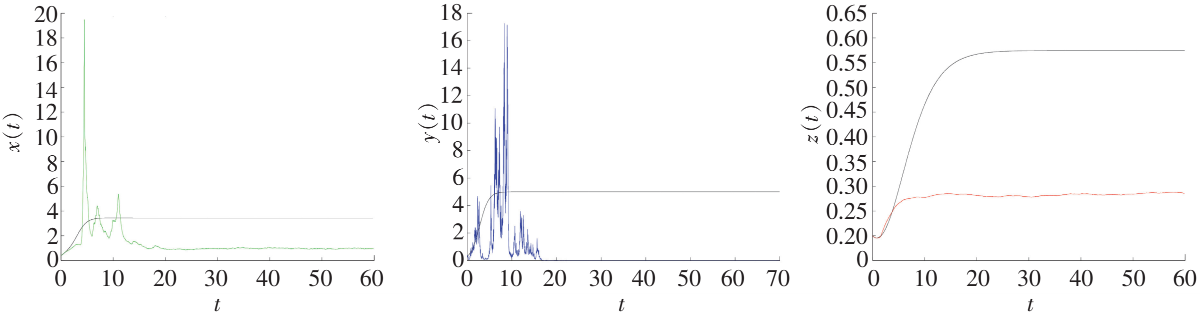
2）当 $\sigma_1=0.04,\sigma_2=1.5,\sigma_3=0.015$ 时，则 $m=r_1-\sigma_1^2/2>0$，$n=r_2-\sigma_2^2/2<0$，$kc(r_1-\sigma_1^2/2)-a_{11}(d+\sigma_3^2/2)>0$，由定理 5 的 2）知，种群 $x(t),z(t)$ 持续生存，种群 $y(t)$ 灭绝，见图 2。

3）当 $\sigma_1=0.04,\sigma_2=1.5,\sigma_3=1.4$ 时，则 $m=r_1-\sigma_1^2/2>0$，$n=r_2-\sigma_2^2/2<0$，$kc(r_1-\sigma_1^2/2)-a_{11}(d+\sigma_3^2/2)<0$，由定理 5 的 2）知，种群 $x(t)$ 持续生存，种群 $y(t),z(t)$ 灭绝，见图 3。

4）当 $\sigma_1=0.38,\sigma_2=0.3,\sigma_3=0.07$ 时，则 $n=r_2-\sigma_2^2/2>0$，$a_{22}(r_1-\sigma_1^2/2)+b(r_2-\sigma_2^2/2)>0$，$kc(a_{22}(r_1-\sigma_1^2/2)+b(r_2-\sigma_2^2/2))-a_{11}a_{22}(d+\sigma_3^2/2)>0$，由定理 6 的 3）知，种群 $x(t),y(t)$，$z(t)$ 是均是持续生存的，见图 4。

由图 1，当环境噪声 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 都较大时，会使得三种群 $x(t)$、$y(t)$、$z(t)$ 很快地趋于灭绝；由图 2，σ_2 不变，σ_1，σ_3 较小时，种群 $y(t)$ 趋于灭绝，但是种群 $x(x)$，$z(t)$ 会持续生存；由图 3，

σ_2，σ_3 不变，σ_1 较小时，种群 $y(t)$，$z(t)$ 趋于灭绝，但是种群 $x(x)$ 会持续生存；由图 4，当 σ_1，σ_2，σ_3 都很小时，种群 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 相对缓慢减少，并会持续生存。由此可知，随机扰动对种群的生存与灭绝扮演着重要的角色，大的随机扰动会使得种群灭绝。



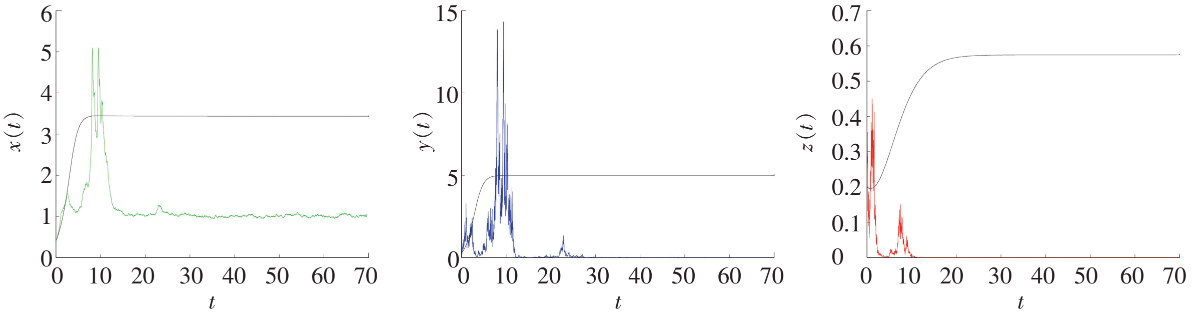
a) $x(t)$　　b) $y(t)$　　c) $z(t)$

说明：彩色曲线代表系统(2)的解，黑色线代表其相应的确定性模型的解。

Notes: The color line represent the solution of system(2),and the black line represent the solution of the corresponding deterministic system.

图 2　系统(2)及相应的确定性模型在初值为(0.4,0.3,0.2)且 σ_1=0.04,σ_2=1.5,σ_3=0.015 下的时间序列图

Fig.2　Sample path of system(2) and its corresponding deterministic system with initial value (0.4,0.3,0.2) and σ_1=0.04,σ_2=1.5,σ_3=0.015



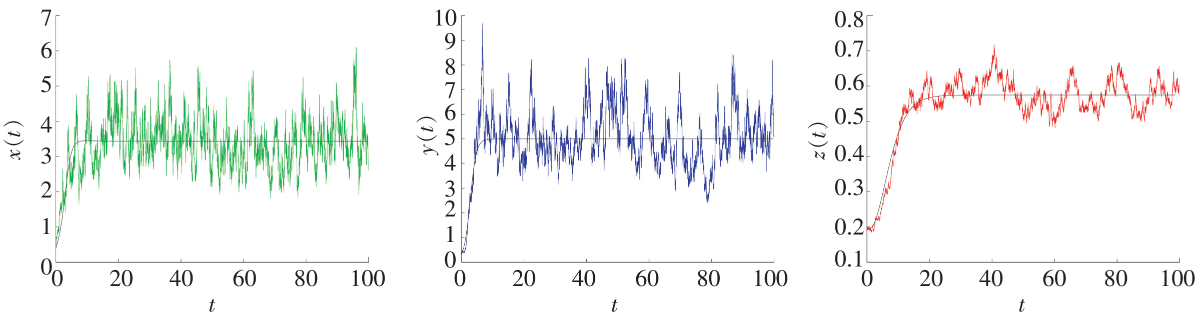
a) $x(t)$　　b) $y(t)$　　c) $z(t)$

说明：彩色曲线代表系统(2)的解，黑色线代表其相应的确定性模型的解。

Notes: The color line represent the solution of system(2),and the black line represent the solution of the corresponding deterministic system.

图 3　系统(2)及相应的确定性模型在初值为(0.4,0.3,0.2)且 σ_1=0.04,σ_2=1.5,σ_3=1.4 下的时间序列图

Fig.3　Sample path of system(2)and its corresponding deterministic system with initial value (0.4,0.3,0.2) and σ_1=0.04,σ_2=1.5,σ_3=1.4



a) $x(t)$　　b) $y(t)$　　c) $z(t)$

说明：彩色曲线代表系统(2)的解，黑色线代表其相应的确定性模型的解。

Notes: The color line represent the solution of system(2),and the black line represent the solution of the corresponding deterministic system.

图 4　系统(2)及相应的确定性模型在初值为(0.4,0.3,0.2)且 σ_1=0.38,σ_2=0.3,σ_3=0.07 下的时间序列图

Fig.4　Sample path of system(2) and its corresponding deterministic system with initial value (0.4,0.3,0.2) and σ_1=0.38,σ_2=0.3,σ_3=0.07

4　结论

本文讨论了具有偏利关系的随机三种群模型。通过构造适当的 Liapunov 函数并运用伊藤公式，证明了系统全局正解的存在唯一性、均值有界性，给出了种群灭绝与平均持续生存的充分条件，并证明了平稳分布的存在性。最后通过数值模拟验证结果的正确性，得到以下结论。随机扰动对种群的生存与灭绝扮演着重要的角色，当环境噪声较大时，会使得种群 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 更快地趋于灭绝；当噪声强度较小时，种群 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 相对缓慢减少，并会持续生存，且在一定条件下，随机模型（2）的任意具有正初值的解 $(x(t),y(t),z(t))$ 存在平稳分布 $\mu(\cdot)$，并且 $\mu(\cdot)$ 具有遍历性。

［参考文献］

［1］XIAO D M，RUAN S G. Global dynamical of a ratio-dependent predator-prey system［J］. Journal of Mathematical Biology，2001，43：268-290. DOI:10.1007/S002850100097.

［2］陈兰荪. 数学生态模型与研究方法［M］. 北京：科学出版社，1991.

［3］CHEN F D. Permanence of a discrete *n*-species cooperation system with time delays and feedback controls［J］. Applied Mathematics and Computation，2007，186(1)：23-29. DOI:10.1016/j.ame.2006.07.084.

［4］XU S H. Dynamics of a general prey predator model with prey-stage structure and diffusive effects［J］. Computers and Mathematics with Applications，2014，68(3)：405-423. DOI:10.1016/j.camwa.2014.06.016.

［5］陈凤德，谢向东. 合作种群模型动力学行为研究［M］. 北京：科学出版社，2014.

［6］TAKEUCHI Y. Global dynamical properties of Lotka-Volterrac systems［M］. Singapore：Word Scientific，1996：14.

［7］刘会民，刘兵. 三种群竞争系统的持久性［J］. 生物数学学报，2001，16(1)：46-53.

［8］李石英，张树文. 食饵具有偏利合作关系的捕食-食饵系统的定性分析［J］. 集美大学学报（自然科学版），2016，21(3)：234-235.

［9］吕敬亮. 几种随机生物种群模型性质的研究［D］. 哈尔滨：哈尔滨工业大学，2011.

［10］ZHAO D L，YUAN S L. Dynamics of the stochastic Leslie-Gower predator-prey system with randomized intrinsic growth rate［J］. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，2016，461(1)：419-428. DOI:10.1016/j.physa.2016.06.010.

［11］JIANG D Q，ZUO W J，TASAWAR H，et al. Stationary distribution and periodic solutions for stochastic Holling-Leslie predator-prey systems［J］. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，2016，460(15)：16-28. DOI:10.1016/j.physa.2016.04.037.

［12］LIU Q，ZU L，JIANG D Q. Dynamics of stochastic predator-prey models with Holling Ⅱ functional response［J］. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2016，37：62-76. DOI:10.1016/j.cnsns.2016.01.005.

［13］ZUO W J，JIANG D Q. Stationary distribution and periodic solution for stochastic predatorprey systems with nonlinear predator harvesting［J］. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2016，36：65-68. DOI:10.1016/j.cnsns.2015.11.014.

［14］王克. 随机生物数学模型［M］. 北京：科学出版社，2010：16-22.

［15］LIU M，WANG K. Survival analysis of a stochastic cooperation system in a polluted environment［J］. Journal of Biological Systems，2011，19：183-204. DOI:10.1142/S0218339011003877.

［16］KHASMINSKⅡ R. Stochastic stability of differential equations［M］. Berlin：Spring-Verlag，2012.

［17］PATHA SARATHI M，BANERJEE M. Stochastic persistence and stationary distribution in a Holling-Tanner type prey-predator model［J］. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，2012，391(4)：1216-1233. DOI:10.1016/j.physa.2011.10.019.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）