

加权距离下模糊数的区间逼近

毛青松

(集美大学教师教育学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 在加权 L_2 距离意义下得到了模糊数的最近区间逼近。基于此, 引入了最近区间逼近算子, 并讨论了这个算子的基本性质, 证明了算子关于加权 L_2 距离 Lipschitz 连续, 其 Lipschitz 常数为 1。

[关键词] 模糊数; 区间数; 逼近; 加权 L_2 距离

[中图分类号] O 177.3

Weighted Interval Approximations of Fuzzy Numbers

MAO Qingsong

(College of Teacher Education, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: Nearest interval approximation of a fuzzy number with respect to the weighted L_2 distance was given in this paper. Based on this, the nearest interval approximation operator on fuzzy numbers was introduced and basic properties of this operator were discussed. It's shown that this operator was Lipschitz continuous with respect to the weighted L_2 distance, and the Lipschitz constant was equal to 1.

Keywords: fuzzy number; interval number; approximation; weighted L_2 distance

0 引言

模糊数被广泛用于表达和处理不确定性信息^[1-3]。在实际应用中, 往往对执行速度的要求较高, 因而人们提出了很多方法用简明、易于计算的模糊数去替代原模糊数, 这就是模糊数的逼近问题。近年来, 模糊数逼近已成为一个非常重要的热点问题, 人们讨论了模糊数的区间逼近^[4]、条件加权 $L-R$ 逼近^[5]、光滑逼近^[6-7]等问题。

模糊数上存在多种距离, 其中 L_2 型的距离被广泛使用。 L_2 型的距离包括 L_2 距离和加权 L_2 距离, L_2 距离是加权 L_2 距离的特例, 加权 L_2 距离比 L_2 距离适用范围要广^[8-9]。在很多情形下, 加权 L_2 距离比 L_2 距离能够更为合理地描述模糊数之间的差异, 这是因为针对具体的问题, 可以选择适合该问题的权函数。

区间数是一种特殊类型的模糊数, 其形式非常简洁, 执行的速度很快。区间数在不确定信息处理中起到了重要作用^[3]。Grzegorzewski^[4]讨论了 L_2 距离意义下模糊数的最近区间逼近, 引发了学界对模糊数逼近问题广泛而持续的关注。

本文讨论了基于加权 L_2 距离的模糊数的最近区间数逼近问题。因为 L_2 距离是加权 L_2 距离的特例, 该结果推广了文献 [4] 中的相关结果。

[收稿日期] 2019-03-24

[基金项目] 福建省自然科学基金项目(2016J01022)

[作者简介] 毛青松(1972—), 男, 副教授, 从事模糊数学与模糊系统研究

1 模糊数空间及其上的加权 L_2 距离

本节介绍模糊数的基本概念, 相关内容可参见文献 [1-3]。

记 \mathbf{N} 为自然数集合, \mathbf{R} 为实数集合。用 $F(\mathbf{R})$ 表示全体 \mathbf{R} 上的模糊集, 即从 \mathbf{R} 到 $[0, 1]$ 的函数。设 $u \in F(\mathbf{R})$ 且 $\alpha \in [0, 1]$, u 的 α 截集记作 $[u]_\alpha$, 即 $[u]_\alpha = \left\{ \left\{ x \in \mathbf{R}; u(x) \geq \alpha \right\}, \alpha \in (0, 1] \right\}$, $[u]_1$ 被称为 u 的核, $[u]_0$ 被称为 u 的支集, 也记作 $\text{supp } u$ 。在有些文献中, 将支集 $\text{supp } u$ 定义为 $\{x; u(x) > 0\}$ 。

设 $u \in F(\mathbf{R})$, 称 u 是一个模糊数, 如果 u 满足: i) $[u]_1 \neq \emptyset$; ii) 对 $\alpha \in [0, 1]$, $[u]_\alpha$ 是 \mathbf{R} 中的有界闭区间。用 E 记全体模糊数。

模糊数的运算定义如下: 对 $u, v \in E, \alpha \in [0, 1], r \in \mathbf{R}, [u+v]_\alpha = [u]_\alpha + [v]_\alpha = [u^-(\alpha) + v^-(\alpha), u^+(\alpha) + v^+(\alpha)]$, $[u-v]_\alpha = [u]_\alpha - [v]_\alpha = [u^-(\alpha) - v^+(\alpha), u^+(\alpha) - v^-(\alpha)]$, $[ru]_\alpha = r[u]_\alpha = \begin{cases} [ru^-(\alpha), ru^+(\alpha)], & r \geq 0, \\ [ru^+(\alpha), ru^-(\alpha)], & r < 0. \end{cases}$ 容易看出 $u-v = u+(-v)$ 。

若 φ 满足 $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$, $\int_0^1 \varphi(\alpha) d\alpha = 1$, 则称 φ 为权函数。在很多具体问题中, 权函数 φ 被要求为严格递增函数。

设 φ 为权函数, $q \in (0, 1)$ 。模糊数空间上的加权 L_2 距离 $d_{q,\varphi}$ 被定义为: 对任意 $u, v \in E, d_{q,\varphi}(u, v) = (1-q) \left(\int_0^1 \varphi(\alpha) |u^-(\alpha) - v^-(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2} + q \left(\int_0^1 \varphi(\alpha) |u^+(\alpha) - v^+(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2}$ 。

容易验证距离 $d_{q,\varphi}$ 满足: i) 非负性 $d_{q,\varphi}(u, v) \geq 0$; ii) 对称性 $d_{q,\varphi}(u, v) = d_{q,\varphi}(v, u)$; iii) 三角不等式 $d_{q,\varphi}(u, v) \leq d_{q,\varphi}(u, w) + d_{q,\varphi}(w, v)$ 。但是 $d_{q,\varphi}$ 未必满足正定性, 因而 $d_{q,\varphi}$ 未必是度量。关于 $d_{q,\varphi}$ 何时成为度量的讨论参见文献 [9]。

2 基于 $d_{q,\varphi}$ 的模糊数最近区间逼近

本节讨论在 $d_{q,\varphi}$ 距离意义下任意模糊数的最近区间逼近。

用 $I(\mathbf{R})$ 表示 \mathbf{R} 上的闭区间全体, 区间数可看作特殊的模糊数。设 $I \in I(\mathbf{R})$, 令 $\bar{I}(x) = \begin{cases} 1, & x \in I, \\ 0, & x \notin I. \end{cases}$ 则 I 可看作模糊数 \bar{I} 。下文将不再区分区间数 I 与其对应的模糊数 \bar{I} 。

现在寻找 $I = [I^-, I^+] \in I(\mathbf{R})$, 使得 $d_{q,\varphi}(u, I) = (1-q) \left(\int_0^1 \varphi(\alpha) |u^-(\alpha) - I^-(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2} + q \left(\int_0^1 \varphi(\alpha) |u^+(\alpha) - I^+(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2}$ 最小。令 $f_u^-(I^-) := \int_0^1 \varphi(\alpha) |u^-(\alpha) - I^-|^2 d\alpha$, $f_u^+(I^+) := \int_0^1 \varphi(\alpha) |u^+(\alpha) - I^+|^2 d\alpha$ 。那么, $df_u^-(I^-)/dI^- = \int_0^1 -2\varphi(\alpha)(u^-(\alpha) - I^-) d\alpha$, $df_u^+(I^+)/dI^+ = \int_0^1 -2\varphi(\alpha)(u^+(\alpha) - I^+) d\alpha$ 。方程 $\begin{cases} df_u^-(I^-)/dI^- = 0 \\ df_u^+(I^+)/dI^+ = 0 \end{cases}$ 的解为:

$$\begin{cases} I^- = \int_0^1 \varphi(\alpha) u^-(\alpha) d\alpha, \\ I^+ = \int_0^1 \varphi(\alpha) u^+(\alpha) d\alpha. \end{cases} \quad (1)$$

因为 $d^2 f_u^-(I^-)/dI^{-2} = 2, d^2 f_u^+(I^+)/dI^{+2} = 2$, 所以 $f_u^-(I^-)$ 和 $f_u^+(I^+)$ 在 I^- 和 I^+ 如式 (1) 中取值时可以达到最小值。注意到 $\int_0^1 \varphi(\alpha) u^-(\alpha) d\alpha \leq \int_0^1 \varphi(\alpha) u^+(\alpha) d\alpha$, 所以 $I = \left[\int_0^1 \varphi(\alpha) u^-(\alpha) d\alpha, \int_0^1 \varphi(\alpha) u^+(\alpha) d\alpha \right]$ 。

$\int_0^1 \varphi(\alpha) u^+(\alpha) d\alpha$ 是模糊数 u 在 $d_{q,\varphi}$ 意义下的最近区间逼近。

现在, 定义一个算子 $I_\varphi: E \rightarrow I(\mathbf{R})$, 对任意 $u \in \mathbf{R}$, $I_\varphi(u) := [I_\varphi(u)^-, I_\varphi(u)^+] := [\int_0^1 \varphi(\alpha) u^-(\alpha) d\alpha, \int_0^1 \varphi(\alpha) u^+(\alpha) d\alpha]$ 。称 I_φ 为 $d_{q,\varphi}$ 意义下模糊数的最近区间逼近算子。容易看出, 当 u 为区间数时, $I_\varphi(u) = u$ 。

3 最近区间逼近算子 I_φ 的性质

本节探讨算子 I_φ 的基本性质, 指出 I_φ 为线性算子, 并发现了 I_φ 为 $d_{q,\varphi}$ 距离意义下的 Lipschitz 连续算子。这一重要性质意味着 $d_{q,\varphi}$ 距离意义下的模糊数最近区间逼近具有稳定性, 即只要 u 的变化较小, 则 $I_\varphi(u)$ 的变化也较小。

定理 1 设 $u \in E$, 则 $[u]_1 \subseteq I_\varphi(u) \subseteq [u]_0$ 。

证明 直接计算可得。

注 1 从 $I_\varphi(u)$ 是 u 的最近区间逼近这个事实, 也可以直接推出 $[u]_1 \subseteq I_\varphi(u) \subseteq [u]_0$ 。

定理 2 设 $u, v \in E$, $r \in \mathbf{R}$, 则: i) $I_\varphi(u+v) = I_\varphi(u) + I_\varphi(v)$; ii) $I_\varphi(ru) = rI_\varphi(u)$ 。

证明 从 $I_\varphi(u)$ 的定义可得结论。

定理 3 I_φ 是从 $(E, d_{q,\varphi})$ 到 $(I(\mathbf{R}), d_{q,\varphi})$ 的 Lipschitz 连续函数, 其 Lipschitz 常数为 1。

证明 设 $u, v \in E$, 则: $d_{q,\varphi}(I_\varphi(u), I_\varphi(v)) = (1-q) \left(\int_0^1 \varphi(\alpha) |I_\varphi(u)^- - I_\varphi(v)^-|^2 d\alpha \right)^{1/2} + q \left(\int_0^1 \varphi(\alpha) |I_\varphi(u)^+ - I_\varphi(v)^+|^2 d\alpha \right)^{1/2} = (1-q) |I_\varphi(u)^- - I_\varphi(v)^-| + q |I_\varphi(u)^+ - I_\varphi(v)^+| = (1-q) \left| \int_0^1 \varphi(\alpha) u^-(\alpha) d\alpha - \int_0^1 \varphi(\alpha) v^-(\alpha) d\alpha \right| + q \left| \int_0^1 \varphi(\alpha) u^+(\alpha) d\alpha - \int_0^1 \varphi(\alpha) v^+(\alpha) d\alpha \right| \leq (1-q) \left(\int_0^1 \varphi(\alpha) |u^-(\alpha) - v^-(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2} + q \left(\int_0^1 \varphi(\alpha) |u^+(\alpha) - v^+(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2} = d_{q,\varphi}(u, v)$ 。再注意到, 当 u, v 为区间数时, $d_{q,\varphi}(u, v) = d_{q,\varphi}(I(u), I(v))$ 。因此结论成立。

[参考文献]

- [1] 吴从炘, 马明. 模糊分析学基础 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1991.
- [2] 陈水利, 李敬功, 王向公. 模糊集理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2005: 36-70.
- [3] GONG Z T, SUN B Z, CHEN D G. Rough set theory for the interval-valued fuzzy information systems [J]. Information Sciences, 2008, 178(8): 1968-1985. DOI:10.1016/j.ins.2007.12.005.
- [4] GRZEGORZEWSKI P. Nearest interval approximation of a fuzzy number [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 130: 321-330.
- [5] BAN A I, COROIANU L, KHAISTAN A. Conditioned weighted L-R approximations of fuzzy numbers [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2016, 283: 56-82.
- [6] WANG G, LI J. Approximations of fuzzy numbers by step type fuzzy numbers [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2017, 310: 47-59.
- [7] HUANG H, WU C, XIE J, et al. Approximation of fuzzy numbers using the convolution method [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2017, 310: 14-46.
- [8] GRZEGORZEWSKI P. Metrics and orders in space of fuzzy numbers [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 97: 83-94.
- [9] LIU H Y, FAN T H. Weighted L_p metric on fuzzy numbers [C] // Quantitative Logic and Soft Computing 2016. Hangzhou: Springer, 2017: 505-513.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)