第 23 卷　第 4 期
2018 年 7 月
集美大学学报（自然科学版）
Journal of Jimei University(Natural Science)
Vol. 23　No. 4
Jul. 2018

[文章编号] 1007－7405(2018)04－0305－07　　DOI:10.19715/j.jmuzr.2018.04.010

具分布时滞和脉冲的 BAM 神经网络的全局指数稳定性

陈　超

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 讨论一类具有连续分布时滞和脉冲影响的双向联想记忆（bidirectional associative memory，BAM）神经网络，通过 M－矩阵、谱理论以及建立脉冲时滞微分不等式，得到系统平衡点的存在唯一性及全局指数稳定性的充分判别条件。最后，给出一个实例，说明结论的可行性和有效性。

[关键词] BAM 神经网络；连续分布时滞；全局指数稳定性

[中图分类号] O 175

Exponential Stability of BAM Neural Networks with Impulsive and Continuously Distributed Delays

CHEN Chao

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, the global exponential stability of a bidirectional associative memory (BAM) neural networks with impulses and continuously distributed delays were investigated. By using M-matrix, spectral theory and establishing an impulsive delay differential inequality, some new sufficient conditions for the existence and global exponential stability of the considered system were obtained. Finally, an example was given to illustrate the feasibility and effectiveness of the conclusion.

Keywords: BAM neural networks; continuously distributed delays; exponential stability

0　引言

联想记忆神经网络模型是一类常用的神经元网络，具有信息记忆和信息联想的特点。文献［1］将单层联想记忆神经网络推广到双层双向结构，建立了双向联想记忆（bidirectional associative memory，BAM）网络。近年来，由于神经网络在模式识别、自动控制以及组合优化等领域中的广泛应用，它已经成为国内外学者的研究热点之一。BAM 神经网络可以用下面的常微分方程来表示：

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} c_{ij} f_j(y_j(t)) + r_i, \\ \dot{y}_j(t) = -y_j(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} d_{ji} g_i(x_i(t)) + s_j。\end{cases} \tag{1}$$

考虑到神经网络中无处不在的时滞性，文献［2］在 BAM 神经网络中引入了时滞的情况，研究了下面的时滞微分方程：

[收稿日期] 2018－03－26　　[修回日期] 2018－04－22
[基金项目] 国家自然科学基金项目（61573005）
[作者简介] 陈超（1978—），男，讲师，硕士，从事常微分方程研究。

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=-a_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{m}c_{ij}f_j(y_j(t-\tau_{ij}))+r_i,\\ \dot{y}_j(t)=-b_jy_j(t)+\sum_{i=1}^{n}d_{ji}g_i(x_i(t-\sigma_{ij}))+s_j。\end{cases}\tag{2}$$

文献［3－9］研究了含时滞的 BAM 神经网络的稳定性问题。

由于在电子网络实现过程中，经常出现频率变化和开关转换，这必将引起系统状态出现瞬动，即脉冲现象。甚至为了控制网络的动态行为，人们还施加脉冲效应来达到控制的目的。因此，考虑 BAM 神经网络的脉冲效应是有必要并具有实际价值的。然而，少有学者考虑到具有连续分布时滞和脉冲的 BAM 神经网络平衡点的全局指数稳定性。本文受到文献［10－14］的启发，讨论了具有连续分布时滞和非线性脉冲的 BAM 神经网络的稳定性问题。

1 预备知识

考虑如下具有连续分布时滞和非线性脉冲的 BAM 神经网络模型：

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=-\rho_i(x_i(t))+\sum_{j=1}^{m}c_{ij}f_j(y_j(t))+\sum_{j=1}^{m}\tilde{\alpha}_{ij}\int_0^{\infty}K_{ij}^{(1)}f_j(y_j(t-s))\mathrm{d}s+r_i,t\geqslant 0,t\neq t_k,\\ \Delta x_i(t_k)=I_i(x_i(t_k))=p_ix_i(t_k^-)+\sum_{j=1}^{m}\tilde{\gamma}_{ij}\int_0^{\infty}K_{ij}^{(2)}(s)h_j(y_j(t_k^--s))\mathrm{d}s,\quad i\in\Lambda_1,k=1,2,\cdots,\\ \dot{y}_j(t)=-\vartheta_j(y_j(t))+\sum_{i=1}^{n}d_{ji}g_i(x_i(t))+\sum_{i=1}^{n}\tilde{\beta}_{ji}\int_0^{\infty}N_{ji}^{(1)}(s)g_i(x_i(t-s))\mathrm{d}s+s_j,t\geqslant 0,t\neq t_k,\\ \Delta y_j(t_k)=J_j(y_j(t_k))=q_jy_j(t_k^-)+\sum_{i=1}^{n}\tilde{\delta}_{ji}\int_0^{\infty}N_{ji}^{(2)}(s)\omega_i(x_i(t_k^--s))\mathrm{d}s,j\in\Lambda_2,k=1,2,\cdots,\end{cases}\tag{3}$$

其中：$\Lambda_1=\{1,2,\cdots,n\}$，$\Lambda_2=\{1,2,\cdots,m\}$；$x_i$ 和 y_j 分别是第 i 个和第 j 个神经元的状态；$c_{ij},d_{ji},\tilde{\alpha}_{ij},\tilde{\beta}_{ji}$ 是神经元互连的突触的权值；r_i,s_j 为外部输入，g_i,ω_i,f_j,h_j $(i\in\Lambda_1,j\in\Lambda_2)$ 是信号传递函数；$t_k(k\in Z)$ 为脉冲发生时刻，$t_k<t_{k+1}$，$\lim_{k\to\infty}t_k=\infty$；而 $\Delta x_i(t_k)$ 为第 i 个神经元在脉冲时刻 t_k 发生的瞬时脉冲增量。

系统（3）还满足下面的初始条件：$x_i(s)=\varphi_i(s)$，$s\in(-\infty,0]$，$i\in\Lambda_1$，$y_j(s)=\psi_j(s)$，$s\in(-\infty,0]$，$j\in\Lambda_2$，其中 $\varphi_i(t),\psi_j(t)$ 是定义在 $(-\infty,0]$ 上的有界连续函数。

在本文中总是假设：(H_1) $c_{ij},d_{ji},\tilde{\alpha}_{ij},\tilde{\beta}_{ji},r_i,s_j\in\mathbf{R}$，$\rho_i,\vartheta_j:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是可微并且是严格单调递增的，记 $a_i=\inf_{x\in R}\{\dot{\rho}_i(x)\}>0$ 及 $b_j=\inf_{x\in R}\{\dot{\vartheta}_j(x)\}>0$ $(i\in\Lambda_1,j\in\Lambda_2)$；$(\mathrm{H}_2)$ f_j,h_j 和 g_i,ω_i 在 $\mathbf{R}$ 上满足 Lipshitz 条件，即：$|f_j(x)-f_j(y)|\leqslant\beta_j|x-y|$，$|h_j(x)-h_j(y)|\leqslant\delta_j|x-y|$，$\forall x,y\in\mathbf{R}$，$|g_i(x)-g_i(y)|\leqslant\alpha_i|x-y|$，$|\omega_i(x)-\omega_i(y)|\leqslant\gamma_j|x-y|$，$\forall x,y\in\mathbf{R}$；$(\mathrm{H}_3)$ 时滞内核是连续有界的，并且满足 $\int_0^{\infty}K_{ij}^{(l)}(s)\mathrm{d}s=1$，$\int_0^{\infty}N_{ji}^{(l)}(s)\mathrm{d}s=1$，$l=1,2$，$\int_0^{\infty}k(s)\mathrm{e}^{\lambda_0 s}\mathrm{d}s<\infty$。

为了方便，本文引入如下的概念：$\boldsymbol{z}=(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{n+m}$ 表示向量函数，其范数定义为 $\|\boldsymbol{z}\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n+m}|z_i|$，$\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_{n+m})^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{n+m}$；符号 T 表示转置；$\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵；$\boldsymbol{P}\geqslant 0$ 表示非负矩阵。

定义 1 实矩阵 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$ 称为非奇异 M－矩阵，如果 $\boldsymbol{H}$ 满足：$\boldsymbol{H}=\alpha E-\boldsymbol{P}$，$\alpha>0$，$\boldsymbol{P}\geqslant 0$，其中 $\alpha>\rho(\boldsymbol{P})$，$\rho(\boldsymbol{P})$ 为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的谱半径。

定义 2 常向量 $\boldsymbol{z}^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*;y_1^*,y_2^*,\cdots,y_m^*)^{\mathrm{T}}$ 称为系统（3）的平衡点，如果它满足

$$\begin{cases}\rho_i(x_i^*) = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}f_j(y_j^*) + \sum_{j=1}^{m}\tilde{\alpha}_{ij}\int_0^{\infty}K_{ij}^{(1)}(s)f_j(y_j^*)\mathrm{d}s + r_i,\\ p_ix_i^* + \sum_{j=1}^{m}\tilde{\gamma}_{ij}\int_0^{\infty}K_{ij}^{(2)}(s)h_j(y_j^*)\mathrm{d}s = 0, i\in\Lambda_1, j\in\Lambda_2,\\ \vartheta_j(y_j^*) = \sum_{i=1}^{n} d_{ji}g_i(x_i^*) + \sum_{i=1}^{n}\tilde{\beta}_{ji}\int_0^{\infty}N_{ji}^{(1)}(s)g_i(x_i^*)\mathrm{d}s + s_j,\\ q_jy_j^* + \sum_{i=1}^{n}\tilde{\delta}_{ji}\int_0^{\infty}N_{ji}^{(2)}(s)\omega_i(x_i^*)\mathrm{d}s = 0, i\in\Lambda_1, j\in\Lambda_2。\end{cases} \tag{4}$$

定义 3　称系统（3）的平衡点 $\boldsymbol{z}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)^{\mathrm{T}}$ 是全局指数稳定的，如果存在常数 $\lambda > 0$ 和 $M \geqslant 1$，使得对于任意的 $t \geqslant 0$，有 $\{\sum_{i=1}^{n}|x_i(t) - x_i^*| + \sum_{j=1}^{m}|y_j(t) - y_j^*|\} \leqslant M\mathrm{e}^{-\lambda t}\{\sum_{i=1}^{n}\|\varphi_i - x_i^*\| + \sum_{j=1}^{m}\|\psi_j - y_j^*\|\}$。

引理 1[15]　设矩阵 $\boldsymbol{H} = (h_{ij})_{n\times n}$ 的非对角元素是非正的，称 $\boldsymbol{H}$ 为 M－矩阵，如果存在正对角矩阵 $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，使得 $d_ih_{ii} > \sum_{j\neq i}|h_{ij}|d_j$，$i = 1,2,\cdots,n$。

引理 2[16]　设矩阵 $\boldsymbol{H}$ 是 n 阶非负矩阵，并且 $\rho(\boldsymbol{H}) < 1$，则有 $(E_n - \boldsymbol{H})^{-1} \geqslant 0$，其中 $\rho(\boldsymbol{H})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的谱半径。

2　平衡点的存在性及唯一性

定理 1　除了（H_1）～（H_3）成立外，进一步假设 $\rho(\boldsymbol{F}) < 1$，其中：$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{HD}$，$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{A}_{n\times m}\\ \boldsymbol{B}_{m\times n} & \boldsymbol{0}_{m\times m}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; \beta_1, \cdots, \beta_m)$，$\boldsymbol{L} = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n; b_1, \cdots, b_m)$，$\boldsymbol{A} = (|c_{ij}| + |\tilde{\alpha}_{ij}|)_{n\times m}$，$\boldsymbol{B} = (|d_{ji}| + |\tilde{\beta}_{jj}|)_{n\times m}$。那么系统（3）存在唯一的平衡点。

证明　考虑映射 $\Phi: \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^{n+m}$，

$$\begin{cases}\rho_i(\Phi_i(z)) = \sum_{j=1}^{m}c_{ij}f_j(y_j) + \sum_{j=1}^{m}\tilde{\alpha}_{ij}\int_0^{\infty}K_{ij}^{(1)}(s)f_j(y_j)\mathrm{d}s + r_i,\ i\in\Lambda_1,\\ \vartheta_j(\Phi_{n+j}(z)) = \sum_{i=1}^{n}d_{ji}g_i(x_i) + \sum_{i=1}^{n}\tilde{\beta}_{ji}\int_0^{\infty}N_{ji}^{(1)}(s)g_i(x_i)\mathrm{d}s + s_j,\ j\in\Lambda_2,\end{cases} \tag{5}$$

要证明映射 $\Phi: \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^{n+m}$ 在 $\mathbf{R}^{n+m}$ 上有一个平衡点。事实上，对于任意的 $z = (x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{n+m}$，$\bar{z} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n; \bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{n+m}$，由式（5）可得：$|\Phi_i(z) - \Phi_i(\bar{z})| = |\rho_i(\Phi_i(z)) - \rho_i(\Phi_i(\bar{z}))| / |\dot{\rho}_i(\xi_i)| \leqslant \sum_{j=1}^{m}\beta_j(|c_{ij}| + |\tilde{\alpha}_{ij}|)|y_j - \bar{y}_j| / \alpha_i$，其中 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n+m})^{\mathrm{T}}$ 介于 $\Phi(z)$ 与 $\Phi(\bar{z})$ 之间。$|\Phi(z) - \Phi(\bar{z})| = F(|x_1 - \bar{x}_1|, |x_2 - \bar{x}_2|, \cdots, |x_n - \bar{x}_n|; |y_1 - \bar{y}_1|, |y_2 - \bar{y}_2|, \cdots, |y_m - \bar{y}_m|)^{\mathrm{T}}$，$|\Phi^{\eta}(z) - \Phi^{\eta}(\bar{z})| \leqslant F^{\eta}(|z - \bar{z}|_1, |z - \bar{z}|_2, \cdots, |z - \bar{z}|_{n+m})^{\mathrm{T}}$。

由于 $\rho(F) < 1$，有 $\lim_{\eta\to\infty}F^{\eta} = 0$，$F^N = (l_{ij})_{(n+m)\times(n+m)}$，$\sum_{j=1}^{n+m}l_{ij} \leqslant 1, i = 1,2,\cdots,n+m$。所以有：$\|\Phi^N(z) - \Phi^N(\bar{z})\| \leqslant \gamma\|z - \bar{z}\|$。说明映射 $\Phi: \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^{n+m}$ 是一个压缩映射。由不动点原理可知系统（3）存在唯一的平衡点。

3　平衡点的指数稳定性

引理 3　假设 α, β, γ 为正的常数，函数 $f(x)$ 满足下面的脉冲微分不等式

$$\begin{cases} D^+f(t)\leqslant -\alpha f(t)+\beta g(t)+\gamma\int_0^\infty k(s)g(t-s)\mathrm{d}s, t\geqslant t_0, t\neq t_k,\\ f(t_k)\leqslant a_k f(t_k^-)+b_k\int_0^\infty k(s)g(t-s)\mathrm{d}s, k=1,2,\cdots,\\ D^+g(t)\leqslant -\alpha g(t)+\beta f(t)+\gamma\int_0^\infty k(s)f(t-s)\mathrm{d}s, t\geqslant t_0, t\neq t_k,\\ g(t_k)\leqslant a_k g(t_k^-)+b_k\int_0^\infty k(s)g(t-s)\mathrm{d}s, k=1,2,\cdots。\end{cases} \tag{6}$$

进一步假设，1）$\alpha>\beta+\gamma\int_0^\infty k(s)\mathrm{d}s$；2）存在常数 $\lambda>0,\theta>0$，使得 $\prod_{l=1}^{k}\max\{1,a_l+b_l\int_0^\infty k(s)\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s\}\leqslant M\mathrm{e}^{\theta(t_k-t_0)}, k=1,2,\cdots$，其中 λ 满足

$$\lambda\leqslant\alpha-\beta-\gamma\int_0^\infty k(s)\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s, \tag{7}$$

则有

$$H(t)\leqslant M\overline{H}(t_0)\mathrm{e}^{-(\lambda-\theta)(t-t_0)}, t\geqslant t_0, \tag{8}$$

其中，$H(t)=f(t)+g(t)$，$f(t),g(t)\in PC(\mathbf{R},\mathbf{R}_+)$，$k(s)\in PC(\mathbf{R},\mathbf{R}_+)$，$\overline{H}(t_0)=\sup_{s\in(-\infty,t_0]}H(s)<\infty$。

证明 为了证明式（8）成立，需要先证明当 $t\in[t_{k-1},t_k)$ 时，有 $H(t)\leqslant\overline{H}(t_0)(\prod_{l=1}^{k}\max\{1,a_l+b_l\int_0^\infty k(s)\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s\})\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}, k=1,2,\cdots$，其中 $a_0=1,b_0=0$。

首先，由 $\overline{H}$ 的定义可知，当 $t\in(-\infty,t_0]$ 时，$H(t)\leqslant\overline{H}(t_0)$。

接下来，要证明当 $t\in[t_0,t_1)$ 时，

$$H(t)\leqslant\overline{H}(t_0)(\prod_{l=1}^{k}\max\{1,a_0+b_0\int_0^\infty k(s)\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s\})\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}, k=1,2,\cdots。 \tag{9}$$

设

$$\Omega(t)=\begin{cases}H(t)\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}, t\geqslant t_0,\\ H(t), -\infty<t\leqslant t_0。\end{cases} \tag{10}$$

显然，当 $t\in\mathbf{R}$ 时，$\Omega(t)\leqslant H(t)$，因此，只需要证明当 $t\in[t_0,t_1)$ 时，$\Omega(t)\leqslant\overline{H}(t_0)$ 即可。假设存在 $t\in[t_0,t_1)$，使得 $\Omega(t)>\overline{H}(t_0)$。令 $t^*=\inf\{\Omega(t)>\overline{H}(t_0), t\in[t_0,t_1)\}$，则当 $t\in(-\infty,t^*)$ 时，有 $\Omega(t)\leqslant\overline{H}(t_0)$ 且 $D^+\Omega(t^*)>0$，由式（6）和式（7），可得

$$\begin{aligned} D^+\Omega(t^*)\leqslant&[-\alpha H(t^*)+\beta H(t^*)+\gamma\int_0^\infty k(s)H(t^*-s)\mathrm{d}s]\mathrm{e}^{\lambda(t^*-t_0)}+\lambda H(t^*)\mathrm{e}^{\lambda(t^*-t_0)}\leqslant\\ &[(\lambda-\alpha+\beta)H(t^*)+\gamma\int_0^\infty k(s)H(t^*-s)\mathrm{d}s]\mathrm{e}^{\lambda(t^*-t_0)}\leqslant 0。\end{aligned} \tag{11}$$

显然和 $D^+\Omega(t^*)>0$ 矛盾，因此当 $t\in[t_0,t_1)$ 时，式（9）成立。同理可得，当 $t\in(-\infty,t_1)$ 时，$\Omega(t)\leqslant\overline{H}(t_0)$。

进一步，可以断言，当 $t\in[t_1,t_2)$ 时，

$$H(t)\leqslant\overline{H}(t_0)(\prod_{l=0}^{1}\max\{1,a_l+b_l\int_0^\infty k(s)\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s\})\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}, \tag{12}$$

即有

$$\Omega(t)\leqslant\overline{H}(t_0)\max\{1,a_1+b_1\int_0^\infty k(s)\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s\}。 \tag{13}$$

否则，存在 $t\in[t_1,t_2)$，使得 $\Omega(t)>\overline{H}(t_0)\max\{1,a_1+b_1\int_0^\infty k(s)\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s\}$。令 $t^{**}=\inf\{\Omega(t)>$

$\overline{H}(t_0)\max\{1,a_1+b_1\int_0^\infty k(s)\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s\},t\in[t_1,t_2)\}$，可得 $\Omega(t^{**})>\overline{H}(t_0)\max\{1,a_1+b_1\int_0^\infty k(s)\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s\}$，$\Omega(t)\leqslant\overline{H}(t_0)\max\{1,a_1+b_1\int_0^\infty k(s)\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s\},t\in[t_1,t^{**})$，且

$$D^+\Omega(t^{**})>0。\tag{14}$$

类似于式（11）的证明，可得 $D^+\Omega(t^{**})\leqslant 0$，和式（14）矛盾。因此，当 $t\in[t_1,t_2)$ 时，式（13）成立，从而，可以得到 $\Omega(t)\leqslant\overline{H}(t_0)\max\{1,a_1+b_1\int_0^\infty k(s)\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s\},t\in[-\infty,t_2)$。依此类推，对于所有的 $t\in[t_{k-1},t_k)$，有

$$H(t)\leqslant\overline{H}(t_0)\left(\prod_{l=0}^{1}\max\{1,a_l+b_l\int_0^\infty k(s)\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s\}\right)\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)},k=1,2,\cdots,\tag{15}$$

即有

$$H(t)\leqslant M\overline{H}(t_0)\mathrm{e}^{-(\lambda-\theta)(t-t_0)},t\geqslant t_0,\tag{16}$$

证毕。

定理 2　设下列条件满足：1）$\min\{\min_{i\in\Lambda_1}\{a_i\},\min_{j\in\Lambda_2}\{b_j\}\}-\max\{\sum_{i=1}^n\max_{j\in\Lambda_2}\{|c_{ij}|\beta_j\},\sum_{j=1}^m\max_{i\in\Lambda_1}\{|d_{ji}|\alpha_i\}\}>\max\{\sum_{i=1}^n\max_{j\in\Lambda_2}\{|\tilde{\alpha}_{ij}|\beta_j\},\sum_{j=1}^m\max_{i\in\Lambda_1}\{|\tilde{\beta}_{ji}|\alpha_i\}\}\int_0^\infty k(s)\mathrm{d}s$；2）存在常数 $M\geqslant 0,\lambda\in(0,\lambda_0),\gamma\in(0,\lambda)$，使得：$\lambda\leqslant\min\{\min_{i\in\Lambda_1}\{a_i\},\min_{j\in\Lambda_2}\{b_j\}\}-\max\{\sum_{i=1}^n\max_{j\in\Lambda_2}\{|c_{ij}|\beta_j\},\sum_{j=1}^m\max_{i\in\Lambda_1}\{|d_{ji}|\alpha_i\}\}-\max\{\sum_{i=1}^n\max_{j\in\Lambda_2}\{|\tilde{\alpha}_{ij}|\beta_j\},\sum_{j=1}^m\max_{i\in\Lambda_1}\{|\tilde{\beta}_{ji}|\alpha_i\}\}\int_0^\infty k(s)\mathrm{d}s$。且 $n\cdot\ln\max\{1,U_\lambda\}-\theta(t-t_0)\leqslant M$，其中，$U_\lambda=\max\{\max_{i\in\Lambda_1}\{|1+p_i|\},\max_{j\in\Lambda_2}\{|1+q_j|\}\}+\max\{\sum_{i=1}^n\max_{j\in\Lambda_2}\{|\tilde{\gamma}_{ij}|\delta_j\},\sum_{j=1}^m\max_{i\in\Lambda_1}\{|\tilde{\delta}_{ji}|\gamma_i\}\}\int_0^\infty k(s)\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s$，则式（3）的唯一平衡点是全局指数稳定的。

证明　设 $z(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),y_1(t),y_2(t),\cdots,y_m(t))^{\mathrm{T}}$ 为式（3）的任意一个解，由 (H_2) 和 (H_3) 可得：

$$\begin{aligned}D^+|x_i(t)|&\leqslant-\rho(x_i(t))+\sum_{j=1}^m|c_{ij}||f_j(y_j(t))|+\sum_{j=1}^m|\tilde{\alpha}_{ij}|\int_0^\infty K_{ij}^{(1)}(s)|f_j(y_j(t-s))|\mathrm{d}s\leqslant\\&a_i|x_i(t)|+\sum_{j=1}^m|c_{ij}||\beta_j(y_j(t))|+\sum_{j=1}^m|\tilde{\alpha}_{ij}|\beta_j\int_0^\infty K_{ij}^{(1)}(s)|y_j(t-s)|\mathrm{d}s\leqslant-\min_{i\in\Lambda_1}\{a_i\}|x_i(t)|+\\&\max_{j\in\Lambda_2}\{|c_{ij}|\beta_j\}\sum_{j=1}^m|y_j(t)|+\max_{j\in\Lambda_2}\{|\tilde{\alpha}_{ij}|\beta_j\}\int_0^\infty k(s)\sum_{j=1}^m|y_j(t-s)|\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D^+|y_j(t)|&\leqslant-\vartheta(y_j(t))+\sum_{i=1}^n|d_{ji}||g_i(x_i(t))|+\sum_{i=1}^n|\tilde{\beta}_{ji}|\int_0^\infty N_{ji}^{(1)}(s)|g_i(x_i(t-s))|\mathrm{d}s\leqslant\\&-b_j|y_j(t)|+\sum_{i=1}^n|d_{ji}|\alpha_i|x_i(t)|+\sum_{i=1}^n|\tilde{\beta}_{ji}|\alpha_i\int_0^\infty N_{ji}^{(1)}(s)|x_i(t-s)|\mathrm{d}s\leqslant-\min_{j\in\Lambda_2}\{b_j\}|y_j(t)|+\\&\max_{i\in\Lambda_1}\{|d_{ji}|\alpha_i\}\sum_{i=1}^n|x_i(t)|+\max_{i\in\Lambda_1}\{|\tilde{\beta}_{ij}|\alpha_i\}\int_0^\infty k(s)\sum_{i=1}^n|x_i(t-s)|\mathrm{d}s。\end{aligned}$$

定义一个李雅普诺夫函数 $V(t)=\sum_{i=1}^n|x_i(t)|+\sum_{j=1}^m|y_j(t)|$，且 $\overline{V}(t)=\sup_{s\in(-\infty,t]}V(s)$，则有：

$$\begin{aligned}D^+V(t)\leqslant&-\min_{i\in\Lambda_1}\{a_i\}\sum_{i=1}^n|x_i(t)|+\left(\sum_{i=1}^n\max_{j\in\Lambda_2}\{|c_{ij}|\beta_j\}\right)\sum_{j=1}^m|y_j(t)|+\\&\left(\sum_{i=1}^n\max_{j\in\Lambda_2}\{|\tilde{\alpha}_{ij}|\beta_j\}\right)\int_0^\infty k(s)\sum_{j=1}^m|y_j(t-s)|\mathrm{d}s-\min_{j\in\Lambda_2}(b_j)\sum_{j=1}^m|y_j(t)|+\end{aligned}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\max_{i\in\Lambda_1}\{|d_{ji}|\alpha_i\}\right)\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|+\left(\sum_{j=1}^{m}\max_{i\in\Lambda_1}\{|\tilde{\beta}_{ji}|\alpha_i\}\right)\int_0^\infty k(s)\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-s)|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$-(\min\{\min_{i\in\Lambda_1}\{a_i\},\min_{j\in\Lambda_2}\{b_j\}\})-\max\left(\sum_{i=1}^{n}\max_{j\in\Lambda_2}\{|c_{ij}|\beta_j\},\sum_{j=1}^{m}\max_{i\in\Lambda_1}\{|d_{ji}|\alpha_i\}\right)V(t)+$$

$$\max\left(\sum_{i=1}^{n}\max_{j\in\Lambda_2}\{|\tilde{\alpha}_{ij}|\beta_j\},\sum_{j=1}^{m}\max_{i\in\Lambda_1}\{|\tilde{\beta}_{ji}|\alpha_i\}\right)\int_0^\infty k(s)V(t-s)\mathrm{d}s, \tag{17}$$

$$V(t_k)\leqslant\max\{\max_{i\in\Lambda_1}\{|1+p_i|\},\max_{j\in\Lambda_2}\{|1+q_j|\}\}V(t_k^-)+$$

$$\max\left(\sum_{i=1}^{n}\max_{j\in\Lambda_2}\{|\tilde{\gamma}_{ij}|\delta_j\},\sum_{j=1}^{m}\max_{i\in\Lambda_1}\{|\tilde{\delta}_{ji}|\gamma_i\}\right)\int_0^\infty k(s)|V(t_k^--s)|\mathrm{d}s, \tag{18}$$

因此，由假设 1）和 2）以及引理 3，可得 $V(t)\leqslant \mathrm{e}^{M}\bar{V}(t_0)\mathrm{e}^{-(\lambda-\theta)(t-t_0)}$，即有 $\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|+\sum_{j=1}^{m}|y_j(t)|\leqslant \mathrm{e}^{M}\|\Psi\|\mathrm{e}^{-(\lambda-\theta)(t-t_0)}$，证毕。

4 例子

考虑如下具有连续分布时滞和脉冲的 BAM 神经网络：

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=-a_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{2}c_{ij}f_i(y_j(t))+\sum_{j=1}^{2}\tilde{\alpha}_{ij}\int_0^\infty K_{ij}^{(1)}(s)f_j(y_j(t-s))\mathrm{d}s+r_i,t\geqslant 0,t\neq t_k,\\ \Delta x_i(t_k)=p_ix_i(t_k^-)+\sum_{j=1}^{2}\tilde{\gamma}_{ij}\int_0^\infty K_{ij}^{(2)}(s)h_j(y_j(t_k^--s))\mathrm{d}s,i=1,2,k=1,2,\cdots,\\ \dot{y}_j(t)=-b_jy_j(t)+\sum_{i=1}^{2}d_{ji}g_i(x_i(t))+\sum_{i=1}^{2}\tilde{\beta}_{ji}\int_0^\infty N_{ji}^{(1)}(s)g_i(x_i(t-s))\mathrm{d}s+s_j,t\geqslant 0,t\neq t_k,\\ \Delta y_j(t_k)=q_jy_j(t_k^-)+\sum_{i=1}^{2}\tilde{\beta}_{ji}\int_0^\infty N_{ji}^{(2)}(s)\omega_i(x_i(t_k^--s))\mathrm{d}s,j=1,2,k=1,2,\cdots,\end{cases} \tag{19}$$

其中，$(a_1,a_2)^{\mathrm{T}}=(4,6)^{\mathrm{T}}$，$(b_1,b_2)^{\mathrm{T}}=(6,5)^{\mathrm{T}}$，$(p_1,p_2)^{\mathrm{T}}=(-3,-2)^{\mathrm{T}}$，$(q_1,q_2)^{\mathrm{T}}=(-3,-4)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_1=\alpha_2=0.2$，$\beta_1=\beta_2=0.3$，$\delta_1=\delta_2=0.4$，$\gamma_1=\gamma_2=0.1$，$\lambda=0.4$，$K(s)=\mathrm{e}^{-0.9s}$，$(f_1(y_1(t)),f_2(y_2(t)))^{\mathrm{T}}=(\tanh(0.4y_1(t)),\tanh(0.3y_2(t)))^{\mathrm{T}}$，$(g_1(x_1(t)),g_2(x_2(t)))^{\mathrm{T}}=(\tanh(0.5x_1(t)),\tanh(0.2x_2(t)))^{\mathrm{T}}$，$(h_1(y_1(t_k-s)),h_2(y_2(t_k-s)))^{\mathrm{T}}=(\tanh(0.04y_1(t_k-s)),\tanh(0.03y_2(t_k-s)))^{\mathrm{T}}$，$(\omega_1(x_1(t_k-s)),\omega_2(x_2(t_k-s)))^{\mathrm{T}}=(\tanh(0.03x_1(t_k-s)),\tanh(0.02x_2(t_k-s)))^{\mathrm{T}}$，
$\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.1&0.15\\0.2&0.25\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}d_{11}&d_{12}\\d_{21}&d_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.12&0.15\\0.20&0.10\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_{11}&\tilde{\alpha}_{12}\\\tilde{\alpha}_{21}&\tilde{\alpha}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.11&0.12\\0.13&0.14\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\tilde{\beta}_{11}&\tilde{\beta}_{12}\\\tilde{\beta}_{21}&\tilde{\beta}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.15&0.16\\0.17&0.18\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\tilde{\gamma}_{11}&\tilde{\gamma}_{12}\\\tilde{\gamma}_{21}&\tilde{\gamma}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\tilde{\delta}_{11}&\tilde{\delta}_{12}\\\tilde{\delta}_{21}&\tilde{\delta}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\2&4\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}K_{11}^{(1)}(s)&K_{12}^{(1)}(s)\\K_{21}^{(1)}(s)&K_{22}^{(1)}(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4\mathrm{e}^{-0.4s}&0.3\mathrm{e}^{-0.3s}\\0.5\mathrm{e}^{-0.5s}&0.6\mathrm{e}^{-0.6s}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}N_{11}^{(1)}(s)&N_{12}^{(1)}(s)\\N_{21}^{(1)}(s)&N_{22}^{(1)}(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.3\mathrm{e}^{-0.3s}&0.4\mathrm{e}^{-0.4s}\\0.5\mathrm{e}^{-0.5s}&0.6\mathrm{e}^{-0.6s}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}K_{11}^{(2)}(s)&K_{12}^{(2)}(s)\\K_{21}^{(2)}(s)&K_{22}^{(2)}(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\mathrm{e}^{-0.5s}&0.6\mathrm{e}^{-0.6s}\\0.4\mathrm{e}^{-0.4s}&0.2\mathrm{e}^{-0.2s}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}N_{11}^{(2)}(s)&N_{12}^{(2)}(s)\\N_{21}^{(2)}(s)&N_{22}^{(2)}(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4\mathrm{e}^{-0.4s}&0.5\mathrm{e}^{-0.5s}\\0.3\mathrm{e}^{-0.3s}&0.4\mathrm{e}^{-0.4s}\end{pmatrix}$。

通过计算可知，式（19）满足定理1和定理2的条件，所以式（19）存在唯一的全局指数稳定的平衡点。

［参考文献］

［1］KOSTO B. Bidirectional associative memories［J］. IEEE Transanction System Man Cybernet, 1988, 18(1): 49-60.

[2] GOPALSAMY K, HE X Z. Delay-independent stability in bidirectional associative memory networks [J]. IEEE Trans Neural Networks, 1994, 5(6): 998-1002.

[3] CAO J D. Global asymptotic stability of delayed bidirectional associative memory neural networks [J]. Appl Math Comput, 2003, 142(2/3): 333-339. DOI:10.1016/S0096-3003(02)00308-9.

[4] CAO J D. Exponential stability of delayed bi-directional associative memory neural networks [J]. Appl Math Comput, 2003, 135(1): 105-112.

[5] CAO J D, LIANG J L, JAMES LAM. Exponential stability of high-order bidirectional associative memory neural networks with time delays [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2004, 199(3/4): 425-436. DOI:10.1016/j.physd.2004.09.012.

[6] LI Y K. Global exponential stability of BAM neural networks with delays and impulses [J]. Chaos Solitons and Fractals, 2005, 24(1): 279-285. DOI:10.1016/j.chaos.2004.09.027.

[7] WANG B X, JIAN J G, JIANG M H. Global stability in Lagrange sense for BAM-type Cohen-Grossberg neural networks with time-varing delays [J]. Appl Math Modelling, 2015, 3(1): 1-7.

[8] XU C J, ZHANG Q M. Existence and global exponential stability of anti-periodic solutions of hig-order bidirectional associative memory (BAM) networks with time-varing delays on time scales [J]. Journal of Computational Science, 2015, 8: 48-61. DOI:10.1016/j.jocs.2015.02.008.

[9] XIA Y H, CAO J D, LIN M. Existence and exponential stability of almost periodic solution for BAM neural networks with impulse [J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 2005(3): 248-255.

[10] 李建军，杨志春. 双向联想记忆神经网络的指数输入状态稳定性 [J]. 重庆师范大学学报（自然科学版），2016, 33(4): 79-84.

[11] 谭亮，钟守铭. 一类具有离散时滞和分布时滞的 BAM 神经网络的全局耗散分析 [J]. 四川师范大学学报（自然科学版），2017, 40(1): 11-17.

[12] 牟天伟，饶若峰. 不动点原理在时滞 BAM 神经网络稳定性分析中的一个应用 [J]. 西南大学学报（自然科学版），2017, 39(6): 5-9.

[13] 杨金祥. 具有时滞的双向联想记忆神经网络的稳定性分析 [J]. 西南民族大学学报（自然科学版），2018, 44(1): 83-86.

[14] 薛焕斌. 时滞脉冲切换神经网络的鲁棒指数稳定性 [J]. 应用数学，2018, 31(1): 108-116.

[15] HORN R A, JOHNSON C R. Topics in matrix analysis [M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1991.

[16] LASALLE J P. The stability of dynamical system [M]. Philadelphia: SIAM, 1976.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）