

基于分数阶微分方程的木马病毒传播规律

叶星昶

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 建立并研究了一类基于分数阶微分方程的木马病毒传播模型, 利用分数阶微分方程的相关理论, 详细证明了该模型非负解的有界性、存在唯一性, 分析了平衡点的存在性及其局部稳定性, 并通过数值试验验证了理论结果的正确性。得到: 在基本再生数小于1的情况下, 未感染平衡点是局部渐近稳定的, 病毒会消亡; 在基本再生数大于1时, 感染平衡点局部渐近稳定, 病毒将扩散。根据所得到的理论结果, 给出了控制木马病毒传播的有效措施。

[关键词] 木马病毒; 分数阶微分方程; 平衡点; 稳定性; 传播规律

[中图分类号] O 175; O 242

An Epidemic Model of the Trojan Virus Propagation Based on Fractional Differential Equations

YE Xingyang

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, an epidemic model of trojan virus based on the fractional differential equation was studied. By means of the theory of fractional differential equations, the existence and uniqueness of the positive solution were established, then the existence and stability condition of the equilibrium of the model were analyzed. It was showed that if the basic reproduction number is less than 1, the infection free equilibrium is locally asymptotically stable, virus will die out, and if the basic reproductive number is greater than 1, the infection equilibrium is stable and the virus will spread. Some numerical experiments are carried out to confirm the obtained results. In addition, some effective measures are given to control the spread of the trojan virus.

Keywords: trojan virus; fractional differential equation; equilibrium point; stability; propagation

0 引言

随着信息传播速度的加快和计算机的普遍使用, 信息安全问题成为了人们关注的一大热点, 木马病毒的出现也极大威胁了信息安全。与其他计算机病毒相比, 木马病毒更具有“伪装性”, 木马病毒通常以看起来无害的程序为载体存在于用户的电脑中, 一旦用户触发了相关的网页或者软件等, 程序就开始运行, 然后夺取用户的控制权, 从而达到窃取资料的目的。因此, 研究木马病毒的传播规律从而找出有效控制木马病毒传播的措施, 是非常有必要且具有重要的意义。

由于计算机病毒与生物病毒高度相似, 因此, 可以利用经典的流行病仓室模型来研究计算机

[收稿日期] 2018-03-30

[基金项目] 福建省自然科学基金项目(2016J05012, 2017J01557); 福建省教育厅面上项目(JT180262)

[作者简介] 叶星昶(1982—), 女, 副教授, 从事计算数学和生物数学方向研究。E-mail: yexingyang@jmu.edu.cn

病毒的传播规律,这方面已有大量的研究结果^[1-8]。例如,文献 [1-2] 考虑了计算机病毒的 SIRS 模型,文献 [3-4] 研究了具有潜伏期的 SEIR 模型。然而,上述这些研究结果都是基于整数阶微分方程模型。

近几十年来,由于一些学科新现象新定律的发现,分数阶微积分已成为一个研究热点。随着分数阶微分方程的发展,分数阶模型更加接近实际情况,能对生物系统进行更为细致深入的研究,越来越多的研究者也开始关注分数阶传染病模型^[9-10]。然而,目前尚无文献考虑利用分数阶方程模型来研究木马病毒的传播情况。而且,分数阶微分方程在研究一些具有记忆过程、遗传性质、异质材料及远程扩散过程比整数阶方程模型更具有优势。木马病毒通过将自身伪装吸引用户下载执行,向施种木马者提供打开被种主机的门户,使施种者可以任意毁坏、窃取被种者的文件,甚至远程操控被种主机。经典的整数阶方程如反应扩散方程就很难准确地描述木马病毒的这种远程操控和大范围传播的扩散现象,而分数阶导数的全局性使得分数阶微分方程能更准确地描述木马病毒的这种远程扩散现象。因此,本文通过建立合适的分数阶微分方程模型研究木马病毒的传播规律。

1 木马病毒传播模型

由于木马病毒一旦被计算机用户触发,则电脑立刻中病毒,因此木马病毒几乎没有潜伏期。基于此,假设在木马病毒传播范围内的计算机用户有 3 种类型:1) 易感者 S , 指尚未感染木马病毒并有可能感染病毒的用户,在 t 时刻其数量记为 $S(t)$; 2) 感染者 I , 指已经感染木马病毒的用户,在 t 时刻其数量记为 $I(t)$; 3) 免疫者 R , 指具有免疫不会再感染木马病毒的用户,在 t 时刻其数量记为 $R(t)$ 。木马病毒在计算机间的传播情况如图 1 所示。

图 1 中: γ 为 t 时刻进入系统的计算机用户数量; μ 表示易感者因为安装木马补丁成为免疫者的比例; β 为感染率,指的是在一定时间内,易感者因为没有安装木马补丁而感染上木马病毒,由易感者转变成感染者的计算机总数为 βSI ; ξ 表示感染上木马病毒的计算机在进行杀毒后打补丁或升级系统从而获得永久免疫的比例。考虑到计算机用户在关闭计算机之后,木马病毒不再活跃,因此 t 时刻有 κ 比例的用户从易感者、感染者、免疫者移出系统。根据以上假设,建立如下的木马病毒传播的整数阶微分方程模型:

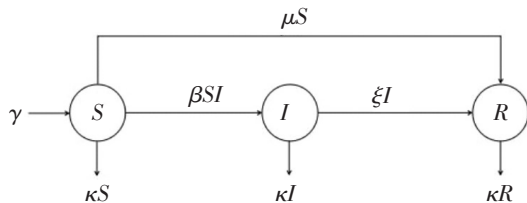


图 1 木马病毒传播过程示意图

Fig.1 The propagation process of trojan virus

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \gamma - \beta SI - \mu S - \kappa S, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \xi I - \kappa I, \\ \frac{dR}{dt} = \mu S + \xi I - \kappa R. \end{cases} \quad (1)$$

借鉴文献 [11] 的方法,在模型 (1) 的基础上引入分数阶导数,得到如下的分数阶微分方程模型:

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha S = \gamma^\alpha - \beta^\alpha SI - (\mu^\alpha + \kappa^\alpha) S, \\ {}^c D_t^\alpha I = \beta^\alpha SI - (\xi^\alpha + \kappa^\alpha) I, \\ {}^c D_t^\alpha R = \mu^\alpha S + \xi^\alpha I - \kappa^\alpha R, \end{cases} \quad (2)$$

其中, ${}^c D_t^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) 表示 α 阶 Caputo 分数阶导数^[12]。

2 解的有界性及唯一性

为证明本节的结论,需要用到下面的几个引理。

引理 1^[13] (广义中值定理) 设 $f(t) \in C[a, b]$, 且 ${}^c D_t^\alpha f \in C(a, b]$, 对 $0 < \alpha \leq 1$, 有 $f(t) = f(a) + ({}^c D_t^\alpha f)(\zeta)(t-a)^\alpha/\Gamma(\alpha)$, 其中 $a \leq \zeta \leq t, \forall t \in (a, b]$ 。

引理 2^[14] 设 $u(t)$ 是 $[t_0, \infty)$ 上的连续函数, 且满足 ${}^c D_t^\alpha u(t) \leq -\eta u(t) + \omega, u(t_0) = u_{t_0}$, 其中 $0 < \alpha < 1, (\eta, \omega) \in \mathbf{R}^2, \eta \neq 0$, t_0 为初始时刻, 则有 $u(t) \leq (u_{t_0} - \omega/\eta)E_\alpha[-\eta(t - t_0)^\alpha] + \omega/\eta$, 这里, $E_\alpha(z)$ 是参数为 α 的 Mittag-Leffler 函数^[12]。

鉴于问题的实际意义, 只关注解的非负性、有界性及存在唯一性。记 $\mathbf{R}_+^3 = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x \geq 0\}$ 且 $x(t) = (S(t), I(t), R(t))^T$ 。

下面给出主要定理。

定理 1 模型 (2) 所有从 \mathbf{R}_+^3 出发的解都是非负且一致有界的。

证明 假设当 $t = 0$ 时, $S(t) = 0$ 。首先证明 $S(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ 。假设 $S(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ 不成立, 则存在 $t_1 > 0$, 使得当 $0 \leq t < t_1$ 时, $S(t) > 0$, 当 $t = t_1$ 时, $S(t) = 0$, 当 $t > t_1$ 时, $S(t) < 0$ 。

由模型 (2) 的第一个方程可得 ${}^c D_t^\alpha S|_{t=t_1} = \gamma^\alpha > 0$ 。由引理 1 可知, $S(t_1^+) > 0$, 这与假设对任意的 $t > t_1$ 都有 $S(t) < 0$ 矛盾。于是对任意的 $t \geq 0$, 都有 $S(t) \geq 0$ 。用同样的方法可以证明: 对任意的 $t \geq 0$ 都有 $I(t) \geq 0, R(t) \geq 0$ 。下面证明模型 (2) 非负解的一致有界性。

将式 (2) 中三个式子相加可得 ${}^c D_t^\alpha N = \gamma^\alpha - \kappa^\alpha N$, 其中, $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ 。由引理 2 知, $N(t) \leq (N(0) - \gamma^\alpha/\kappa^\alpha)E[-\kappa^\alpha t^\alpha] + \gamma^\alpha/\kappa^\alpha$ 。于是当 $t \rightarrow \infty$ 时 $N(t) \rightarrow \gamma^\alpha/\kappa^\alpha$, 且 $0 < N(t) \leq \gamma^\alpha/\kappa^\alpha$ 。因而, 模型 (2) 所有从 \mathbf{R}_+^3 出发的解都位于区域 $\Omega = \{(S, I, R) \in \mathbf{R}_+^3 \mid S + I + R \leq \gamma^\alpha/\kappa^\alpha + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0\}$ 内。

定理 2 模型 (2) 在 \mathbf{R}_+^3 上存在唯一解。

证明 根据定理 1, 只需在区域 Ω 内考虑解的存在唯一性。记 $X = (S, I, R), \bar{X} = (\bar{S}, \bar{I}, \bar{R})$ 。考虑映射 $H(X) = (H_1(X), H_2(X), H_3(X))$, 其中

$$\begin{cases} H_1(X) = \gamma^\alpha - \beta^\alpha SI - (\mu^\alpha + \kappa^\alpha)S, \\ H_2(X) = \beta^\alpha SI - (\xi^\alpha + \kappa^\alpha)I, \\ H_3(X) = \mu^\alpha S + \xi^\alpha I - \kappa^\alpha R. \end{cases} \quad (3)$$

$\forall X, \bar{X} \in \Omega$, 由式 (3) 可得,

$$\begin{aligned} \|H(X) - H(\bar{X})\| &= |H_1(X) - H_1(\bar{X})| + |H_2(X) - H_2(\bar{X})| + |H_3(X) - H_3(\bar{X})| \\ &= |-\beta^\alpha(SI - \bar{S}\bar{I}) - (\mu^\alpha + \kappa^\alpha)(S - \bar{S})| + |\beta^\alpha(SI - \bar{S}\bar{I}) - (\xi^\alpha + \kappa^\alpha)(I - \bar{I})| + \\ &\quad |\mu^\alpha(S - \bar{S}) + \xi^\alpha(I - \bar{I}) - \kappa^\alpha(R - \bar{R})| \\ &\leq 2\beta^\alpha|SI - \bar{S}\bar{I}| + (2\mu^\alpha + \kappa^\alpha)|S - \bar{S}| + (2\xi^\alpha + \kappa^\alpha)|I - \bar{I}| + \kappa^\alpha|R - \bar{R}| \\ &= 2\beta^\alpha|SI - \bar{S}\bar{I} + \bar{S}\bar{I} - \bar{S}\bar{I}| + (2\mu^\alpha + \kappa^\alpha)|S - \bar{S}| + (2\xi^\alpha + \kappa^\alpha)|I - \bar{I}| + \kappa^\alpha|R - \bar{R}| \\ &\leq (2\mu^\alpha + \kappa^\alpha + 2\beta^\alpha\bar{I})|S - \bar{S}| + (2\xi^\alpha + \kappa^\alpha + 2\beta^\alpha\bar{S})|I - \bar{I}| + \kappa^\alpha|R - \bar{R}| \\ &\leq (2\mu^\alpha + \kappa^\alpha + 2\beta^\alpha(\gamma^\alpha/\kappa^\alpha + \varepsilon))|S - \bar{S}| + (2\xi^\alpha + \kappa^\alpha + 2\beta^\alpha(\gamma^\alpha/\kappa^\alpha + \varepsilon)) \\ &\quad |I - \bar{I}| + \kappa^\alpha|R - \bar{R}| \\ &\leq L\|(S, I, R) - (\bar{S}, \bar{I}, \bar{R})\| \leq L\|X - \bar{X}\|, \end{aligned}$$

其中, $L = \max\{2\mu^\alpha + \kappa^\alpha + 2\beta^\alpha(\gamma^\alpha/\kappa^\alpha + \varepsilon), 2\xi^\alpha + \kappa^\alpha + 2\beta^\alpha(\gamma^\alpha/\kappa^\alpha + \varepsilon), \kappa^\alpha\}$ 。因此, $H(X)$ 在 \mathbf{R}_+^3 上满足 Lipschitz 条件, 由文献 [15] 中的定理 8.11 可知, 模型 (2) 在 \mathbf{R}_+^3 上存在唯一解。

3 平衡点

设基本再生数 $R = \beta^\alpha \gamma^\alpha / [(\xi^\alpha + \kappa^\alpha)(\mu^\alpha + \kappa^\alpha)]$ 。令 $\begin{cases} {}^c D_t^\alpha S = 0, \\ {}^c D_t^\alpha I = 0, \\ {}^c D_t^\alpha R = 0, \end{cases}$ 通过简单的计算, 可得模型 (2)

平衡点的存在情况。

定理 3 当 $R_0 < 1$ 时, 模型 (2) 有唯一一个未感染平衡点 $E_0(\gamma^\alpha/(\mu^\alpha + \kappa^\alpha), 0, \mu^\alpha \gamma^\alpha / [\kappa^\alpha(\mu^\alpha +$

$\kappa^\alpha)$), 当 $R_0 > 1$ 时, 模型除了一个未感染平衡点 E_0 外, 还有一个感染平衡点 $E_*(S^*, I^*, R^*)$, 其中 $S^* = (\xi^\alpha + \kappa^\alpha)/\beta^\alpha$, $I^* = [\beta^\alpha \gamma^\alpha - (\xi^\alpha + \kappa^\alpha)(\mu^\alpha + \kappa^\alpha)]/(\beta^\alpha(\xi^\alpha + \kappa^\alpha)) = (\mu^\alpha + \kappa^\alpha)(R_0 - 1)/\beta^\alpha$, $R^* = (\mu^\alpha S^* + \xi^\alpha I^*)/\kappa^\alpha$ 。

定理 4 当 $R_0 < 1$ 时, 系统 (2) 的无病平衡点 E_0 局部渐近稳定, 当 $R_0 > 1$ 时, E_0 不稳定。

证明 系统 (2) 在 E_0 处的 Jacobian 矩阵为:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\kappa^\alpha - \mu^\alpha & -\beta^\alpha \gamma^\alpha / (\mu^\alpha + \kappa^\alpha) & 0 \\ 0 & \beta^\alpha \gamma^\alpha / (\mu^\alpha + \kappa^\alpha) - (\xi^\alpha + \kappa^\alpha) & 0 \\ \mu^\alpha & \xi^\alpha & -\kappa^\alpha \end{pmatrix}, \tag{4}$$

如果 Jacobian 矩阵 $J(E_0)$ 的所有特征值满足条件^[16] $|\arg(\lambda)| > \alpha\pi/2$, 那么未感染平衡点 E_0 是渐近稳定的。容易求得 $J(E_0)$ 的所有特征值为 $\lambda_1 = -\kappa^\alpha < 0$, $\lambda_2 = -(\kappa^\alpha + \mu^\alpha) < 0$, $\lambda_3 = \beta^\alpha \gamma^\alpha / (\mu^\alpha + \kappa^\alpha) - (\xi^\alpha + \kappa^\alpha) = (\xi^\alpha + \kappa^\alpha)(R_0 - 1)$ 。显然, 当 $R_0 < 1$ 时, $\lambda_3 < 0$, 于是, $J(E_0)$ 的所有特征值均为负实数, 从而条件 $|\arg(\lambda_i)| > \alpha\pi/2, i = 1, 2, 3$ 满足, 未感染平衡点 E_0 是局部渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, $\lambda_3 > 0$, 未感染平衡点 E_0 不稳定。

定理 5 当 $R_0 > 1$ 时, 系统 (2) 的地方病平衡点 E_* 局部渐近稳定。

证明 系统 (2) 在 E_* 处的 Jacobian 矩阵为: $J(E_*) = \begin{pmatrix} -\beta^\alpha I^* - (\mu^\alpha + \kappa^\alpha) & -(\xi^\alpha + \kappa^\alpha) & 0 \\ \beta^\alpha I^* & 0 & 0 \\ \mu^\alpha & \xi^\alpha & -\kappa^\alpha \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -(\mu^\alpha + \kappa^\alpha)R_0 & -(\xi^\alpha + \kappa^\alpha) & 0 \\ (\mu^\alpha + \kappa^\alpha)(R_0 - 1) & 0 & 0 \\ \mu^\alpha & \xi^\alpha & -\kappa^\alpha \end{pmatrix}。$$

从而 $J(E_*)$ 的特征方程为:

$$(\lambda + \kappa^\alpha)[\lambda^2 + (\mu^\alpha + \kappa^\alpha)R_0\lambda + (\xi^\alpha + \kappa^\alpha)(\mu^\alpha + \kappa^\alpha)(R_0 - 1)] = 0。 \tag{5}$$

易知 $\lambda_1 = -\kappa^\alpha < 0$ 是 $J(E_*)$ 的一个特征值, $J(E_*)$ 的另两个特征值 λ_2 和 λ_3 是方程 $\lambda^2 + (\mu^\alpha + \kappa^\alpha)R_0\lambda + (\xi^\alpha + \kappa^\alpha)(\mu^\alpha + \kappa^\alpha)(R_0 - 1) = 0$ 的根。由韦达定理可知: $\lambda_2 + \lambda_3 = -(\mu^\alpha + \kappa^\alpha)R_0 < 0$, $\lambda_2\lambda_3 = (\xi^\alpha + \kappa^\alpha)(\mu^\alpha + \kappa^\alpha)(R_0 - 1)$ 。当 $R_0 > 1$ 时, $\lambda_2\lambda_3 > 0$, 于是, $J(E_*)$ 的所有特征值均有负实部, 从而条件 $|\arg(\lambda_i)| > \alpha\pi/2, i = 1, 2, 3$ 满足, 感染平衡点 E_* 是局部渐近稳定的。

4 数值试验

本节通过对模型 (2) 的数值模拟来研究模型平衡点的稳定性情况。取定初始值为 $S(0) = 40$, $I(0) = 5, R(0) = 10$ 。

例 1 选取参数 $\gamma = 60, \beta = 0.05, \mu = 0.01, \kappa = 0.1, \xi = 0.02$ 。表 1 列出了 $\alpha = 1, 0.8, 0.6, 0.5$ 时相应的基本再生数 R_0 、未感染平衡点 E_0 和感染平衡点 E_* 。由定理 5 知, 表 1 中的感染平衡点 E_* 是局部渐近稳定的。在图 2 中绘出了模型 (2) 的解随时间的变化情况, 从图 2 中可以看出, 模型 (2) 的解最终收敛于感染平衡点 E_* 。

表 1 α 取不同值时模型 (2) 的基本再生数和平衡点
Tab.1 The basic reproduction number and equilibriums of model (2) for several α

α	R_0	E_0	E_*
1	227.27	(545.45, 0, 54.545)	(2.4, 497.8, 99.8)
0.8	64.859	(144.09, 0, 22.836)	(2.2216, 128.81, 35.896)
0.6	17.735	(37.117, 0, 9.3233)	(2.0928, 31.738, 12.609)
0.5	9.0928	(18.61, 0, 5.885)	(2.0467, 15.064, 7.3841)

例 2 选取参数 $\gamma = 60, \beta = 0.001, \mu = 0.09, \kappa = 0.2, \xi = 0.1$ 。当 $\alpha = 0.6$ 和 0.8 时, 通过计算可得相应的基本再生数为 $R_0 = 0.474\ 54, 0.575$ 。由定理 4 知, 模型 (2) 只存在唯一稳定的未感染平衡点。图 3 绘出了模型 (2) 的解随时间的变化情况, 从图 3 中可以看出, 模型 (2) 的解最终收敛于未感染平衡点 E_0 。

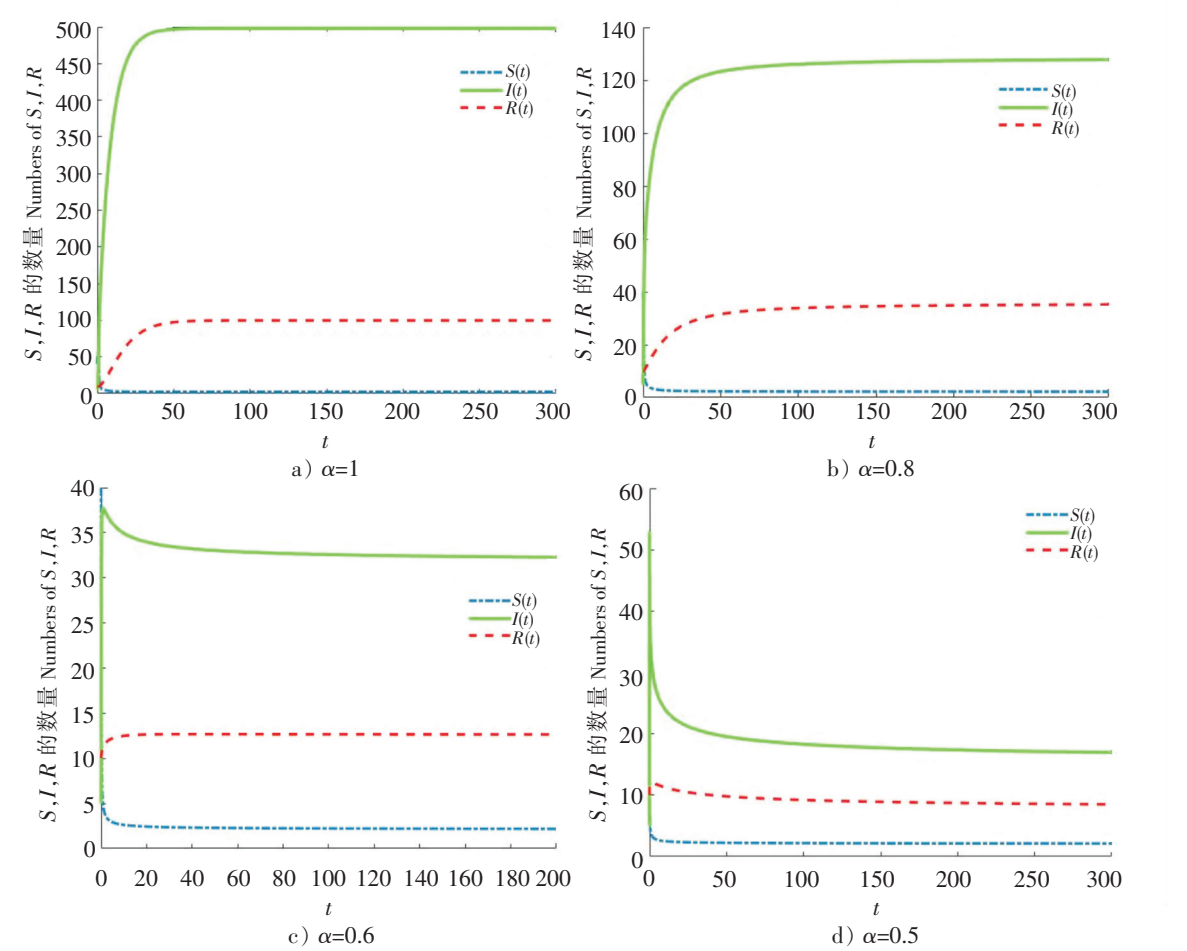


图2 例1中模型(2)的数值解

Fig.2 Numerical solutions of model (2) in example 1

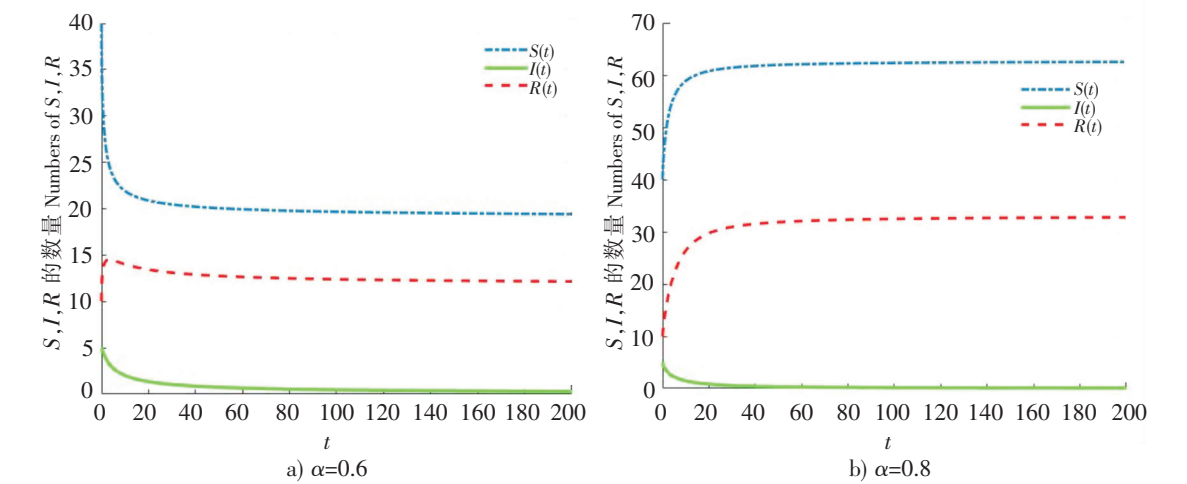


图3 例2中模型(2)的数值解

Fig.3 Numerical solutions of model (2) in example 2

5 结语

研究了一类基于分数阶微分方程的木马病毒传播模型，得到：当基本再生数 $R_0 < 1$ 时，模型仅存在唯一的局部稳定的未感染平衡点 E_0 ，此时病毒得到消除；当基本再生数 $R_0 > 1$ 时，模型除了未

感染平衡点 E_0 外, 还存在一个感染平衡点 E_* , 且此时感染平衡点是局部稳定的, 病毒将扩散。

为了控制木马病毒的传播, 应想办法减少基本再生数的值。注意到基本再生数的形式 $R_0 = \beta^\alpha \gamma^\alpha / ((\xi^\alpha + \kappa^\alpha)(\mu^\alpha + \kappa^\alpha))$, 可以通过减少 γ, β 的值或者增加 ξ, κ, μ 的值使基本再生数的值减小。由于 γ 表示 t 时刻进入系统的计算机用户数量, κ 表示 t 时刻有 κ 比例的计算机用户移出系统, 所以通常情况下比较难控制 γ 和 κ 的值。因此, 为减小基本再生数的值, 关键在于减小传染率 β 的值并增加 ξ 和 μ 的值。

结合参数的实际意义, 给出如下建议: 1) 对计算机定期扫描系统检查漏洞, 并及时安装木马补丁, 由此可以增加 ξ 和 μ 的值, 从而减少感染计算机的数目; 2) 感染计算机及时退出计算机系统, 等到系统漏洞修复完毕之后再联网操作, 由此可以减少感染者的数目, 从而降低感染率。

此外, 由前述数值模拟的结果可以看到分数阶导数的阶数 α 对模型解的影响。当其他参数固定不变时, α 的值越小, 基本再生数的值也越小。由定理 4 和定理 5 可以看到, 当基本再生数从 $R_0 > 1$ 变化到 $R_0 < 1$ 时, 模型最终的平衡状态将由稳定的感染平衡点变化为稳定的未感染平衡点, 由此可以推测分数阶导数的阶数 α 是模型的一个分岔值。然而, 如何从理论上证实这一推测, 分数阶导数的阶数在模型中的实际意义又是什么, 这些问题有待在后续的研究工作中进一步探讨。

[参 考 文 献]

- [1] HAN X, TAN Q. Dynamical behavior of computer virus on internet [J]. Applied Mathematics & Computation, 2010, 217(6): 2520-2526. DOI:10.1016/j.amc.2010.07.064.
- [2] REN J, YANG X, ZHU Q, et al. A novel computer virus model and its dynamics [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2012, 13(1): 376-384. DOI:10.1016/j.nonrwa.2011.07.048.
- [3] MISHRA B K, SAINI D K. SEIRS epidemic model with delay for transmission of malicious objects in computer network [J]. Applied Mathematics & Computation, 2007, 188(2): 1476-1482. DOI:10.1016/j.amc.2006.11.012.
- [4] 尹礼寿, 梁娟. 一类计算机病毒 SEIR 模型稳定性分析 [J]. 生物数学学报, 2017, 32(3): 403-407.
- [5] EL-SAKA H A A. The fractional-order SIR and SIRS epidemic models with variable population size [J]. Saka, 2013, 2(3): 195-200. DOI:10.12785/ms1/020308.
- [6] 肖丽, 包骏杰, 冯丽萍. 一种新的计算机病毒模型的稳定性分析 [J]. 湘潭大学自然科学学报, 2012, 34(2): 94-96. DOI:10.13715/j.cnki.nsjxu.2012.02.018.
- [7] AGUSTO F B. Optimal isolation control strategies and cost-effectiveness analysis of a two-strain avian influenza model [J]. Biosystem, 2013, 113(3): 155-164. DOI:10.1016/j.biosystems.2013.06.004.
- [8] 陈永雪. 一类计算机病毒传播模型的数学分析 [J]. 福建农林大学学报 (自然科学版), 2014, 43(5): 551-555.
- [9] HANERT E, SCHUMACHER E, DELEERSNIJDER E. Front dynamics in fractional-order epidemic models [J]. Journal of Theoretical Biology, 2011, 279(1): 9-16.
- [10] GONZÁLEZ-PARRA G, ARENAS A J, CHEN-CHARPENTIER B M. A fractional order epidemic model for the simulation of outbreaks of influenza A (H1N1) [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2015, 37(15): 2218-2226.
- [11] DIETHELM K. A fractional calculus based model for the simulation of an outbreak of dengue fever [J]. Nonlinear Dynamics, 2013, 71(4): 613-619.
- [12] PODLUBNY I. Fractional differential equations [M]. New York: Academic Press, 1999.
- [13] ODIBAT Z M, SHAWAGFEH N T. Generalized Taylor's formula [J]. Applied Mathematics & Computation, 2007, 186(1): 286-293.
- [14] LI H L, ZHANG L, HU C, et al. Dynamical analysis of a fractional-order predator-prey model incorporating a prey refuge [J]. Journal of Applied Mathematics & Computing, 2017, 54(1/2): 435-449.
- [15] DIETHELM K. The analysis of fractional differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2010.
- [16] AHMED E, EL-SAYED A M A, EL-SAKA H A A. Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator-prey and rabies models [J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2007, 325(1): 542-553.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)