[文章编号] 1007-7405(2018)05-0378-07 DOI:10.19715/j.jmuzr.2018.05.010

由2-树生成的Cayley图的容错极大局部连通性

罗祖文, 徐丽琼
(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 主要证明了由2-树生成的Cayley图 $A_n(\Delta)(n\geqslant 5)$ 是 $(2n-7)$ 容错极大局部连通和一对多 $(2n-7)$ 容错极大局部连通。限制每个顶点有至少3个无故障邻点, 则 $A_n(\Delta)(n\geqslant 5)$ 是 $(4n-15)$ 容错极大局部连通。

[关键词] 容错性; 极大局部连通; Cayley图; 2-树
[中图分类号] O 157.5

Fault Tolerant Maximal Local Connectivity of Cayley Graphs Generated by 2-trees

LUO Zuwen, XU Liqiong
(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: It was shown that Cayley graphs $A_n(\Delta)$ generated by 2-trees is $(2n-7)$-fault-tolerant maximally local connected for $n\geqslant 5$ and is also $(2n-7)$-fault-tolerant one-to-many maximally local-connected for $n\geqslant 5$. Furthermore, under the restricted condition that each vertex has at least three fault-free adjacent vertices, Cayley graphs $A_n(\Delta)$ generated by 2-trees is $(4n-15)$-fault-tolerant maximally local connected for $n\geqslant 5$.

Keywords: fault tolerance; maximal local connectivity; Cayley graphs; 2-trees

0 引言

互连网络通常以图为模型, 其中图的顶点和边分别对应互连网络的处理器和通信线路。设 $G=(V(G),E(G))$ 是一个无向图, 其中 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集。对于图 G 中任意一顶点 u, 用 $N_G(u)$ 表示 G 中与 u 相邻的顶点的集合。顶点 u 的度 $d_G(u)$ 表示在 G 中与 u 相邻的顶点的数目, 度为0的顶点称为孤立点, $\delta(G)$ 表示图 G 的最小度。设 x, y 是图 G 中两个不相邻的顶点, 则 $x-y-$点割是指 $V(G)\setminus\{x,y\}$ 的一个顶点子集 S, 使得 x 和 y 属于 $G-S$ 的不同连通分支。图 G 的连通度 $\kappa(G)$ 是指最小的顶点数 k 使得删除这些顶点后图 G 不连通或者只有一个顶点。若 $\kappa(G)\geqslant k$, 则称 G 是 k 连通。若 $\kappa(G)=\delta(G)$, 则称 G 为极大连通图。$k-$树图是 k 连通图的一种, 其有着诸多有趣的组合性质。很多NP-困难问题在有限的 $k-$树图中都有多项式算法。n 阶 $k-$树图 $T_{k,n}$ 的递归定义[1]为: k 个两两相邻的顶点构成 $k-$树图 $T_{k,k}$, 在 $k-$树图 $T_{k,n-1}$ 上任取 k 个两两相邻的顶点, 添加一个新的顶点与这 k 个两两相邻的顶点都相邻得到一个 $k-$树图 $T_{k,n}$。$k-$树图是树的推广, $k=1$

[收稿日期] 2017-12-04 [修回日期] 2018-03-14
[基金项目] 国家自然科学基金项目(11301217); 福建省自然科学基金项目(2018J01419); 福建省高等学校新世纪优秀人才项目(JA14168)
[作者简介] 罗祖文(1993—), 男, 硕士生, 从事组合图论研究。通信作者: 徐丽琼(1976—), 女, 教授, 硕导, 从事组合图论研究, E-mail:xuliqiong@jmu.edu.cn。

时，即为树。本文未予定义而直接使用的符号和术语见文献［2］。

关于容错极大局部连通和容错一对多极大局部连通，许多互连网络已被研究，包括超立方体[3]、折叠超立方体[4]、星图[5]、冒泡排序图[6]、由对换树生成的 Cayley 图[7]、冒泡排序星图[8]和交错群图[9]等。

通常衡量一个互连网络好坏的标准是：对称性，可扩展性，短直径，简单方便的最优路由，递归结构，平行路的存在性等。Cayley 网络作为一种正则、点对称的互连网络倍受人们的青睐，它在计算机互连网络的设计与分析中起着重要的作用。基于此，本文主要研究由 2 – 树生成的 Cayley 图的容错极大局部连通性和容错一对多极大局部连通性。

1　预备知识

在设计和选择互连网络拓扑结构时，要考虑的一个重要问题是它的可靠性，而图的连通度是衡量网络可靠性的最重要参数之一。对于图的连通度，Menger[10]从局部的角度出发，定义任意两个顶点的局部连通度 $\kappa(u,v)$ 为这两个顶点之间内部顶点不交路的数目的最大值，并给出关于局部连通度的一个经典的结果，即 Menger 定理。

定理 1[10]　设 x 和 y 是图 G 中两个不相邻的顶点，则 x 和 y 的局部连通度等于 $x-y-$ 顶点割所含的最小顶点数。

结合极大连通图和局部连通度的定义，Oh 等[5,11]给出了关于极大局部连通和 $f-$ 容错极大局部连通的概念。

定义 1[11]　若对于图 G 中任意两个顶点 u 和 v，都有 $\kappa(u,v) = \min\{d(u),d(v)\}$，则称图 G 是极大局部连通的。

定义 2[5]　设 f 是正整数，对于图 G 的任意阶不超过 f 的顶点子集 F，有 $G-F$ 是极大局部连通的，则称 G 是 f 容错极大局部连通的。

上述定义可推广至一个顶点对多个顶点的情况。

在 G 中，给定一个顶点 x 和一个顶点子集 Y，满足 $|Y|\geqslant k$，称 x 到 Y 之间的 k 条终点两两不同的内部顶点不交路为 x 到 Y 的一个 k 扇。设 $F\subset V(G)$，$G-F$ 中存在顶点集 Y，满足 $|Y|\leqslant d_{G-F}(x)$，并且对任一顶点 $v\in Y$，有 $\{v\}\cup N_{G-F}(v)\not\subseteq Y$，则称 Y 为关于 x 和 F 的条件终点集，简称条件终点集。文献［2］推广 Menger 定理，得到如下结果。

定理 2[2]　设 G 是 k 连通的，$x\in V(G)$，$Y\subseteq V(G)\setminus\{x\}$ 满足 $|Y|\geqslant k$，则在 G 中存在 x 到 Y 的一个 k 扇。

结合上述定理，Shih 等[6]给出一对多形式的容错极大局部连通的定义。

定义 3[6]　设 F 是 G 的顶点子集满足 $|F|\leqslant f$，$x\in V(G-F)$，Y 是 $G-F$ 中关于 x 的任意条件终点集，若在 $G-F$ 中 x 和 Y 之间存在 $|Y|$ 条终点两两不同的内部顶点不交路，则称 G 为一对多 f 容错极大局部连通的。

设 Γ 是一个有限群，Δ 是 Γ 不含单位元的子集，定义一个有向图 G 如下：它的顶点集是 Γ，弧集是 $\{(g,gs):g\in\Gamma,s\in\Delta\}$。

如此定义的有向图 G 称为群 Γ 关于子集 Δ 的 Cayley 图，记为 $\Gamma(\Delta)$。若对任意的 $s\in\Delta$，有 $s^{-1}\in\Delta$，则此时 Cayley 图为无向 Cayley 图。当 Γ 是交错群 A_n，$\Delta=\{(1,2,3),(2,1,3),(1,2,4),(2,1,4),\cdots,(1,2,n),(2,1,n)\}$ 时，称 $\Gamma(\Delta)$ 为交错群图，记为 AG_n。方便起见，用阶为 n 的图来描述 AG_n 的生成集，生成集里的每一个元素（abc）及它的逆（bac）用一个三角形 K_3 表示，如图 1 所示。这种通过 K_3 来表示生成集的元素的图称为 AG_n 的 3 循环生成图，或简称为 AG_n 的生成图。AG_n 的生成图是一棵特殊的 2 – 树。

当 Γ 是交错群 A_n，生成图是一般的 2 – 树时，称 $\Gamma(\Delta)$ 为由 2 – 树 $T_{2,n}$ 生成的 Cayley 图，记为

$A_n(\Delta)$[12]。由 2－树生成的 Cayley 图是交错群图的推广。由 2－树生成的 Cayley 图的生成集 Δ 里有 $2n-4$ 个 3 循环，所以 $\Gamma_n(\Delta)$ 是一个阶为 $n!/2$ 的 $(2n-4)$ 正则图。当 $n=4$ 时，$A_4(\Delta)$ 为交错群图 AG_4，如图 2 所示。

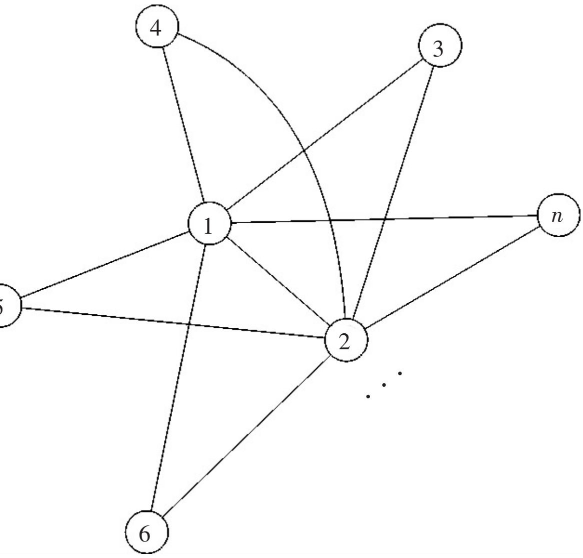

图 1　AG_n 生成图

Fig.1　The generating graph for AG_n

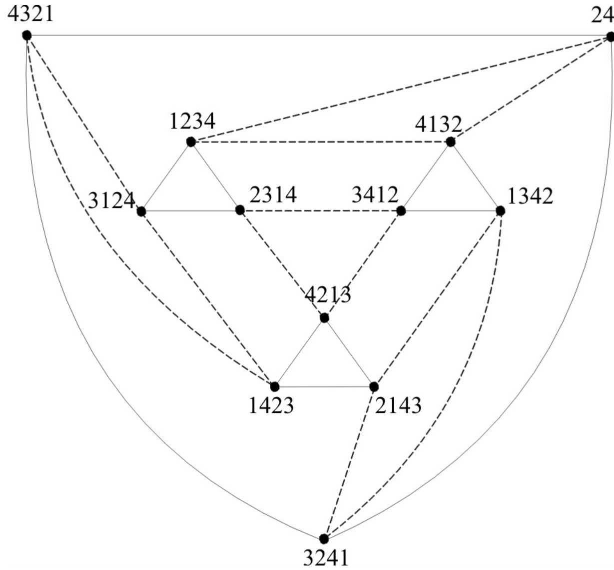

图 2　交错群图 AG_4

Fig.2　The alternating group graph AG_4

在证明本文的主要结果之前，首先引用一些已证明的结论。

引理 1[13]　当 $n\geqslant 4$ 时，由 2－树 $T_{2,n}$ 生成的 Cayley 图 $A_n(\Delta)$ 是 $(2n-4)$ 连通的。

引理 2[13]　设 T 是 $A_n(\Delta)$ 的顶点子集满足 $|T|\leqslant 4n-12$。当 $n\geqslant 5$ 时，$A_n(\Delta)-T$ 满足下述条件之一：1）$A_n(\Delta)-T$ 是连通的；2）$A_n(\Delta)-T$ 有 2 个分支，其中一个分支是孤立点。

引理 3[13]　设 T 是 $A_n(\Delta)$ 的顶点子集满足 $|T|\leqslant 6n-20$。当 $n\geqslant 5$ 时，$A_n(\Delta)-T$ 满足下述条件之一：1）$A_n(\Delta)-T$ 是连通的；2）$A_n(\Delta)-T$ 有 2 个分支，其中一个分支是孤立点或者 K_2；3）$A_n(\Delta)-T$ 有 3 个分支，其中 2 个分支是孤立点。

引理 4[12]　当 $n\geqslant 4$ 时，$A_n(\Delta)$ 不包含 K_4-e 和 $K_{2,3}$ 作为其子图。

2　主要结果及其证明

由引理 1 知，$n\geqslant 4$ 时，$A_n(\Delta)$ 是极大连通图，结合定理 1 可知，$A_n(\Delta)$ 中任意一对顶点都被 $2n-4$ 条内部顶点不交路连接。由于网络中故障的发生是不可避免的，下面对 $A_n(\Delta)$ 的极大局部连通性进行容错性分析。

引理 5　设 F 是 $G=A_n(\Delta)$ 的顶点子集满足 $|F|\leqslant 4n-13$，e 是 G 的一条边，当 $n\geqslant 5$ 时，$G-F-\{e\}$ 满足下列条件之一：1）$G-F-\{e\}$ 是连通的；2）$G-F-\{e\}$ 有 2 个分支，其中一个分支是孤立点。

证明　在 G 中任取一条边 $e=xy$，由引理 2，可得 $x,y\notin F$，否则引理成立。假设 $G-F-\{e\}$ 不连通，令 $F'=F\cup\{x\}$，则 $|F'|\leqslant 4n-12$。由引理 2，若 $G-F'$ 连通，则 $G-F-\{e\}$ 有 2 个分支，其中一个分支是孤立点 x，满足条件 2）；若 $G-F'$ 不连通，由引理 2，$G-F'$ 有 2 个分支，其中一个分支是孤立点，设为 u，另一个大分支设为 C，此时 $N_G(u)\subseteq F'$。下面分 2 种情况考虑。

情况 1　$ux\in E(G)$。

由引理 4，$|N_G(x)\cap N_G(u)|\leqslant 1$，从而 $d_F(x)\leqslant |F|-d_G(u)+1+1\leqslant 2n-7$，因此 $d_C(x)\geqslant 2n-4-1-(2n-7)=2$。又 $G-F-\{e\}$ 不连通，显然 $y\notin C$。此时 $u=y$，$G-F-\{e\}$ 有 2 个分支，其中一个分支是孤立点 u，满足条件 2）。

情况 2　$ux \notin E(G)$ 。

由引理 4，$|N_G(x) \cap N_G(u)| \leqslant 2$ ，从而 $d_F(x) \leqslant |F| - d_G(u) + 2 \leqslant 2n - 7$ ，因此 $d_C(x) \geqslant 2n - 4 - (2n - 7) = 3$ ，显然 $y \in C$，此时 $G - F - \{e\}$ 有 2 个分支，其中一个分支是孤立点 u，满足条件 2)。

定理 3　设 F 是 $G = A_n(\Delta)$ 的顶点子集满足 $|F| \leqslant 2n - 7$ ，当 $n \geqslant 5$ 时，$G - F$ 中任意一对顶点 u 和 v 都被 $\min\{d_{G-F}(u), d_{G-F}(v)\}$ 条内部顶点不交路连接，即 G 是 $(2n - 7)$ 容错极大局部连通的。

证明　当 $n \geqslant 5$ 时，设 u 和 v 是 $G - F$ 中任意 2 个不同的顶点，令 $m = \min\{d_{G-F}(u), d_{G-F}(v)\}$ ，则 $m \leqslant 2n - 4$。下面分 2 种情况用反证法证明。

情况 1　$uv \notin E(G)$ 。

假设在 $G - F$ 中 u 和 v 之间不存在 m 条内部顶点不交路，由定理 1 可知，在 $G - F$ 中存在一顶点子集 T 满足 $|T| \leqslant m - 1$，使得删去这个顶点集后，得到的子图 $G - F - T$ 中 u 和 v 不连通。又 $|F| + |T| \leqslant 2n - 7 + m - 1 \leqslant 4n - 12$ ，由引理 2 知 $G - F - T$ 或者连通，或者有 2 个分支，其中一个是孤立点。当 $G - F - T$ 连通时，与 u 和 v 在 $G - F - T$ 中不连通矛盾。当 $G - F - T$ 不连通时，则 $G - F - T$ 有 2 个分支，其中一个是孤立点，设为 x，又在 $G - F - T$ 中 u 和 v 不连通，则 $u = x$ 或 $v = x$。不失一般性，设 $u = x$，则 $N_{G-F}(u) \subseteq T$ ，从而 $|T| \geqslant d_{G-F}(u) \geqslant m$ ，这与 $|T| \leqslant m - 1$ 矛盾。

情况 2　$uv \in E(G)$ 。

假设在 $G - F - uv$ 中 u 和 v 之间不存在 $m - 1$ 条内部顶点不交路，由定理 1 可知，在 $G - F - uv$ 中存在一个顶点集 T 满足 $|T| \leqslant m - 2$，使得删去这个顶点集后，得到的子图 $G - F - T - uv$ 中 u 和 v 不连通。又 $|F| + |T| \leqslant 2n - 7 + m - 2 \leqslant 4n - 13$ ，由引理 5 知，$G - F - T - uv$ 或者是连通的，或者有 2 个分支，其中一个是孤立点。当 $G - F - T - uv$ 连通时，与 u 和 v 在 $G - F - T - uv$ 中不连通矛盾。当 $G - F - T - uv$ 不连通时，它有 2 个分支，其中一个是孤立点，设为 y，又因为 u 和 v 在 $G - F - T - uv$ 中不连通，则 $u = y$ 或 $v = y$。不失一般性，设 $u = y$，则 $N_{G-F-uv}(u) \subseteq T$ ，从而 $|T| \geqslant d_{G-F-uv}(u) \geqslant m - 1$，这与 $|T| \leqslant m - 2$ 矛盾，定理得证。

当 $n \geqslant 5$ 时，给出一个例子说明定理 3 中的容错极大局部连通性的结果是紧的。由 2 – 树生成的 Cayley 图 G 的构造可知 G 包含 K_3 作为其子图，如图 3 所示，设 u, v, w 是 G 中两两相邻的 3 个顶点，由引理 4 可知 u, v 只有一个公共邻点 w。令 $F = N_G(u) \setminus \{w, v\}$ ，$x \in V(G) - (N_G(u) \cup N_G(v))$ ，则 $|F| = 2n - 6$，$m = \min\{d_{G-F}(x), d_{G-F}(v)\} = 2n - 4$ 。此时令 $T = N_G(v) \setminus \{u\}$ ，显然 $T \subseteq G - F$ 满足 $|T| = 2n - 5 = m - 1$ ，且在 $G - F - T$ 中 x 和 v 不连通。由定理 1，在 $G - F$ 中 x 和 v 之间不存在 $\min\{d_{G-F}(x), d_{G-F}(v)\} = 2n - 4$ 条内部顶点不交路。

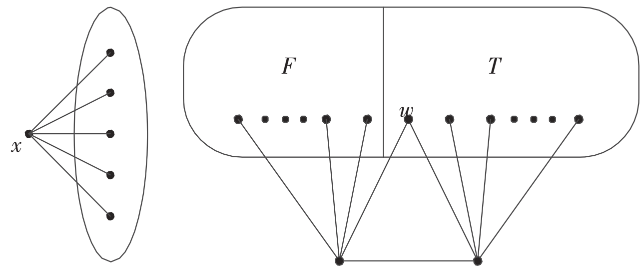

图 3　图 G

Fig.3　Graph G

定理 4　设 F 是 $G = A_n(\Delta)$ 的顶点子集满足 $|F| \leqslant 2n - 7$ ，$x \in V(G - F)$，Y 是 $G - F - \{x\}$ 中关于 x 的任一条件终点集，满足 $|Y| = t \leqslant d_{G-F}(x) \leqslant 2n - 4$ 。当 $n \geqslant 5$ 时，$G - F$ 中 x 和 Y 之间存在 t 条终点两两不同的内部顶点不交路，即 G 是一对多 $(2n - 7)$ 容错极大局部连通的。

证明　当 $n \geqslant 5$ 时，由定理 2，只需证明对于任意的 $T \subset V(G - F)$ 满足 $|T| \leqslant t - 1$，在 $G - F - T$ 中 x 与 $Y - T$ 之间有一条路即可。用反证法证明，假设在 $G - F - T$ 中 x 与 $Y - T$ 不连通，则 $G - F - T$ 不连通，又 $|F| + |T| \leqslant 4n - 12$，由引理 2，$G - F - T$ 包含一个大分支 C 和一个孤立点 u。所以 $N_{G-F}(u) \subseteq T$ ，如果 $x = u$，则 $|T| \geqslant d_{G-F}(x) \geqslant t$ ，与 $|T| \leqslant t - 1$ 矛盾。如果 $x \in C$，则 $u \in Y - T$。如果 $|Y \cap T| = t - 1$ ，有 $T \subseteq Y$，则 $\{u\} \cup N_{G-F}(u) \subseteq Y$ ，与 Y 是一个条件终点集矛盾。所以

$|Y\cap T|\leqslant t-2$，则 $(Y-T)\cap C\neq\emptyset$。令 $u'\in(Y-T)\cap C$，然而在 $G-F-T$ 中 x 与 u'之间存在一条路，与在 $G-F-T$ 中 x 与 $Y-T$ 不连通矛盾。证毕。

当 $n\geqslant5$ 时，给出一个例子说明定理 4 中的一对多容错极大局部连通性的结果是紧的。如图 3 所示，设 u,v,w 是由 2－树生成的 Cayley 图 G 中两两相邻的 3 个顶点，由引理 4 可知，u,v 只有一个公共邻点 w。令 $F'=N_G(u)\setminus\{w,v\}$，$Y=\{v\}\cup(N_G(v)\setminus\{w\})$，$x\in V(G)-(N_G(u)\cup N_G(v))$，则 $|F'|=2n-6$，$Y\subseteq G-F'$ 满足 $|Y|=t=d_{G-F'}(x)=2n-4$。显然 Y 是关于 x 和 F'的条件终点集，此时令 $T'=(Y\setminus\{u,v\})\cup\{w\}$，则 $|T'|=t-1$ 且在 $G-F'-T'$中 x 与 $\{u,v\}$ 不连通。由定理 2，在 $G-F'$中 x 和 Y 之间不存在 $t=2n-4$ 条终点两两不同的内部顶点不交路。

由定理 3 可知，$A_n(\Delta)$ 是 $(2n-7)$ 容错极大局部连通的，但是若在同一顶点处存在 $2n-6$ 个故障点，结果并不能被保证。在大多数情况下，所有故障都发生在一个顶点身上概率很小，所以限制每个顶点有至少 3 个无故障相邻顶点。在此条件限制下，证明了由 2－树生成的 Cayley 图 $A_n(\Delta)$ 是 $(4n-15)$ 容错极大局部连通的。

引理 6 设 F 是 $G=A_n(\Delta)$ 的顶点子集满足 $|F|\leqslant6n-21$，e 是 G 的一条边，当 $n\geqslant5$ 时，$G-F-\{e\}$ 满足下列条件之一：1）$G-F-\{e\}$ 是连通的；2）$G-F-\{e\}$ 有 2 个分支，其中一个分支是孤立点或者 K_2；3）$G-F-\{e\}$ 有 3 个分支，其中 2 个分支是孤立点。

证明 在 G 中任取一条边 $e=xy$，由引理 3，可得 $x,y\notin F$，否则定理成立。假设 $G-F-\{e\}$ 不连通，令 $F'=F\cup\{x\}$，$|F'|\leqslant6n-20$。若 $G-F'$ 连通，则 $G-F-\{e\}$ 有 2 个分支，其中一个分支是孤立点 x，满足条件 2）。若 $G-F'$不连通，由引理 3，下面分 3 种情况考虑。

情况 1 $G-F'$有 2 个分支，其中一个是孤立点 u，另一个是大分支 C。

若 $ux\in E(G)$。由于 $d_G(x)=2n-4$，此时对 $d_C(x)$ 进行讨论。若 $d_C(x)=0$，此时 $u=y$，则 $G-F-\{e\}$ 有 3 个分支，其中 2 个分支分别是孤立点 x 和孤立点 u，满足条件 3）。若 $d_C(x)=1$，当$u=y$时，$G-F-\{e\}$ 有 2 个分支，其中一个分支是孤立点 u，满足条件 2），当 $u\neq y$ 时，则 $y\in C$，此时 $G-F-\{e\}$ 有 2 个分支，其中一个分支是 K_2，满足条件 2）。若 $d_C(x)\geqslant2$，由于 $G-F-\{e\}$ 不连通，则 $u=y$，此时 $G-F-\{e\}$ 有 2 个分支，其中一个分支是孤立点 u，满足条件 2）。

若 $ux\notin E(G)$。由于 $ux\notin E(G)$，则 $y\in C$，此时 $d_C(x)\geqslant1$。若 $d_C(x)=1$，则 $G-F-\{e\}$ 有 3 个分支，其中 2 个分支分别是孤立点 x 和孤立点 u，满足条件 3）。若 $d_C(x)\geqslant2$，则 $G-F-\{e\}$ 有 2 个分支，其中一个分支是孤立点 u，满足条件 2）。

情况 2 $G-F'$有 2 个分支，其中一个是 K_2，记为 uv，另一个大分支是 C。

若 $ux\in E(G)$，$vx\notin E(G)$ 或 $vx\in E(G)$，$ux\notin E(G)$。不失一般性，设 $ux\in E(G)$，$vx\notin E(G)$。由引理 4，$|N_G(u)\cup N_G(v)|\geqslant4n-11$，则 $d_F(x)\leqslant|F|-(4n-11-1)+1+1\leqslant2n-7$，因此 $d_C(x)\geqslant2n-4-(2n-7)-1=2$。由于 $G-F-\{e\}$ 不连通，则 $y=u$，此时 $G-F-\{e\}$ 有 2 个分支，其中一个分支是 K_2，即 uv。满足条件 2）。

若 $ux\in E(G)$ 且 $vx\in E(G)$。由引理 4，$d_F(x)\leqslant|F|-(4n-11-1)\leqslant2n-9$，因此 $d_C(x)\geqslant2n-4-2-(2n-9)=3$。此时 $G-F-\{e\}$ 连通，与假设矛盾。

若 $ux\notin E(G)$ 且 $vx\notin E(G)$。由引理 4，$d_F(x)\leqslant|F|-(4n-11)+2\times2\leqslant2n-6$，因此 $d_C(x)\geqslant2n-4-(2n-6)=2$。此时 $G-F-\{e\}$ 有 2 个分支，其中一个分支是 K_2，即 uv，满足条件 2）。

情况 3 $G-F'$有 3 个分支，其中 2 个是孤立点 u 和孤立点 v，另一个大分支是 C。

若 $ux\in E(G)$，$vx\notin E(G)$ 或 $vx\in E(G)$，$ux\notin E(G)$。不失一般性，设 $ux\in E(G)$，$vx\notin E(G)$。由引理 4，$|N_G(u)\cup N_G(v)|\geqslant4n-10$，则 $d_F(x)\leqslant|F|-(4n-10-1)+1+2\leqslant2n-7$，因此 $d_C(x)\geqslant2n-4-(2n-7)-1=2$。若 $y\in C$，则 $G-F-\{e\}$ 有 2 个分支，其中一个分支是孤立点 v，满足条件 2）。若 $y=u$，则 $G-F-\{e\}$ 有 3 个分支，其中 2 个是孤立点 u 和 v，满足条件 3）。

若 $ux \in E(G)$ 且 $vx \in E(G)$。由引理4，$d_F(x) \leqslant |F| - (4n-10-1) + 1 + 1 \leqslant 2n-8$，因此 $d_C(x) \geqslant 2n-4-(2n-8)-2=2$。由于 $G-F-\{e\}$ 不连通，则 $y \in \{u,v\}$，不失一般性，令 $y=u$，此时 $G-F-\{e\}$ 有2个分支，其中一个分支是孤立点 u，满足条件2)。

若 $ux \notin E(G)$ 且 $vx \notin E(G)$。由引理4，$d_F(x) \leqslant |F| - (4n-10) + 2\times 2 \leqslant 2n-7$，因此 $d_C(x) \geqslant 2n-4-(2n-7)=3$。显然 $y \in C$，则 $G-F-\{e\}$ 有3个分支，其中2个分支是孤立点 u 和 v，满足条件3)。

定理5　设 F 是 $G=A_n(\Delta)$ 的顶点子集满足 $\delta(G-F) \geqslant 3$ 且 $|F| \leqslant 4n-15$，当 $n \geqslant 5$ 时，$G-F$ 中任意一对顶点 x 和 y 都被 $\min\{d_{G-F}(x), d_{G-F}(y)\}$ 条内部顶点不交路连接。

证明　当 $n \geqslant 5$ 时，设 x 和 y 是 $G-F$ 中任意2个不同的顶点，令 $m=\min\{d_{G-F}(x), d_{G-F}(y)\}$，则 $3 \leqslant m \leqslant 2n-4$。下面分2种情况用反证法证明。

情况1　$xy \notin E(G)$。

假设在 $G-F$ 中 x 和 y 之间不存在 m 条内部顶点不交路，由定理1可知，在 $G-F$ 中存在一顶点子集 T 满足 $|T| \leqslant m-1$，使得删去这个顶点集后，得到的子图 $G-F-T$ 中 x 和 y 不连通。又 $|F|+|T| \leqslant 4n-15+m-1 \leqslant 6n-20$，由引理3：

1）若 $G-F-T$ 有2个分支，其中一个分支是孤立点 u，另一个大分支是 C。由于 $G-F-T$ 中 x 和 y 不连通，不失一般性，令 $x=u$，$y \in C$，显然 $N_G(x) \subseteq F \cup T$，因此 $|T| \geqslant d_{G-F}(x) \geqslant m$，与 $|T| \leqslant m-1$ 矛盾。

2）若 $G-F-T$ 有2个分支，其中一个分支是 K_2，记为 uv，另一个大分支是 C。由于 $G-F-T$ 中 x 和 y 不连通，不失一般性，令 $x=u$，$y \in C$，显然 $N_G(x) \subseteq F \cup T \cup \{v\}$，于是 $m-1 \geqslant |T| \geqslant d_{G-F}(x)-1 \geqslant m-1$，因此 $|T|=m-1$，$N_{G-F}(x)=T\cup\{v\}$，又由引理4，$|N_G(x) \cap N_G(v)| \leqslant 1$，则 $d_{G-F}(v) \leqslant 2$，与 $\delta(G-F) \geqslant 3$ 矛盾。

3）若 $G-F-T$ 有3个分支，其中2个是孤立点 u 和 v，另一个大分支是 C。由于 $G-F-T$ 中 x 和 y 不连通，若 $\{x,y\}=\{u,v\}$，不失一般性，令 $x=u$，$y=v$，显然 $N_{G-F}(x) \cup N_{G-F}(y) \subseteq T$，由引理4，$2m-2 \leqslant d_{G-F}(x)+d_{G-F}(y)-2 \leqslant |T| \leqslant m-1$，与 $m \geqslant 3$ 矛盾。若 $x \in \{u,v\}, y \in C$，不失一般性，令 $x=u$，$y \in C$，显然 $N_{G-F}(x) \cup N_{G-F}(v) \subseteq T$，又 $d_{G-F}(v) \geqslant 3$，由引理4，$m+3-2 \leqslant d_{G-F}(x)+d_{G-F}(v)-2 \leqslant |T| \leqslant m-1$，矛盾。

情况2　$xy \in E(G)$。

假设在 $G-F-xy$ 中 x 和 y 之间不存在 $m-1$ 条内部顶点不交路，由定理1可知，在 $G-F-xy$ 中存在一顶点子集 T 满足 $|T| \leqslant m-2$，使得删去这个顶点集后，得到的子图 $G-F-T-xy$ 中 x 和 y 不连通。又 $|F|+|T| \leqslant 4n-15+m-2 \leqslant 6n-21$，由引理6：

1）若 $G-F-T-xy$ 有2个分支，其中一个分支是孤立点 u，另一个大分支是 C。由于 $G-F-T-xy$ 中 x 和 y 不连通，不失一般性，令 $x=u$，$y \in C$，显然 $N_G(x) \subseteq F \cup T \cup \{y\}$，因此 $|T| \geqslant d_{G-F}(x)-1 \geqslant m-1$，与 $|T| \leqslant m-2$ 矛盾。

2）若 $G-F-T-xy$ 有2个分支，其中一个分支是 K_2，记为 uv，另一个大分支是 C。由于 $G-F-T-xy$ 中 x 和 y 不连通，不失一般性，令 $x=u$，$y \in C$，显然 $N_G(x) \subseteq F \cup T \cup \{v,y\}$，于是 $m-2 \geqslant |T| \geqslant d_{G-F}(x)-2 \geqslant m-2$，因此 $|T|=m-2$，$N_{G-F}(x)=T \cup \{v,y\}$，又由引理4，$|N_G(x) \cap N_G(v)| \leqslant 1$，则 $d_{G-F}(v) \leqslant 2$，与 $\delta(G-F) \geqslant 3$ 矛盾。

3）若 $G-F-T-xy$ 有3个分支，其中2个是孤立点 u 和 v，另一个大分支是 C。由于 $G-F-T-xy$ 中 x 和 y 不连通，若 $\{x,y\}=\{u,v\}$，不失一般性，令 $x=u$，$y=v$，显然 $N_{G-F}(x) \cup N_{G-F}(y) \subseteq T \cup \{x,y\}$，由引理4，$2m-1 \leqslant d_{G-F}(x)+d_{G-F}(y)-1 \leqslant |T|+2 \leqslant m$，与 $m \geqslant 3$ 矛盾。若 $x \in \{u,v\}$，$y \in C$，不失一般性，令 $x=u, y \in C$，显然 $N_{G-F}(x) \cup N_{G-F}(v) \subseteq T \cup \{y\}$，又 $d_{G-F}(v) \geqslant 3$，由引

理 4, $m+3-2 \leqslant d_{G-F}(x)+d_{G-F}(v)-2 \leqslant |T|+1 \leqslant m-1$ ，矛盾。

3　结论

本文研究了由 2 – 树生成的 Cayley 图的极大局部连通容错性，当删除不超过 $2n-7$ 个顶点时，导出子图中任意一对顶点 x 和 y 都被 $\min\{d'(x), d'(y)\}$ 条内部顶点不交路连接，$d'(x), d'(y)$ 分别表示顶点 x 和 y 在顶点删除图中的度。同时，也证明了由 2 – 树生成的 Cayley 图是一对多 $(2n-7)$ 极大局部连通。进一步，如果每个顶点都被限制至少有 3 个无故障邻点，由 2 – 树生成的 Cayley 图是 $(4n-15)$ 极大局部连通，网络容错性相应增加。本文主要研究的是网络中处理器发生问题（去点）的情况，如果通讯线路发生问题（去边），是否也能有相应的结果呢？这将是一个值得研究的问题。

[参考文献]

[1] BEINEKE L W, PIPPERT R E. The number of labeled k-dimensional trees [J]. Journal of Combinatorial Theory, 1969, 6(2): 200-205.

[2] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory [M]. London: Springer, 2008.

[3] SHIH L M, CHIANG C F, HSU L H, et al. Strong Menger connectivity with conditional faults on the class of hypercube-like networks [J]. Information Processing Letters, 2008, 106(2): 64-69.

[4] YANG W, ZHAO S, ZHANG S. Strong Menger connectivity with conditional faults of folded hypercubes [J]. Information Processing Letters, 2017, 125: 30-34. DOI: 10.1016/j.ipl.2017.05.001.

[5] OH E, CHEN J. On strong Menger-connectivity of star graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2003, 129(2): 499-511. DOI: 10.1016/S0166-218X(02)00600-5.

[6] SHIH L M, TAN J M. Fault-tolerant maximal local-connectivity on the Bubble-sort graphs [C] //Sixth International Conference on Information Technology: new generations. Las Vegas: IEEE Computer Society, 2009: 564-569.

[7] SHIH L M, CHIANG C F, HSU L H, et al. Fault tolerant maximal local connectivity on Cayley graph generated by transposition tree [J]. Journal of Interconnection Networks, 2009, 10(3): 253-260.

[8] CAI H, LIU H, LU M. Fault-tolerant maximal local-connectivity on bubble-sort star graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2015, 181: 33-40. DOI: 10.1016/j.dam.2014.10.006.

[9] ZHOU S, CHEN L. Fault tolerant maximal local connectivity of alternating group networks [C] //IEEE. International Congress on Image and Signal Processing. Yantai: IEEE, 2010: 4394-4398.

[10] MENGER K. Zur allgemeinen kurventheorie [J]. Fund Math, 1927, 10(1): 96-115.

[11] OH E, CHEN J. On strong fault tolerance: parallel routing in star networks with faults [J]. Journal of Interconnection Networks, 2003, 4(1): 113-126.

[12] CHENG E, LIPTÁK L, YANG W, et al. A kind of conditional vertex connectivity of Cayley graphs generated by 2-trees [J]. Information Sciences, 2011, 181(19): 4300-4308. DOI: 10.1016/j.ins.2011.05.010.

[13] CHENG E, LIPTÁK L, SALA F. Linearly many faults in 2-tree-generated networks [J]. Networks, 2010, 55(2): 90-98. DOI: 10.1002/net.20319.

[14] PIPPERT R E. Properties and characterizations of k-trees [J]. Mathematika, 1971, 18(1): 141-151.

[15] VOLKMANN L. On local connectivity of graphs [J]. Applied Mathematics Letters, 2008, 21(1): 63-66. DOI: 10.1016/j.aml.2006.12.014.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）