[文章编号] 1007－7405(2018)06－0473－02　　DOI:10.19715/j.jmuzr.2018.06.12

关于树的 Wiener 维数的一个注记

林　泓，林晓霞，王洪波

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 一个连通图 G 的 Wiener 维数是指 G 的所有不同的顶点距离的数目。设 T 是一个树，$\mathrm{diam}(T)$ 是 T 的直径。得到了 T 的 Wiener 维数的一个紧的下界为 $\lfloor \mathrm{diam}(T)/2 \rfloor + 1$。

[关键词] 树；顶点距离；Wiener 维数

[中图分类号] O 157.1

A Note on the Wiener Dimension of Trees

LIN Hong, LIN Xiaoxia, WANG Hongbo

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The Wiener dimension of a connected graph G is defined as the number of different distances of its vertices of G. Assume that T is a tree and $\mathrm{diam}(T)$ is its diameter, it is proved that $\lfloor \mathrm{diam}(T)/2 \rfloor + 1$ is a sharp lower bound of the Wiener dimension of T in this paper.

Keywords: trees; distance of vertices; Wiener dimension

0　引言

本文所研究的图均为简单连通图。令 G 是一个连通图，分别以 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示 G 的顶点集与边集，以 $d_G(u,v)$ 表示 G 的两个顶点 u 和 v 的距离。G 中的两个顶点的距离的最大值称为 G 的直径，记为 $\mathrm{diam}(G)$。若图 G 的顶点集可划分为两个子集 X 和 Y，使得 G 的每条边的2个端点分别在 X 和 Y 中，则称 G 为二部图。连通的无圈图称为树，树中度为1的顶点称为悬挂点。本文其他未加说明的符号和概念参见文献[1]。

一个连通图 G 的 Wiener 指数定义为 $W(G)=\sum\limits_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d_G(u,v)$，树的 Wiener 指数在理论化学中有许多应用[2-5]。近年来，Alizadeh 等[6]提出了图的 Wiener 维数的概念。设 G 是一个连通图，G 的一个顶点 v 的顶点距离 $d_G(v)$ 是指 v 与 G 的其他顶点的距离和，若 $\{d_G(v) \mid v \in V(G)\} = \{d_1, d_2, \cdots, d_k\}$，则称 k 为图 G 的 Wiener 维数，记为 $\dim_W(G)$，即 $\dim_W(G)$ 是 G 的所有不同的顶点距离的数目。文献[6]利用 Wiener 维数的概念计算出一些图的 Wiener 指数。

本文以直径为参数得到了树的 Wiener 维数的一个紧的下界。

1　树的 Wiener 维数的一个紧的下界

进一步需要以下定义。设 T 是一个树，以 $Cd(T)$ 表示 T 中具有最小距离的顶点的集合[2]。

[收稿日期] 2018－01－03　　[修回日期] 2018－04－20
[基金项目] 福建省自然科学基金项目（2016J01666）；集美大学博士科研启动基金项目（ZQ2013003）
[作者简介] 林泓（1969—），男，副教授，博士，从事应用图论研究。E-mail:linhong@jmu.edu.cn

如图 1 中的树 T，容易计算 T 的 12 个顶点的顶点距离分别为 $d_T(u) = 22$，$d_T(c_1) = 24$，$d_T(c_2) = 28$，$d_T(v_1) = 40$，$d_T(v_2) = 30$，$d_T(v_3) = d_T(v_4) = d_T(v_5) = d_T(v_6) = 26$，$d_T(v_7) = 34$，$d_T(v_8) = 42$，$d_T(v_9) = 52$。故 $Cd(T) = \{u\}$。

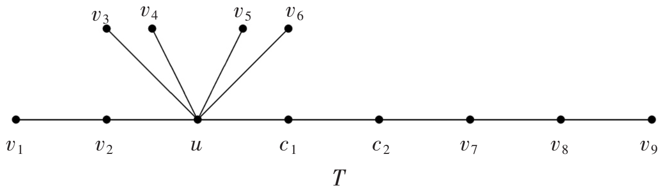

图 1　一个有 12 个顶点的树 T

Fig.1　A tree T with 12 vertices

而关于树的最小距离点有引理 1 和引理 2。

引理 1[7] (Zelinka)　一个树 T 的质心 $Cd(T)$ 要么由一个顶点构成，要么由两个相邻的顶点构成。

引理 2[2]　设 $P = v_1 v_2 \cdots v_k$ 是一树 T 的一条路，其中 $v_1 \in Cd(T)$，$v_2 \notin Cd(T)$，v_k 是树 T 的一个悬挂点，则有 $d_T(v_1) < d_T(v_2) < \cdots < d_T(v_k)$。

令 x 是一个实数，以 $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数。本文的主要结论是定理 1。

定理 1　设 T 是一个树，则有 $\dim_W(T) \geqslant \lfloor \mathrm{diam}(T)/2 \rfloor + 1$。

证明　令 $\mathrm{diam}(T) = r$。可假设 $P = v_0 v_1 v_2 \cdots v_r$ 为 T 的一条最长路，显然 v_0 与 v_r 都是 T 的悬挂点。令 $u \in Cd(T)$。注意到树 T 中任意两顶点有唯一一条路相连，故可假设 L_1 是树 T 中连接 u 和 v_0 的唯一一条路，而 L_2 是 T 中连接 u 与 v_r 的唯一一条路。显然有 $\{V(L_1) \cup V(L_2)\} \supseteq V(P)$。否则，若有一点 $v_i \in V(P)(v_i \neq v_0, v_i \neq v_r)$ 且 $v_i \notin \{V(L_1) \cup V(L_2)\}$。则 T 中将有一个包含 v_i 的圈，与 T 是树矛盾。这样由引理 1 和引理 2 可知，L_1 与 L_2 中至少有一条路中有 $\lfloor r/2 \rfloor + 1$ 个有不同顶点距离的顶点，故 $\dim_W(T) \geqslant \lfloor \mathrm{diam}(T)/2 \rfloor + 1$。

注 1　定理 1 的下界为紧的。以 P_n 表示有 n 个顶点的路，$\mathrm{diam}(P_n) = n - 1$，$\dim_W(P_n) = \lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1$，故 $\dim_W(P_n) = \lfloor \mathrm{diam}(P_n)/2 \rfloor + 1$。

注 2　每个树都是二部图，但定理 1 的结论不能推广到二部图。以 C_n 表示有 n 个顶点的圈。$C_{2n}(n \geqslant 2)$ 是二部图，$\mathrm{diam}(C_{2n}) = n$，而 $\dim_W(C_{2n}) = 1$。若一个连通图 G 的任意两个顶点间有且仅有唯一一条最短路相连，则称一个图 G 为测地的。测地图（geodetic graphs）是图的距离理论中常研究的一类图[2]。显然每个树都是测地的，但定理 1 的结论也不能推广到测地图。$C_{2n+1}(n \geqslant 1)$ 是测地图，$\mathrm{diam}(C_{2n+1}) = n$，而 $\dim_W(C_{2n+1}) = 1$。

[参 考 文 献]

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications [M]. London: Macmillan Press, 1976.

[2] DOBRYNIN A A, ENTRINGER R, GUTMAN I. Wiener index of trees: theory and applications [J]. Acta Appl Math, 2001, 66(3): 211-249. DOI: 10.1023/A:101076751.

[3] LIN H. Extremal Wiener index of trees with given number of vertices of even degree [J]. MATCH Commun Math Comput Chem, 2014, 72: 311-320.

[4] LIN H, SONG M H. On segment sequences and the Wiener index of trees [J]. MATCH Commun Math Comput Chem, 2016, 75: 81-89.

[5] ANDRIANTIANA E O D, WAGNER S, WANG H. Maximum Wiener index of trees with given segment sequence [J]. MATCH Commun Math Comput Chem, 2016, 75: 91-104.

[6] ALIZADEHA Y, ANDOVA V, KLAVZAR S, et al. Wiener dimension: fundamental properties and (5,0)-nanotubical fullerenes [J]. MATCH Commun Math Comput Chem, 2014, 72: 279-294.

[7] ZELINKA B. Medians and peripherians of trees [J]. Arch Math, 1968, 4: 87-95.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）