

# 一种基于形态分量的多聚焦图像融合算法

陈 杰, 茅 剑, 张杰敏

(集美大学计算机工程学院, 福建 厦门 361021)

**[摘要]** 提出一种基于形态分量思想的多聚焦图像融合算法。该方法首先对源图像迭代分解, 将其分解为低频和高频两个分量, 并用 curvelet 变换表示低频分量, 然后, 对低频分量采用高斯差分算子定义图像点的特征活跃度和融合规则, 对高频分量的细节特征度量采用加权梯度差的方法来衡量和融合。仿真实验在四组多聚焦图像中进行, 除了与传统的图像融合算法做比较外, 还与系数绝对值最大法的融合算法进行比较。实验结果表明: 该方法在平均梯度、空间频率、信息熵等指标上优于传统的图像融合方法, 同时也优于基于系数绝对值最大法的融合规则。

**[关键词]** 图像融合; 形态分量; curvelet 变换; 高斯差分算子; 特征活跃度; 细节信息

**[中图分类号]** TP 391

## A Novel Algorithm for Multi-focus Image Fusion Based on Morphological Component

CHEN Jie, MAO Jian, ZHANG Jiemin

(Computer Engineering College, Jimei University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** This paper presents a multi-focus image fusion algorithm based on morphological component. Firstly, source images are decomposed into low-frequent components and high-frequent components by iteration, and curvelet transformation is used for low-frequent components. Secondly, the low-frequent components are fused by applying a rule of feature activity which is defined by using the operator of difference of Gaussian, and the high frequent components are fused by means of a rule of details information which is defined by using weighted gradient. Finally, simulation experiments are conducted through four groups of multi-focus images. The experimental results compared with ones by traditional image fusion algorithm and the algorithm of the max absolute value of component coefficients. The experimental results show that the proposed algorithm outperforms other approaches in terms of average gradient, space frequency and entropy.

**Keywords:** image fusion; morphological component; curvelet transform; difference operator of Gaussian; feature activity; details information

## 0 引言

图像融合是以图像为对象的信息融合的研究方向, 其目的是将多个不同或相同类型的传感器在同一时间或不同时间获取的关于某个场景的多幅图像信息加以综合, 从而产生新的有关此场景解释的信

**[收稿日期]** 2018-07-03

**[基金项目]** 福建省教育厅科技项目 (JAT160269); 集美大学科研基金项目 (ZC2016017); 福建省自然科学基金项目 (2017J01762); 厦门市科技局科技重大合作项目 (3502Z20183035, 3502Z0173033)

**[作者简介]** 陈杰 (1978—), 男, 讲师, 硕士, 主要研究方向为机器学习与数字图像处理

息处理过程。通过对多幅传感器图像的融合可克服单一传感器图像在几何、光谱和空间分辨率等方面存在的局限性和差异性并提高图像的质量，有利于对物理现象和事件进行定位、识别和解释<sup>[1]</sup>。

由于镜头景深的限制，当所拍摄的物体与镜头的距离相差较大的情况下，现有的摄像头无法聚焦所拍摄的所有物体。多聚焦图像融合是解决当前问题的方法之一。多聚焦图像融合能将对聚焦在不同位置的图像融合成为一幅图像，从而提供更为清晰的图像，以此表示更准确和可靠的内容，便于人的观察或机器的后续处理。图像融合为人或机器后期的图像处理提供了便利的条件，因而在遥感图像、航天航空、公安安防、工业设计等领域中获得了越来越多的应用<sup>[1-2]</sup>。

目前，图像融合算法主要分为空域和变换域两大类。空域融合算法的主要特点是将带融合的图像进行分块并逐块比较或逐像素点比较，通过空间频率、拉普拉斯能量、梯度算子等检测分块的清晰度，从而选择具有较高清晰度的图像分块或像素点用于融合后的图像<sup>[3]</sup>。变换域图像融合算法基本是对图像进行变换，然后对不同的变换系数采用不同的融合规则进行融合，最终得到融合后的图像。目前，变换域多聚焦图像融合算法主要有基于 DCT 变换<sup>[4-5]</sup>、小波变换<sup>[6-9]</sup>、curvelet 变换<sup>[10-12]</sup>、contourlet 变换<sup>[13-14]</sup>、金字塔分解<sup>[15-16]</sup>等方法。

当前主要的多聚焦图像融合算法都是将图像作为单一分量来进行表示，这也意味着它们在表示图像内容信息的时候具有一定的局限性。如果能将图像分解成多个不同的分量，那么图像内容的表示将会更有效和更完整。

稀疏表示<sup>[17]</sup>是指一幅图像可由一个过完备字典中少数几个原子图像来线性表示。使用稀疏表示可以使图像的能量集中在少数的原子图像上，而这些原子图像同时也反映了待表示图像的主要特征和基本结构。curvelet 变换是一种基于多尺度的图像分析工具，与小波变换相对比，由于 curvelet 变换的基支撑区间具有各向异性的特点，因而 curvelet 变换可用能量更加集中的稀疏的系数来表示图像边缘、纹理等细节信息，特别是能够对奇异曲线进行最优的稀疏逼近表达，因此可以更方便地对图像特征进行分析<sup>[18-20]</sup>。curvelet 因其良好的特性使其在去噪、图像增强、图像恢复等许多领域都得到了广泛的应用<sup>[21-23]</sup>。Starck 等<sup>[24-25]</sup>提出的形态分量分析（morphological component analysis，简称 MCA）就是采用 curvelet 对图像进行分解的，他们认为图像的低频和低频可以用不同字典来稀疏表示，是一种对图像进行分解的方法。

本文根据稀疏表示的特点，使用迭代分解的方法将待融合的源图像进行分解，得到源图像的低频分量和高频分量。随后，对分解后的低频分量和高频分量根据不同的特点制定不同清晰度以便判定，并用于最终的融合，最后将融合后的低频分量与高频分量合并，以期得到真正融合后的结果。

1 稀疏表示与 curvelet 变换

设  $\mathbf{x}$  是  $n$  维信号，

$$\mathbf{x} = \Phi \alpha = \sum_{i=1}^L \varphi_i \alpha_i, \tag{1}$$

其中  $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  称为字典， $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  是  $\Phi$  的系数表示。若  $\mathbf{x}$  是  $n$  维向量， $L \gg n$ ，则称  $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  是一个过完备字典。找出信号  $\mathbf{x}$  的最稀疏表示，即  $\alpha$  中非零元最少的情況：

$$\{\alpha\} = \operatorname{Argmin} \|\alpha\|_0 \quad \text{s. t. } \mathbf{x} = \Phi \alpha. \tag{2}$$

以多分辨率为核心的小波变换克服了傅里叶变换在图像处理上的不足，因此得到了广泛的应用<sup>[26]</sup>。但是由于二维的小波变换是由一维的小波变换所推广得到的，因此小波变换图像上仍然只能描述图像的点奇异性，而无法描述线奇异和面奇异等高维信号特征。此外，由于小波描述的是水平、垂直和对角线三个方向的特性，而对于边缘等多方向的图像特征无法得到较好的描述<sup>[17]</sup>。

在 Starck 等<sup>[24-25]</sup>的假设中，原始信号可以表示为形态特征明显差异的不同分量的若干信号的叠加，即： $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i$ 。对于每一个源信号分量  $x_i$ ，都存在着有且仅能稀疏表示该信号的字典  $\varphi_i$ ，而无

法稀疏表示其他信号。即对于每个  $x_i = \Phi_i \alpha^{(i)}$  ,  $\alpha^{(i)}$  是稀疏的, 而对于  $x_j = \Phi_j \alpha^{(j)}$  , 当  $i \neq j$  时,  $\alpha^{(i)}$  不是稀疏的, 即:  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \Phi_i \alpha^{(i)}$  。Starck 等<sup>[24]</sup>将图像的低频分量称为 Cartoon 分量 (记为  $\mathbf{x}_C$  ), 高频分量称为 Texture 分量 (记为  $\mathbf{x}_T$  ), 则原图像可稀疏表示为

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_C + \mathbf{x}_T = \Phi_C \alpha_C + \Phi_T \alpha_T。$$

## 2 基于形态分量的图像融合算法

### 2.1 图像融合框架

本文图像融合算法的过程主要由“分解—融合—相加”三个部分组成。融合算法框架如图 1 所示。

分解：基于稀疏表示的特点，将待融合的源图像迭代分解，并使用字典表示分解后的低频分量，同时将原图像减去低频分量，得到高频分量。

融合：根据低频和高频分量的不同特点，定义不同的清晰度规则，并将其用于融合处理，从而得到新的低频分量和高频分量。

相加：将新的低频分量和高频分量合并，得到最终的融合后的图像。

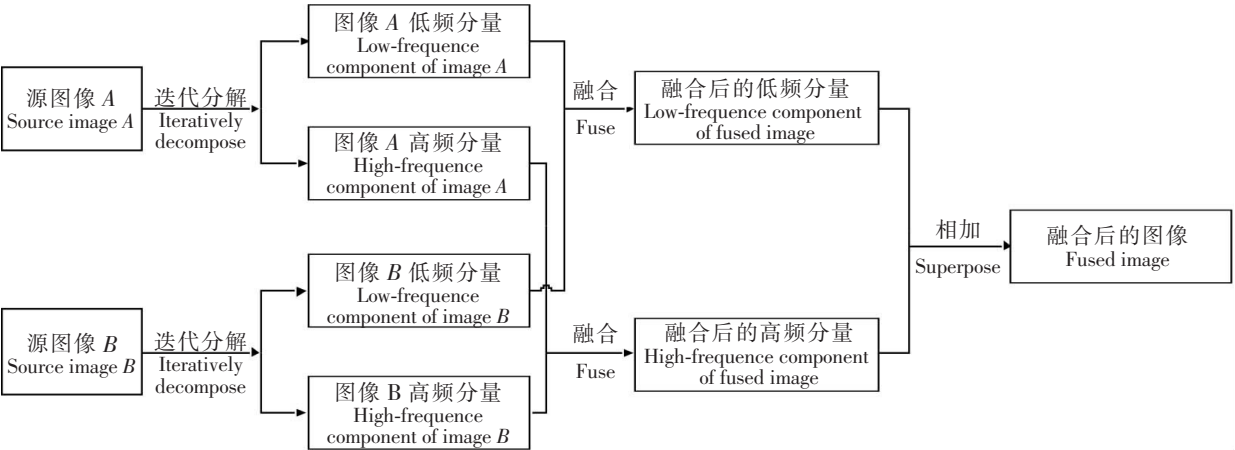


图 1 图像融合算法框架

Fig.1 Frame of image fusion algorithm

### 2.2 迭代分解

图像的迭代分解使用 Starck 等<sup>[24-25]</sup>的思想方法，使用 curvelet 变换和滑动重叠窗口的局部离散余弦变换分别作为低频分量和高频分量所表示的字典，具体分解算法如下：

```
输入  原始图像  $I_0$ 
输出  图像低频分量  $I_1$  , 高频分量  $I_2$ 

Step1  定义最大阈值  $\lambda_{\max}$  和最小阈值  $\lambda_{\min}$  , 低频系数融合规则, 初始化  $I_0$  为原始图像,  $I_1 = 0$  ,  $I_2 = 0$  , 初始化迭代次数  $N$  , 阈值  $\delta = \lambda_{\max}$ 

Step2
while   $i < N$ 
{
    for  $k = 1$  to 2
    {
        计算  $r = I_0 - I_1 - I_2$  ;
        对  $I_k + r$  做变换  $T_k$  , 得系数  $\alpha_i$  ;
        对  $\alpha_i$  做阈值处理得  $\alpha'_k$  ;
```

使用  $\alpha'_k$  重建  $I_k = \Phi_k \alpha_k$ ;

$$\delta = \delta - (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})/N;$$

$$i = i + 1;$$

迭代结束完毕, 即可获得低频分量  $I_1$  和 高频分量  $I_2$ , 且  $I_0 \approx I_1 + I_2$

如图 2 所示, a、b 分别为原始的左聚焦和右聚焦图像, c、e 分别为 a 经分解后得到的低频分量和 高频分量, d、f 分别为 b 经分解后得到的低频分量和 高频分量。

### 2.3 低频系数融合规则

由于分解后的低频系数保留了大量的原始图像整体特征的信息和部分边缘信息, 因此在融合过程中需要选取较为清晰的部分。由于图像中清晰的部分往往体现出较高的对比度, 每个像素点与其相邻的像素点的差值相对较大, 即图像清晰程度由区域内像素共同决定。因此在光滑部分的融合中需要充分体现其细节信息, 细节信息越丰富的部分, 图像就越清晰。Jiang 等<sup>[27]</sup>认为图像分解后的系数的绝对值体现了细节信息的保留程度, 因此建议分解后采用绝对值最大法进行融合。为了能进一步评价低频分量中的点特征活跃度, 本文使用高斯差分模板<sup>[28]</sup>作为低频点特征活跃度的算子, 由此来定义低频系数的融合规则。

**定义 1** 参数为  $\sigma^2$  高斯卷积模板  $G_\sigma(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2} / \sqrt{2\pi}\sigma$ , 使用参数为  $\sigma^2$  的高斯模板对图像进行卷积操作, 即  $g(x, y) = G_\sigma(x, y) * f(x, y)$ , 可对图像  $f(x, y)$  进行平滑操作。

故高斯差分算子  $F$  定义为:

$$F = G_{\sigma_1}(x, y) - G_{\sigma_2}(x, y) = (e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_1^2}/\sigma_1 - e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_2^2}/\sigma_2) / \sqrt{2\pi}. \quad (4)$$

由于高斯模板滤波是对图像进行平滑处理, 两个高斯模板滤波后相减即把图像中灰度值变换比较平坦的区域给消除掉了, 故高斯差分模板可以作为边缘检测和特征提取的算子<sup>[29-30]</sup>。本文对低频分量使用高斯差分算子作为细节特征活跃度的衡量标准。

**定义 2** 特征活跃度  $f_a(x, y) = F * f(x, y)$ , 在融合过程中,  $f_a(\cdot)$  的值越大, 代表该点能够体现的细节信息和特征越多, 表明该像素点与其邻域的对比越大, 即表明该点的清晰度越大, 因此低频分量的融合规则为:

$$L_F(i, j) = \alpha_{ij} \times L_A(i, j) + (1 - \alpha_{ij}) \times L_B(i, j), \quad (5)$$

其中  $\alpha_{ij} = f_{aA}(i, j) / (f_{aA}(i, j) + f_{aB}(i, j))$ 。

### 2.4 高频系数融合规则

由于高频分量是在原图像中去除了低频信息, 其主要保留的是图像中的细节信息, 因此在融合过程中需要选取较为清晰的部分。由于图像的每一个像素点与其相邻的像素点都是相关的, 图像清晰与否由区域内像素共同决定, 因此在决定高频分量融合时, 需要充分考虑与其相邻像素的关系。为了体现像素点的清晰度, 本文在纹理部分采用加权边缘信息用于判断像素点的清晰度。本文定义细节信息 (details information) 作为高频分量融合的标准。

**定义 3** 细节信息

$$d(x, y) = \sum_{i=-s}^s \sum_{j=-t}^t w(i, j) \text{abs}(f(x+i, y+j) - f(x, y)), \quad (6)$$

其中, 细节信息窗口大小为  $(2s+1) \times (2t+1)$ 。

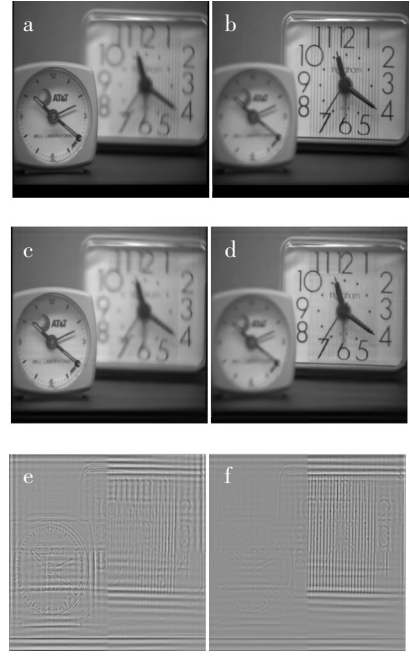


图 2 多聚焦图像的迭代分解

Fig.2 Iterative decomposition of multifocus image

细节信息窗口大小会影响融合的效果, 过大的窗口对于保持边缘细节毫无意义, 会让过多的像素影响高频融合效果, 且容易引入噪声。此外窗口越大, 冗余度越大, 计算复杂度也越大。因此本文选择  $3 \times 3$  作为衡量细节信息的窗口大小, 权值矩阵  $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。

本算法的高频信息的融合规则为

$$H_F(x, y) = \begin{cases} H_A(x, y) & \text{if } d_A(x, y) > d_B(x, y), \\ (H_A(x, y) + H_B(x, y))/2 & \text{if } d_A(x, y) = d_B(x, y), \\ H_B(x, y) & \text{if } d_A(x, y) < d_B(x, y). \end{cases} \quad (7)$$

### 3 实验结果与分析

为了对上述算法进行验证, 本文使用了图 3 的四组测试图像进行实验仿真, 采用 Matlab R2015b 进行仿真实验, 分解迭代次数为 60 次。同时对基于离散小波变换的融合算法 (记为 DWT)、基于 PCA 的融合算法 (记为 PCA)、基于金字塔的融合算法 (梯度金字塔 (记为 GP) 和拉普拉斯金字塔 (记为 LP)) 和使用系数的绝对值最大法的融合算法 (记为 Max) 等五种算法进行了仿真实验。实验结果如图 4 所示。

图 4 显示了六种图像融合的算法, 可以看到, 本文方法的融合算法与绝对值最大法、基于 DWT、基于 PCA、梯度金字塔和拉普拉斯金字塔方法的融合算法在视觉效果上看差不多。

为进一步说明本算法, 本文同时进行客观评价指标的评价。客观评价指标有:

#### 1) 平均梯度

$$\text{avg\_gradient} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sqrt{G_x^2(i, j) + G_y^2(i, j)} / (MN), \quad (8)$$

其中,  $G_x(i, j)$  和  $G_y(i, j)$  分别为像素点  $(i, j)$  在  $x$  方向和  $y$  方向的一阶差分。

#### 2) 空间频率

$$\text{space\_frequency} = \sqrt{F_R^2 + F_C^2}, \quad (9)$$

其中,  $F_R$  和  $F_C$  分别表示图像的行频率和列频率,

$$F_R = \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (f(i, j) - f(i, j-1))^2 / (MN)},$$

$$F_C = \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (f(i, j) - f(i-1, j))^2 / (MN)}.$$

#### 3) 熵

$$H = - \sum_{k=0}^{L-1} p(k) \log_2 p(k). \quad (10)$$

#### 4) 互信息

$$MI_{AB/F} = MI_{AF} + MI_{BF}, \quad (11)$$

其中

$$MI_{AF} = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{L-1} p_{AF}(i, k) \log_2 p_{AF}(i, k) / (p_A(i) p_F(k)),$$

$$MI_{BF} = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{L-1} p_{BF}(i, k) \log_2 p_{BF}(i, k) / (p_B(i) p_F(k)).$$

$p_{AF}(i, k)$  与  $p_{BF}(i, k)$ ,  $i, k = 0, 1, \dots, L-1$  分别表示源图像  $A$  与融合后图像  $F$  的联合直方图和源图像  $B$  与融合后图像  $F$  的联合直方图。



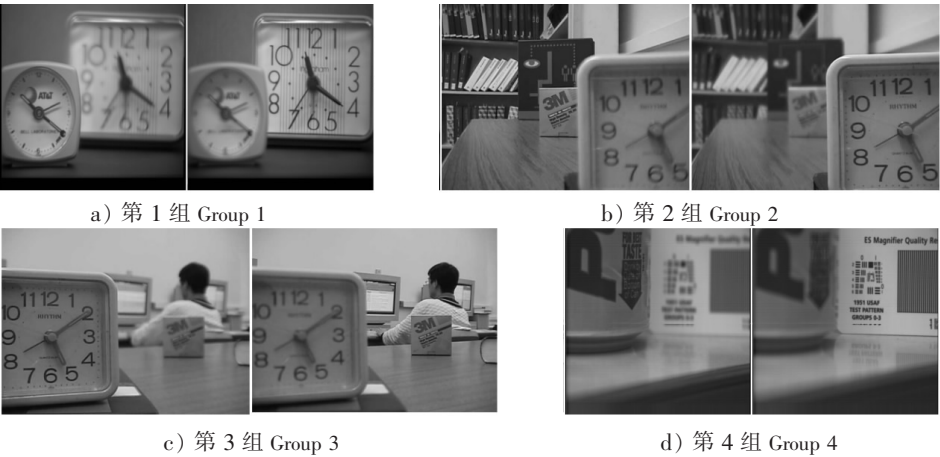


图 3 实验测试图像  
Fig.3 Test Image for experiments

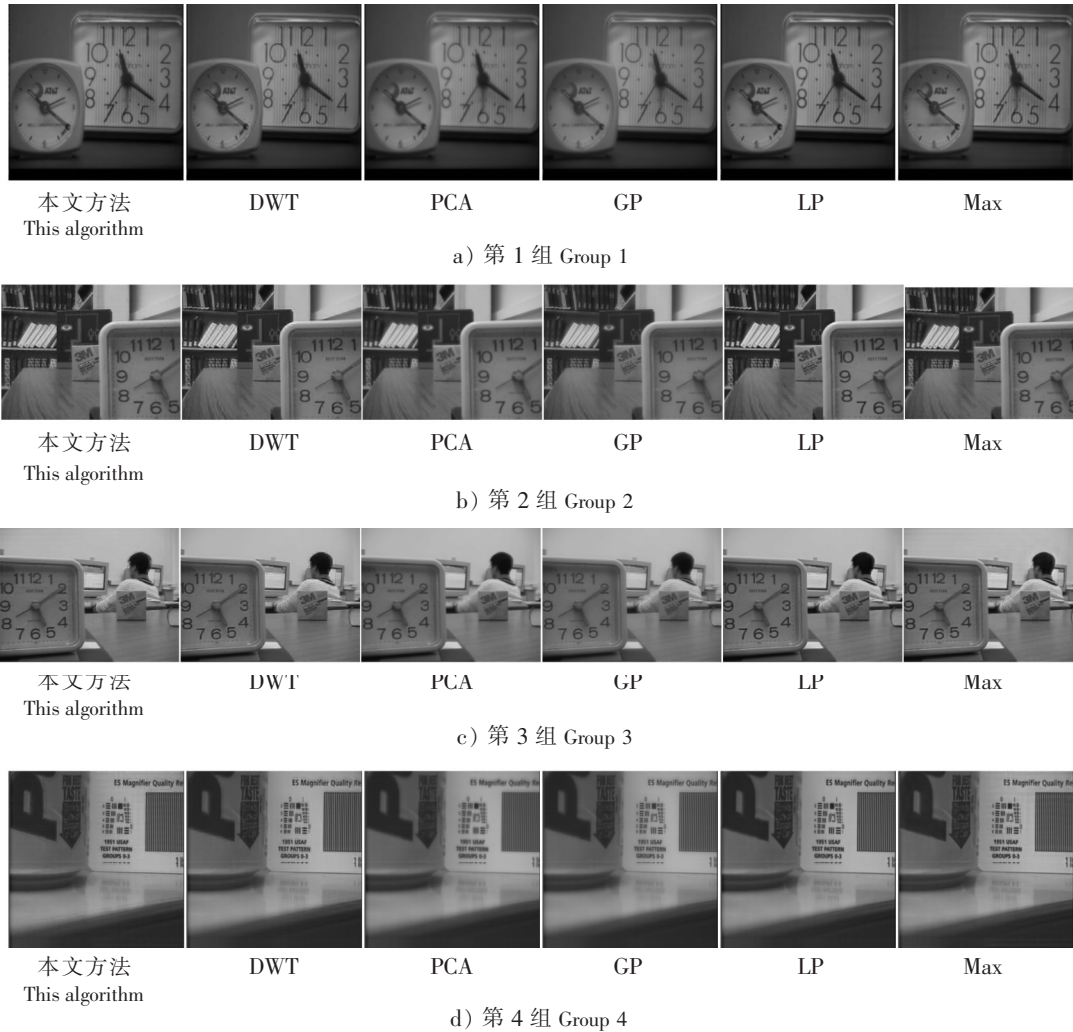


图 4 融合算法的实验仿真结果  
Fig.4 Simulation experiment results of fusion algorithm

从表 1 可见：从平均梯度上看，本文所提出的算法在实验数据上比大多数的融合算法都要好，仅仅在第 2 组中稍弱于 DWT 方法；从空间频率上看，本文提出的图像融合算法均比传统的融合算法来得更好；在信息熵方面，本算法在第 1 组和第 3 组中也表现出比其他融合效果更好的指标，在第 2 组中仅稍弱于 DWT 方法与拉普拉斯金字塔方法，在第 4 组中仅稍弱于系数绝对值最大法。说明该方法在从源图像获取梯度信息、边缘保护等方面要优于其他算法。但本文的方法也存在一定的不足，那就是在互信息的指标上显得相对较弱。

表 1 测试图像的客观评价指标  
Tab. 1 Objective evaluation indices of test images

测试图像 Test image	方法 Algorithm	指标 Object				测试图像 Test image	方法 Algorithm	指标 Object			
		平均梯度 Average gradient	空间频率 Space frequency	信息熵 Entropy	互信息 Mutual information			平均梯度 Average gradient	空间频率 Space frequency	信息熵 Entropy	互信息 Mutual information
第 1 组 Group 1	本文方法 This algorithm	3. 0116	9. 0520	7. 0895	4. 5641	第 2 组 Group 2	本文方法 This algorithm	4. 8410	16. 0567	7. 3007	3. 9772
	DWT	2. 8910	8. 0377	7. 0428	4. 3891		DWT	4. 8578	15. 4422	7. 3188	3. 8334
	PCA	1. 9816	5. 0662	6. 9648	4. 8458		PCA	2. 9642	8. 9316	7. 1907	4. 1752
	GP	2. 2049	6. 2938	7. 0478	4. 5348		GP	3. 6658	12. 2968	7. 2010	3. 9639
	LP	2. 9322	8. 2883	7. 0590	4. 7409		LP	4. 8068	15. 6028	7. 3416	4. 1951
	Max	2. 3024	5. 9929	7. 0662	4. 7634		Max	3. 6431	11. 0135	7. 2673	4. 1310
第 3 组 Group 3	本文方法 This algorithm	3. 8006	13. 0571	7. 0974	4. 4559	第 4 组 Group 4	本文方法 This algorithm	4. 3318	14. 3867	7. 1391	4. 5028
	DWT	3. 8536	12. 9038	7. 0454	4. 5767		DWT	4. 2695	14. 0544	7. 1242	4. 4610
	PCA	2. 4102	7. 7416	6. 9658	4. 9369		PCA	2. 9926	10. 6239	7. 0895	4. 7985
	GP	2. 8929	10. 0295	6. 9600	4. 6317		GP	3. 4275	11. 9599	7. 0922	4. 4896
	LP	3. 8101	13. 0241	7. 0512	4. 8916		LP	4. 3018	14. 0762	7. 1296	4. 7915
	Max	2. 8821	9. 0717	7. 0606	4. 5347		Max	3. 8977	12. 9694	7. 1534	4. 6837

4 结论

本文根据稀疏表示的特点，使用迭代分解的方法，提取图像的不同形态分量。在低频分量，本文使用高斯差分算子来定义图像的特征活跃度，并以此作为融合规则；而在高频分量中使用加权模板定义细节信息，并相应作为融合规则。最后将融合后的低频分量和高频分量叠加得到最终的融合图像。实验结果表明，该方法在主观评价中有着较好表现，同时，在客观评价中大多数指标优于其他图像融合算法。

[ 参 考 文 献 ]

[1] 才溪. 多尺度图像融合理论与方法 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2014.

[2] JAMES ALEX PAPPACHEN, DASARATHY BELUR V. Medical image fusion: a survey of the state of the art [J]. Information Fusion, 2017, 19: 4-19.

[3] LI SHUTAO, KANG XUDONG, FANG LEYUAN. Pixel-level image fusion: a survey of the state of the art [J]. Information Fusion, 2017, 33: 100-112.

[4] TANG J S. A contrast based image fusion technique in the DCT domain [J]. Digital Signal Processing, 2004, 14(3): 218-226.

[5] HAGHIGHAT M B A, AGHAGOLZADEH A, SEYEDARABI H. Multi-focus image fusion for visual sensor networks in DCT domain [J]. Computers & Electrical Engineering, 2011, 37(5): 789-797. DOI:10. 1016/J. compeleceng. 2011. 04. 016.

[6] 晁锐, 张科, 李言俊. 一种基于小波变换的图像融合算法 [J]. 电子学报, 2004, 32(5): 750-753.

[7] HILL PAUL, AL-MUALLA MOHAMMED EBRAHIM, BULL DAVID. Perceptual image fusion using wavelets [J].

- IEEE Transactions on Image Processing, 2017, 26(3): 1076-1088.
- [8] YU BITING, JIA BO, DING LU. Hybrid dual-tree complex wavelet transform and support vector machine for digital multi-focus image fusion [J]. Neurocomputing, 2016, 182(19): 1-9.
- [9] ABDIPOUR MOHAMMAD, NOOSHYAR MEHDI. Multi-focus image fusion using sharpness criteria for visual sensor networks in wavelet domain [J]. COMPUTERS & ELECTRICAL ENGINEERING, 2016, 51(4): 74-88.
- [10] YANG YONG, TONG SONG, HUANG SHUYING. A hybrid method for multi-focus image fusion based on fast discrete curvelet transform [J]. IEEE Access, 2017, 5: 14898-14913.
- [11] GATTIM N K, RAJESH V, PARTHEEPAN R. Multimodal image fusion using curvelet and genetic algorithm [J]. Journal of Scientific & Industrial Research [J]. 2017, 76(11): 694-699.
- [12] DONG LIMIN, YANG QINGXIANG, WU HAIYONG. High quality multi-spectral and panchromatic image fusion technologies based on curvelet transform [J]. Neurocomputing, 2015, 159(7): 268-274.
- [13] 时丕丽, 郭雷, 李晖晖. 基于 NSCT 的 SAR 与可见光图像融合方法 [J]. 计算机应用研究, 2013, 30(5): 1568-1570.
- [14] SRIVASTAVA R, KHARE A. Multifocus noisy image fusion using contourlet transform [J]. Imaging Science Journal, 2015, 63(7): 408-422.
- [15] XU HUA, WANG YAN, WU YUJING. Infrared and multi-type images fusion algorithm based on contrast pyramid transform [J]. Infrared Physics & Technology, 2016, 78(9): 133-146.
- [16] ZHANG QIANG, WANG LONG, LI HUIJUAN. Similarity-based multimodality image fusion with shiftable complex directional pyramid [J]. Pattern Recognition Letters, 2011, 32(13): 1544-1553.
- [17] 焦李成, 尚荣华, 刘芳, 等. 稀疏学习、分类与识别 [M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- [18] MA JIANWEI, PLONKA GERLIND. The curvelet transform [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2010, 27(2): 118-133.
- [19] CANDLES E J, DONOHO D L. Recovering edges in ill-posed inverse problems: optimality of curvelet frames [J]. Annals of Statistics, 2002, 30(3): 784-842.
- [20] CANDLES EMMANUEL, DEMANET LAURENT, DONOHO DAVID. Fast discrete curvelet transforms [J]. Multiscale Modeling & Simulation, 2006, 5(3): 861-899.
- [21] STARCK J L, CANDLES E J, DONOHO D L. The curvelet transform for image denoising [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2002, 11(6): 670-684.
- [22] STARCK J L, MURTAGH F, CANDLES E J. Gray and color image contrast enhancement by the curvelet transform [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(6): 706-717.
- [23] HERRMANN FELIX J, HENNENFENT GILLES. Non-parametric seismic data recovery with curvelet frames [J]. Geophysical Journal International, 2008, 173(1): 233-248.
- [24] STARCK J L, ELAD M, DONOHO D. Redundant multiscale transforms and their application for morphological component analysis [J]. Advances in Imaging and Electron Physics, 2004, 132(82): 287-348.
- [25] STARCK J L, ELAD M, DONOHO D. Image decomposition via the combination of sparse representation and a variational approach [J]. IEEE Trans Image Processing, 2005, 14(10): 1570-1582.
- [26] 章毓晋. 图像工程: 上册. 图像处理 [M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [27] JIANG Y, WANG M H. Image fusion with morphological component analysis [J]. Information Fusion, 2014(18): 107-118.
- [28] 左飞. 图像处理的数学修炼 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2017.
- [29] 高健, 黄心汉, 彭刚, 等. 基于 Harris 角点和高斯差分的特征点提取算法 [J]. 模式识别与人工智能, 2008, 21(2): 171-176.
- [30] 王兆仲, 周付根. 基于高斯差分滤波器的图像光场矫正 [J]. 红外与激光工程, 2000, 29(6): 64-67.

(责任编辑 朱雪莲 英文审校 黄振坤)