

# 相关信道下基于功率分配的 MIMO 系统容量分析

苏孙庆<sup>1</sup>, 裴文龙<sup>1</sup>, 舒强<sup>1</sup>, 蔡宏浩<sup>1</sup>, 雷国伟<sup>1,2</sup>

(1. 集美大学理学院, 福建 厦门 361021; 2. 北京邮电大学电子工程学院, 北京 100876)

**[摘要]** 采用信道矩阵的分解、奇异值扩展等方法, 从天线上的功率分配与信道的相关性这两个角度分析多输入多输出(MIMO)系统信道的相关性和容量。通过仿真分析, 发现不同的天线相关程度和功率分配算法的作用是不同的。注水算法能在一定程度上弥补信道相关性所带来的容量损失。而且, 当信噪比增大到一定程度时, 注水算法的效果越来越接近平均分配算法。

**[关键词]** MIMO; 信道容量; 注水算法; 相关系数

**[中图分类号]** TN 914

## Capacity Analysis of MIMO System Based on Power Distribution over Correlated Channel

SU Sunqing<sup>1</sup>, PEI Wenlong<sup>1</sup>, SHU Qiang<sup>1</sup>, CAI Honghao<sup>1</sup>, LEI Guowei<sup>1,2</sup>

(1. School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China;

2. School of Electronic Engineering, Beijing University of Posts & Telecommunications, Beijing 100876, China)

**Abstract:** In this paper, the capacity of MIMO systems is discussed in terms of both power distribution and channel correlation. The channel correlation and capacity are analyzed by using matrix decomposition and singular value spread. It is found via simulation that, power distribution plays different role according to correlation or not, and the degree of correlation. And water-filling algorithm can offset the loss caused by channel correlation. Meanwhile, it is found that the effect of water-filling algorithm is close to average distribution algorithm as the signal to noise ratio (SNR) grows to an extent.

**Keywords:** MIMO; channel capacity; water-filling algorithm; correlation coefficient

## 0 引言

在整个通信系统中, 信道容量要尽可能地达到或者接近理论最大值。因此, 针对不同的环境、信道状态等, 一般会对应有不同的功率分配算法来适应条件要求, 以使得所用算法最合适, 最终达到总容量最大化。无论在 OFDM-MIMO 系统<sup>[1]</sup>, 还是物理层多天线选择系统<sup>[2]</sup>, 功率分配算法都发挥着重要的作用。文献[3]通过仿真和分析, 得出注水算法在功率分配算法中最优。不过, 在实际的无线环境中, 衰落并不是独立的, 而是存在着相关性, 这个相关性会对整个系统的容量产生较大的影响。相关性越高, 信噪比越小, 整个系统的容量也随之越小。文献[4]研究了天线间距、角度扩展等参数对天线相关性, 进而对信道容量的影响, 但也仅限于发射天线上功率平均分配的情形。文献

**[收稿日期]** 2018-07-08

**[基金项目]** 福建省教育厅基金项目(JAT160260); 集美大学李尚大基金项目(ZC2016008); 校教学改革项目(JY17087)

**[作者简介]** 苏孙庆(1964—), 男, 副教授, 从事量子信息、通信等方面的研究。通信作者: 雷国伟(1977—), 男, 讲师, 博士, 从事信号处理与通信方面的研究。E-mail: gwlei@163.com

[5] 讨论了天线相关性对信道容量的影响,但更侧重空时编码下的MIMO系统的译码性能。以上文献对MIMO系统容量的分析要么偏重功率分配,要么偏重相关性讨论,都还不够全面。本文综合了信道相关、功率分配两个方面,给出了四种情况下MIMO信道的容量,并通过仿真,分析了相关信道和非相关信道下不同功率分配对容量的影响,最后,引入了大规模MIMO系统中奇异值扩展的概念,通过其累积分布(cumulative distribution function, CDF)曲线,来分析MIMO信道的相关度,为基站灵活配置天线提供参考依据。

## 1 MIMO系统信道容量

假设一个MIMO系统,有 $N_t$ 根发射天线和 $N_r$ 根接收天线,将其表述为<sup>[6]</sup>

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w}. \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}$ 表示的是发射端 $N_t$ 根发射天线所发送的信号向量矩阵; $\mathbf{y}$ 为接收端 $N_r$ 根接收天线所接收的信号向量矩阵; $\mathbf{H}$ 为 $N_r \times N_t$ 的矩阵,矩阵中的元素表示第 $i$ 根发射天线发射的信号到达第 $j$ 根接收天线之间的信道衰落系数,即信道增益; $\mathbf{w}$ 为噪声向量,表示统计独立,均值为零,固定方差的加性高斯白噪声。如果在信道 $\mathbf{H}$ 未知的情况下,适合采用平均功率分配;如果信道 $\mathbf{H}$ 已知,则根据奇异值适合采用注水算法进行功率分配。

### 1.1 非相关信道下的容量

#### 1) 平均功率分配

通过对信道矩阵对角化,可得

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^H. \quad (2)$$

$\mathbf{U}$ 为一个 $N_r \times N_r$ 阶的西矩阵,即 $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^H$ 。矩阵 $\mathbf{D}$ 内的对角线上的元素为信道矩阵 $\mathbf{H}$ 的奇异值,并且为一个 $N_r \times N_t$ 的对角矩阵。矩阵 $\mathbf{V}$ 为 $N_t \times N_t$ 阶的西矩阵。将式(2)代入式(1),可得

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{w}}. \quad (3)$$

在式(3)中, $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{U}^H \mathbf{y}$ ,  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{V}^H \mathbf{x}$ ,  $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{U}^H \mathbf{w}$ 。矩阵 $\mathbf{H}$ 的秩等于 $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ 的非零特征值的数目 $k$ 。则对于 $N_r \times N_t$ 的矩阵 $\mathbf{H}$ ,最大的秩 $r = \min(N_r, N_t)$ 。而 $\mathbf{H}$ 的奇异值为特征值的算术平方根,不小于零,记为 $\sqrt{\lambda_i}$ ,于是式(3)可表达为

$$\tilde{y}_i = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i}x_i + \tilde{w}_i, & (i = 1, 2, \dots, k), \\ \tilde{w}_i, & (i = k+1, k+2, \dots, r). \end{cases} \quad (4)$$

式(4)说明,接收信号 $\tilde{y}_i (i = k+1, k+2, \dots, r)$ 与发射信号无关,信道增益为零。其中, $\tilde{w}_i$ 是一个可以确定的值,则接收信号 $\tilde{y}_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 由 $x_i$ 决定。因此,MIMO信道等效于 $k$ 个去耦并行子信道所组成。每个去耦并行子信道所对应的信道增益为 $\sqrt{\lambda_i}$ ,亦即矩阵 $\mathbf{H}$ 的奇异值。则整个MIMO系统的容量 $C$ 等于所有并行子信道容量的和,即

$$C = B \sum_{i=1}^r \log_2(1 + \lambda_i P / (\sigma^2 N_t)) = B \sum_{i=1}^r \log_2(1 + (\gamma / N_t) \lambda_i). \quad (5)$$

其中 $B$ 为子信道带宽, $P$ 为MIMO系统发射端的总功率, $\sigma^2$ 为信道噪声方差, $\gamma = P / \sigma^2$ 表示信噪比,而 $\gamma / N_t$ 表示平均功率分配下第 $i$ 个子信道的信噪比。

#### 2) 注水功率分配

在发射端信道信息已知时,相对平均功率分配而言使用注水算法进行功率分配更优。将MIMO系统分为若干个子信道,每个信道的状态是不一样的。要得到尽可能大的系统容量,就要给信道状态好的分配更多功率,以充分利用,而信道状态不好的,就不给其分配过多的功率或者干脆不给其分配功率,以避免造成系统容量的下降。在总功率约束下,对式(5)改写,并采用拉格朗日数乘法<sup>[7]</sup>,得到子信道功率分配法则 $p_i = (\bar{P} - P / (\gamma \lambda_i))^+$ ,其中: $(\cdot)^+$ 表示 $\max\{\cdot, 0\}$ , $p_i$ 表示第 $i$ 个子信道的

发射功率<sup>[7]</sup>,  $\bar{P}$  为待定常数。可以通过实际运算得到显式解。在注水功率分配下, 整个 MIMO 系统的容量  $C = B \sum_{i=1}^r \log_2(1 + \lambda_i p_i / \sigma^2) = B \sum_{i=1}^r \log_2(1 + \gamma_i \lambda_i)$ 。其中:  $B$  为子信道带宽,  $\sigma^2$  为信道噪声方差,  $\gamma_i = p_i / \sigma^2$  为注水功率分配下第  $i$  个子信道的信噪比。

## 1.2 相关信道下的容量

为了探讨具有相关性的 MIMO 系统的信道容量, 将信道矩阵  $\mathbf{H}$  表达为<sup>[8-9]</sup>

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{H}_w \mathbf{T}^{1/2} \quad (6)$$

其中:  $\mathbf{R}$  为  $N_r \times N_r$  的空间接收相关矩阵,  $\mathbf{T}$  为  $N_t \times N_t$  的空间发射相关矩阵,  $\mathbf{H}_w$  为均值为 0、方差为  $\sigma_H^2$  的独立复高斯随机变量的矩阵。式 (6) 可体现出信道的相关形式。

### 1) 平均功率分配

如果发射端对信道信息未知时, 宜采用平均分配功率, 将式 (6) 代入 MIMO 系统容量公式<sup>[4]</sup>, 得到  $C = B \log_2[\det(\mathbf{I}_{N_r} + (\gamma/N_t) \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{H}_w \mathbf{T} \mathbf{H}_w^H \mathbf{R}^{H/2})]$ , 再作  $N_r$  阶相关矩阵  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中,  $\rho \in [0, 1)$  为相关系数。令  $\mathbf{T} = \mathbf{A}_{N_t}(\rho_{N_t})$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{A}_{N_r}(\rho_{N_r})$ , 其中  $\rho_{N_t}$  为发射端相关系数,  $\rho_{N_r}$  为接收端相关系数。

### 2) 注水功率分配

如果在发射端信道信息已知时, 宜采用注水算法分配功率, 则 MIMO 系统容量公式为  $C = B \cdot \log_2[\det(\mathbf{I}_{N_r} + \mathbf{I} \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{H}_w \mathbf{T} \mathbf{H}_w^H \mathbf{R}^{H/2})]$ , 其中,  $\mathbf{I} = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{N_t}\}$ 。

### 3) 相关性度量

信道的奇异值扩展 (singular value spread) 为评估信道相关性提供了依据<sup>[10]</sup>。由式 (2) 可知  $\mathbf{D} = \text{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_{N_r}}\}$ , 则奇异值扩展  $\kappa = \max\{\sqrt{\lambda_i}\} / \min\{\sqrt{\lambda_i}\}$ 。

## 2 仿真及结果分析

基于 MATLAB 工具进行仿真实验。假设信道为瑞利衰落信道, 信道噪声为零均值加性高斯白噪声, 并且假设信道带宽、发射端的总功率保持不变, 并对 10 000 次仿真结果进行平均。

图 1 为功率注水算法下相关信道与非相关信道的容量比较。可以看到, 不具有相关性的信道容量会比具有相关性的大。因为相关性越大, 对各个子信道来说, 由于耦合效应, 导致等效的信噪比就越小, 总信道容量也就相应越小。同时看到, 天线数的增加对信道容量的影响更大。

图 2 表示功率注水算法下相关信道与非相关信道的容量累积分布。可以看到, 非相关信道的容量分布要优于相关信道的容量分布。同一概率时, 非相关信道的容量比相关信道的容量大, 且非相关信道的平均容量 (曲线的中部描述) 也比相关信道的平均容量大。而非相关信道的中断容量 (曲线的底部描述) 与相关信道的中断容量差别不大。

图 3 显示在信噪比为 5 dB 的情况下, 随着相关系数的变化, 不同功率分配下的信道容量影响趋势。可以看到, 当天线数较少时, 信道相关程度对信道容量的影响不大。但随着天线数的增加, 信道相关程度对信道容量的损害越大。同时看到, 功率注水算法能整体上改善信道容量, 且在信道相关程度越大时效果表现得更为明显。

图 4 从信道的奇异值扩展, 考察了信道的相关性与累积分布函数的关系。从图 4 中看出: 当  $\rho$  越大, 累积分布曲线越陡峭, 说明相关性越低; 另外, 如果增加天线数目, 累积分布曲线变就会得越差。由此可见, 虽然天线数的增加能带来容量的增大 (从图 3 亦能看出), 但也会影响天线之间的相关性。

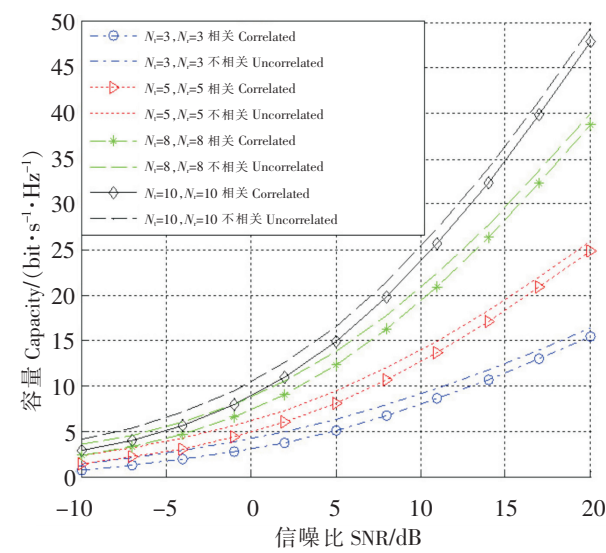


图 1 注水功率分配时相关性或不相关性信道的容量比较

Fig.1 Capacity comparison with water filling between correlated and uncorrelated channels

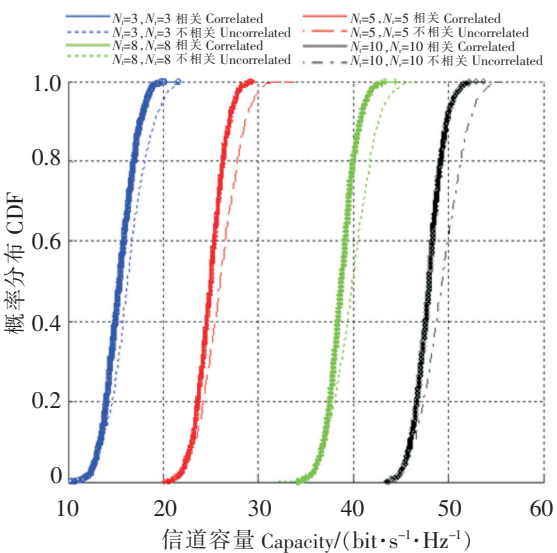


图 2 注水功率分配时相关性或不相关性信道的容量累积分布曲线

Fig.2 CDF of capacity with water filling between correlated and uncorrelated channels

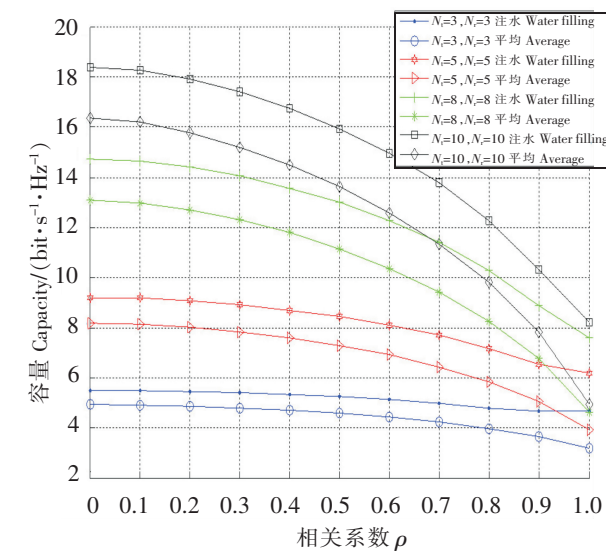


图 3 信道相关系数不同时的容量比较(SNR=5 dB)

Fig.3 Capacity comparison among the channels with various correlated coefficients(SNR=5 dB)

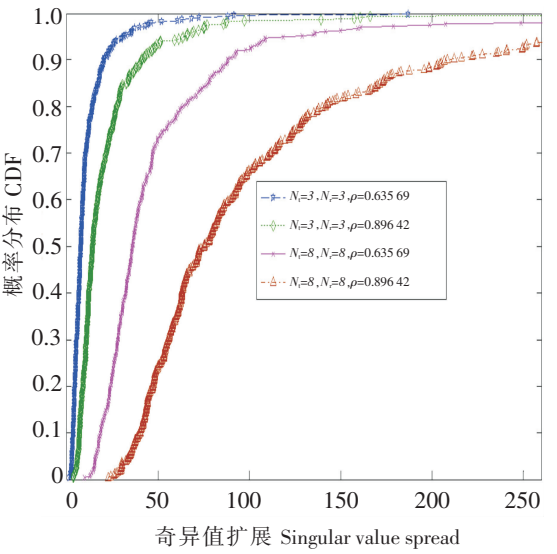


图 4 信道的奇异值扩展与累积分布函数关系

Fig.4 Singular value spread versus CDF

图 5 为相关信道下使用注水算法与使用平均分配的容量比较。可以看出，同样在具有相关性的 MIMO 系统，使用注水功率分配时得到的系统容量要比使用平均功率分配得到的系统容量高。而当信噪比越高时，这两种分配方式得到的系统容量就越接近。因为信噪比越高，信道状态越好。信噪比高到一定量时，可视为信道没有衰减，则每条子信道的信道信息一样好。此时，注水算法得到的分配方案就是平均分配。

图 6 表示相关信道下使用注水算法与使用平均分配的容量累积分布曲线。从图 6 可以看到：在天线数量较少时，注水功率分配的优势还体现不出来；而随着天线数量的增加，注水算法的优势越来越明显，其平均容量（曲线的中部描述）与平均分配时的差距越大；而相比平均容量，中断容量（曲线的底部描述）的差距表现得更为明显。

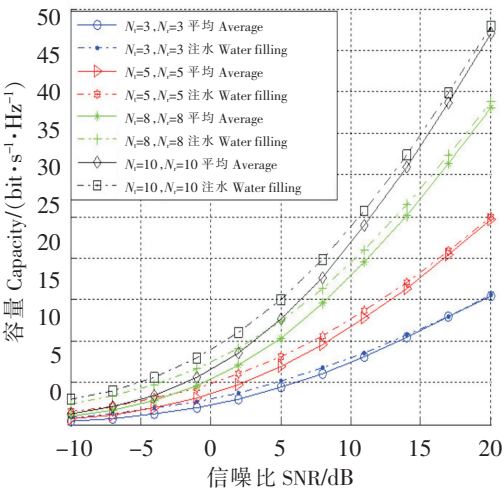


图 5 相关信道下使用注水算法与使用平均分配的容量比较

Fig.5 Capacity comparison between water filling and average distribution under correlated channels

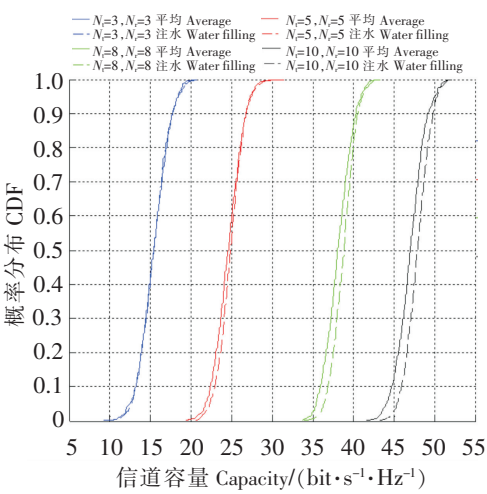


图 6 相关信道下使用注水算法与使用平均分配的容量累积分布曲线

Fig.6 CDF of capacity between water filling and average distribution under correlated channels

3 结论

本文探讨了相关信道在注水功率分配和平均功率分配下的系统容量。通过仿真与分析，说明注水功率分配算法能很好地改善相关信道下的容量。当天线数较少时，注水功率分配的优势还体现不出来。而随着天线数量的增加，天线间的耦合效应越发明显，对信道容量的损害越大，此时使用注水功率分配算法可显著地改善系统的信道容量。

[ 参考文献 ]

[1] 曾凌清, 蔡晓霞, 陈红, 等. 基于信道估计的物理层安全多天线选择功率分配方案 [J]. 计算机应用研究, 2017, 34(3): 879-882.

[2] 蒋留兵, 杨昌昱, 李卓伟. OFDM 和 MIMO 系统中的快速注水功率分配算法 [J]. 电视技术, 2014, 38(15): 178-180.

[3] 孙继禹, 谢红, 刘卓夫. 确定性 MIMO 信道在不同功率条件下的容量分析 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2010, 15(6): 94-98.

[4] 肖雪芳, 林烽, 雷国伟. 天线相关性对多天线系统信道容量的影响 [J]. 厦门理工学院学报, 2016, 24(5): 64-69.

[5] 杨国荣. 基于 V—BLAST 的 MIMO 无线通信系统性能分析 [J]. 系统仿真技术, 2014, 10(1): 81-84.

[6] TELETAR E. Capacity of multi-antenna Gaussian channels [J]. European Transactions on Telecommunications, 1999, 10(6): 585-595.

[7] 姜永权, 刘乃安, 沈民奋, 等. MIMO 系统一种新的功率分配算法及容量分析 [J]. 电子学报, 2007, 35(9): 1749-1753.

[8] CHIZHIK D, FARROKH R F, LING J, et al. Effect of antenna separation on the capacity of BLAST in correlated channels [J]. IEEE Communications Letters, 2000, 4(11): 337-339.

[9] 张雯, 李宏, 何为超. 瑞利相关衰落下 MIMO 系统信道容量 [J]. 弹箭与制导学报, 2006, 26(1): 819-822.

[10] GAO X, EDFORS O, RUSEK F, et al. Massive MIMO performance evaluation based on measured propagation data [J]. IEEE Transactions on wireless communications, 2015, 14(7): 2899-3911.

(责任编辑 朱雪莲 英文审校 黄振坤)