

基于 Pythagorean 模糊非线性规划及其在群决策中的应用

朱敦赣

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 考虑 Pythagorean 模糊数在应用领域的优越性和广泛性, 提出一种 Pythagorean 模糊非线性规划模型, 并研究其在模糊多属性群决策中的应用。提出一种基于 Pythagorean 模糊非线性规划的群决策专家权重模型和属性权重模型, 给出一种 Pythagorean 模糊非线性规划的模糊多属性群决策方法, 并以航空公司机型选择为例说明了该方法的可行性和有效性。

[关键词] 多属性群决策; Pythagorean 模糊数; 模糊非线性规划模型

[中图分类号] O 159; O 221.2

Pythagorean Fuzzy Nonlinear Programming Model and Its Application to Group Decision Making

ZHU Dungan

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In view of the superiority and extensiveness of Pythagorean fuzzy numbers in the application field, a Pythagorean fuzzy nonlinear programming model was presented, and its application in fuzzy multi-attribute group decision making was studied. Firstly, a group decision expert weight model and attribute weight model based on Pythagorean fuzzy nonlinear programming were proposed. Then, a fuzzy multi-attribute group decision making method based on Pythagorean fuzzy nonlinear programming model was presented. Finally, the aircraft type selection was taken as an example to illustrate the feasibility and effectiveness of the new method.

Keywords: multi-attribute group decision making; Pythagorean fuzzy number; fuzzy nonlinear programming model

0 引言

1965年, Zadeh^[1]首次提出模糊集理论。以此为基础, 相关学者对模糊集进行了一步步优化, 其中最具有代表性的是直觉模糊集^[2]和 Pythagorean 模糊集^[3]。在现有的多属性决策问题中, 决策者对备选方案在各属性下评价越来越模糊, 使得多属性决策问题的难度也随之加大。而直觉模糊集和 Pythagorean 模糊集的出现, 恰恰可以解决很多类似的决策问题。

Yager^[2]于2014年提出 Pythagorean 模糊集。与直觉模糊集不同的是, Pythagorean 模糊集将其隶属度和非隶属的取值范围从隶属度与非隶属度之和小于等于1拓展至隶属度与非隶属度的平方和小于等

于 1, 隶属度和非隶属度取值范围的扩大, 给决策者评价的精确性提供更多保障。Pythagorean 模糊集现已被广泛应用于风险的评估^[4]、投资^[5]、模式识别以及医疗诊断^[6]等方面。

目前, 基于 Pythagorean 模糊集的决策方法相关研究已经取得了一些研究成果: 刘卫峰等^[7]定义了 Pythagorean 模糊数的交叉影响运算法则, 并提出几种 Pythagorean 模糊信息集成算子和基于 Pythagorean 模糊交叉影响集成算子的决策方法; 丁恒等^[8]针对 Pythagorean 模糊环境下的多属性群决策问题, 提出 Pythagorean 模糊幂加权平均算子, 研究所提出算子的基本性质, 并提出基于 PFPWA 算子的群决策方法。但是以上研究多是基于集成算子的研究方法, 由于集成算子公式构造的多样性, 容易给评价结果造成误差, 致使最终获得的最优方案存在争议。所以, 本文将 Pythagorean 模糊集与最优化理论相结合, 减少人为主观方面的影响, 以使最终的评价结果更加精确。

在多属性群决策过程中, 因为需要考虑多个决策的评价信息, 首先需要确定决策者的相关权重, 然后再将这些决策个体给出的评价信息通过信息集成的方式得到综合决策信息, 所以在群决策过程中, 确定决策者的权重就显得尤为重要。文献 [9-11] 从决策者的主观权重和客观权重出发, 给出了确定决策者权重的几种方法。文献 [12] 给出将决策者主观权重和客观权重组合为决策者的最终权重的方法。解决多属性群决策问题的另一个重要的影响因素是属性权重的确定。在属性权重信息完全未知且属性值为实数的情况下, 可采用加权平均法^[13]、方差最大化法^[14]、信息熵法^[15]等。由于其评价的客观性以及专家在某些未知领域知识的局限性, 多数评价信息被以模糊数的形式给出, 所以以上针对实数的属性权重值的确定方法已经不足以解决该类问题, 使得基于模糊评价的多属性群决策问题成为了现阶段研究的热点方向。

本文主要研究在 Pythagorean 模糊环境下的多属性群决策问题, 提出了一种基于 Pythagorean 模糊非线性规划的多属性群决策方法。首先, 引入关于模糊集的一系列基本概念; 其次, 针对 Pythagorean 模糊非线性规划多属性决策问题, 给出两种思路下决策者和属性客观权重的确定方法, 同时给出 Pythagorean 模糊非线性规划模型; 最后, 以航空公司机型的选取为背景, 实例论证了模型的可行性和有效性。

1 基本概念

定义 1^[1] 设 X 为一论域, X 上形如 $A = \{ \langle x, \mu_A(x) \rangle \mid x \in X \}$ 的二元组被称为 X 上的一个模糊集, 其中 $\mu_A(x) \in [0, 1]$, 它代表 x 隶属于 A 的程度, 简称隶属度, 记 $a = \mu_a$ 为一个模糊数 (FN)。

定义 2^[2] 设 X 为一论域, X 上形如 $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle \mid x \in X \}$ 的三元组被称为 X 上的一个直觉模糊集, 其中 $\mu_A(x) \in [0, 1]$, $\nu_A(x) \in [0, 1]$, 且 $\mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ 。 $\mu_A(x)$ 为隶属度, $\nu_A(x)$ 为非隶属度。令 $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$, 称 $\pi_A(x)$ 为犹豫度, 故 $\pi_A(x) \in [0, 1]$ 。记 $a = (\mu_a, \nu_a)$ 为一个直觉模糊数 (IFN)。

定义 3^[3] 设 X 为一论域, X 上形如 $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle \mid x \in X \}$ 的三元组被称为 X 上的一个直觉模糊集, 其中 $\mu_A(x) \in [0, 1]$, $\nu_A(x) \in [0, 1]$, 且 $\mu_A^2(x) + \nu_A^2(x) \leq 1$ 。 $\mu_A(x)$ 称为隶属度, $\nu_A(x)$ 称为非隶属度。令 $\pi_A(x) = \sqrt{1 - \mu_A^2(x) - \nu_A^2(x)}$, 称 $\pi_A(x)$ 为犹豫度, 且有 $\pi_A(x) \in [0, 1]$ 。记 $a = (\mu_a, \nu_a)$ 为一个 Pythagorean 模糊数 (PFN)。

定义 4^[3] 设 a, a_1, a_2 为 3 个 Pythagorean 模糊数, λ 为一常数, 则有以下等式成立: 1) $a_1 \oplus a_2 = (\sqrt{\mu_{a_1}^2 + \mu_{a_2}^2 - \mu_{a_1}^2 \mu_{a_2}^2}, \nu_{a_1} \nu_{a_2})$; 2) $a_1 \otimes a_2 = (\mu_{a_1} \mu_{a_2}, \sqrt{\nu_{a_1}^2 + \nu_{a_2}^2 - \nu_{a_1}^2 \nu_{a_2}^2})$; 3) $\lambda a = (\sqrt{1 - (1 - \mu_a^2)^\lambda}, \nu_a^\lambda)$; 4) $a^\lambda = (\mu_a^\lambda, \sqrt{1 - (1 - \nu_a^2)^\lambda})$; 5) $a^c = (\nu_a, \mu_a)$ 。

定义 5^[16] 设 a_1, a_2 为两个 Pythagorean 模糊数, 其距离测度定义为: $d(a_1, a_2) = (|\mu_{a_1}^2 - \mu_{a_2}^2| + |\nu_{a_1}^2 - \nu_{a_2}^2| + |\pi_{a_1}^2 - \pi_{a_2}^2|)/2$ 。

定义 6^[3] 设 a 为一个 Pythagorean 模糊数, 则其得分函数定义为: $s(a) = \mu_a^2 - \nu_a^2$; 精确函数定义为: $h(a) = \mu_a^2 + \nu_a^2$ 。

定理 1^[3] 设 a_1, a_2 为两个 Pythagorean 模糊数, 若: 1) $s(a_1) > s(a_2)$, 则 $a_1 > a_2$; 2) $s(a_1) = s(a_2)$, 有: 若 $h(a_1) > h(a_2)$, 则 $a_1 > a_2$; 若 $h(a_1) = h(a_2)$, 则 $a_1 = a_2$ 。

2 基于 Pythagorean 模糊非线性规划的群决策权重确定模型

对于一个标准的多属性群决策问题^[17], 设有方案 m 种, 记为 $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$; 每个方案有属性 n 个, 记为 $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$, 其对应的权向量设为 $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$, 且满足 $\omega_j \in [0, 1](j = 1, 2, \cdots, n)$, $\sum_{i=1}^n \omega_j = 1$; 共有 l 位决策者, 记为 $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_l\}$, 其对应的决策权重为 $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_l\}$, 且满足 $w_k \in [0, 1](k = 1, 2, \cdots, l)$, $\sum_{k=1}^l w_k = 1$ 。

假设决策者用 Pythagorean 模糊数做决策评价, 记决策者 e_k 的评价矩阵 $S_k = (s_{ij}(k))_{m \times n}(k = 1, 2, \cdots, l)$, 其中 $s_{ij}(k)$ 代表决策者 e_k 对方案 p_i 在属性 q_j 下的评价, 现假设属性权重 ω 和决策者权重 W 完全未知, 试通过确定方案优先排序。

将决策者 e_k 的评价矩阵 $S_k = (s_{ij}(k))_{m \times n}(k = 1, 2, \cdots, l)$ 规范化为 $R_k = (r_{ij}(k))_{m \times n}(k = 1, 2, \cdots, l)$, 对于效益型属性对应的评价值不需作任何变动, 对于成本型属性对应的评价值, 取其补来替代, 即

$$r_{ij}(k) = \begin{cases} s_{ij}(k), \text{效益型}, \\ (s_{ij}(k))^c, \text{成本型}. \end{cases} \tag{1}$$

2.1 基于非线性规划的群决策专家权重确定模型

对于决策者 e_k, e_s , 其决策者权重分别为 w_k, w_s , 先计算两个矩阵加权之后对应元素的距离之和, 简称加权决策矩阵距离, 记为:

$$D(w_k R_k, w_s R_s) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d(w_k r_{ij}^{(k)}, w_s r_{ij}^{(s)}). \tag{2}$$

再计算两两决策者之间的加权决策矩阵距离之和, 记为:

$$D_1 = \sum_{k=1}^l \sum_{s>k}^l D(w_k R_k, w_s R_s) = \sum_{k=1}^l \sum_{s>k}^l \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d(w_k r_{ij}^{(k)}, w_s r_{ij}^{(s)}). \tag{3}$$

最后求解目标规划:

$$\min f = D_1 = \sum_{k=1}^l \sum_{s>k}^l \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d(w_k r_{ij}^{(k)}, w_s r_{ij}^{(s)}), \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{k=1}^l w_k = 1, \\ w_k \geq 0, k = 1, 2, \cdots, l, \end{cases} \tag{4}$$

得: $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_l\}$ 。

另一种确定决策者客观权重的方法如下。

对于决策者 e_1, e_2, \cdots, e_l , 其决策者权重对应为 w_1, w_2, \cdots, w_l , 将决策矩阵 R_1, R_2, \cdots, R_l 加权求和, 得综合决策矩阵 $R = (r_{ij})_{m \times n}$, 其中:

$$r_{ij} = w_1 r_{ij}^{(1)} \oplus w_2 r_{ij}^{(2)} \oplus \cdots \oplus w_l r_{ij}^{(l)}, \forall i, j. \tag{5}$$

再计算每个决策矩阵与综合决策矩阵的矩阵对应元素距离之和, 记为:

$$D_2 = \sum_{k=1}^l D(R_k, R) = \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d(r_{ij}^{(k)}, w_1 r_{ij}^{(1)} \oplus w_2 r_{ij}^{(2)} \oplus \cdots \oplus w_l r_{ij}^{(l)}). \tag{6}$$

最后求解目标规划:

$$\min f = D_2 = \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d(r_{ij}^{(k)}, w_1 r_{ij}^{(1)} \oplus w_2 r_{ij}^{(2)} \oplus \cdots \oplus w_l r_{ij}^{(l)}), \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{k=1}^l w_k = 1, \\ w_k \geq 0, k = 1, 2, \cdots, l, \end{cases} \tag{7}$$

得: $W = \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ 。

2.2 基于非线性规划的群决策属性权重确定模型

在决策者的决策权重 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 已知的情况下, 根据式 (3) 求得综合决策矩阵 R , 将综合决策矩阵的属性列加权平均, 计算出综合属性列 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, 其中

$$t_i = \omega_1 r_{i1} \oplus \omega_2 r_{i2} \oplus \dots \oplus \omega_n r_{in} \quad (8)$$

再计算综合决策矩阵的每一属性列与综合属性列的对应元素距离之和, 记为:

$$E = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d(t_i, r_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d(\omega_1 r_{i1} \oplus \omega_2 r_{i2} \oplus \dots \oplus \omega_n r_{in}, r_{ij}) \quad (9)$$

最后求解目标规划:

$$\min f = E = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d(\omega_1 r_{i1} \oplus \omega_2 r_{i2} \oplus \dots \oplus \omega_n r_{in}, r_{ij}), \text{ s. t. } \begin{cases} \sum_{j=1}^n \omega_j = 1, \\ \omega_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (10)$$

得: $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ 。

3 基于 Pythagorean 模糊非线性规划的群决策方法

步骤 1: 根据式 (1) 将决策者 e_k 的评价矩阵 $S_k = (s_{ij}^{(k)})_{m \times n} (k = 1, 2, \dots, l)$ 规范化为 $R_k = (r_{ij}^{(k)})_{m \times n} (k = 1, 2, \dots, l)$ 。

步骤 2: 利用式 (2) ~ 式 (4) 求解决策者的客观权重向量 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 。

步骤 3: 通过式 (5), 求得综合决策矩阵 R 。

步骤 4: 利用式 (8) ~ 式 (10) 求解方案属性的客观权重向量 $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ 。

步骤 5: 通过式 (8) 计算综合属性列 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, 并根据定义 6 及定理 1 求得各方案对应的得分函数和精确函数。

步骤 6: 排序和择优。

4 实例分析

4.1 问题背景

随着我国经济的高速运转, 我国的民航事业也得到了持续和稳定的发展, 尤其自国家允许民营资本进入市场以来, 多家民营航空公司相继问世, 并迅速扩张市场。在多家航空公司激烈竞争背景下, 航空公司成立和发展过程中不可避免存在的问题就是飞机的机型选择问题。机型选择作为航空公司重要的战略规划之一, 直接决定了航空公司的长期经济效益, 而且还在一定程度上影响公司的技术、管理水平及其市场竞争力。

德国戴姆勒-克莱斯勒宇航公司 (DASA) 对全世界航空公司选购飞机的关键因素进行了分析研究, 为航空公司提供相应的经济和运营指标, 主要包括: 经济性, 飞机性能, 通用性, 环保性以及舒适性。随着旅客出行次数增加, 对航空出行的深入了解, 旅客出行行为逐渐改变, 在航空出行时对机型、航空公司等方面有更多的要求。航空公司在进行机型选择时, 不仅需要考虑旅客对机型的选择的偏好, 还需要从旅客的安全、舒适性等角度考虑。因此, 对航空公司机型选择的研究可以有效地分析旅客对机型的舒适性和品牌的要求, 并能够给航空公司带来更多的收益。

4.2 实例分析

现考虑一个航空公司机型选择问题。假设现在有 3 个机型 P_1, P_2, P_3 可以选择, 针对这些机型选择需要考虑 5 个方面的内容: 1) 舒适度 (Q_1); 2) 飞机性能 (Q_2); 3) 环保性 (Q_3); 4) 通用性 (Q_4); 5) 价格 (Q_5)。其中 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 均为效益型属性, 只有 Q_5 属于成本型属性。现航空公司聘请

了3位专家 e_1, e_2, e_3 来对3种机型在5个方面进行评价,3位专家给出的初始评价矩阵如表1。

表1 专家 e_1, e_2, e_3 给出的 Pythagorean 模糊评价矩阵 S_1
Tab.1 Fuzzy evaluation matrix S_1 given by expert e_1, e_2, e_3

专家 Expert	机型 Type	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
e_1	P_1	(0.9,0.1)	(0.8,0.2)	(0.8,0.2)	(0.9,0.1)	(0.4,0.5)
	P_2	(0.7,0.2)	(0.9,0.2)	(0.6,0.5)	(0.8,0.1)	(0.7,0.4)
	P_3	(0.8,0.2)	(0.9,0.1)	(0.8,0.1)	(0.8,0.3)	(0.6,0.5)
e_2	P_1	(0.9,0.2)	(0.8,0.2)	(0.7,0.1)	(0.9,0.1)	(0.3,0.8)
	P_2	(0.8,0.2)	(0.9,0.1)	(0.9,0.1)	(0.7,0.4)	(0.7,0.2)
	P_3	(0.7,0.2)	(0.9,0.1)	(0.8,0.1)	(0.9,0.2)	(0.6,0.3)
e_3	P_1	(0.8,0.1)	(0.8,0.1)	(0.9,0.1)	(0.8,0.2)	(0.4,0.7)
	P_2	(0.9,0.2)	(0.7,0.3)	(0.8,0.1)	(0.9,0.2)	(0.7,0.3)
	P_3	(0.9,0.1)	(0.8,0.1)	(0.8,0.1)	(0.9,0.1)	(0.6,0.4)

步骤1 根据式(1)将3位专家的初始评价矩阵规范化并计算其犹豫度,得规范化后的评价矩阵如表2。

表2 专家 e_1, e_2, e_3 的规范化评价矩阵 R_1
Tab.2 Normalized evaluation matrix R_1 of expert e_1, e_2, e_3

专家 Expert	机型 Type	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
e_1	P_1	(0.9,0.1,0.42)	(0.8,0.2,0.57)	(0.8,0.2,0.57)	(0.9,0.1,0.42)	(0.4,0.5,0.77)
	P_2	(0.7,0.2,0.69)	(0.9,0.2,0.39)	(0.6,0.5,0.62)	(0.8,0.1,0.59)	(0.7,0.4,0.59)
	P_3	(0.8,0.2,0.57)	(0.9,0.1,0.42)	(0.8,0.1,0.59)	(0.8,0.3,0.52)	(0.6,0.5,0.62)
e_2	P_1	(0.9,0.2,0.39)	(0.8,0.2,0.57)	(0.7,0.1,0.70)	(0.9,0.1,0.42)	(0.8,0.3,0.52)
	P_2	(0.8,0.2,0.57)	(0.9,0.1,0.42)	(0.9,0.1,0.42)	(0.7,0.4,0.59)	(0.2,0.7,0.69)
	P_3	(0.7,0.2,0.69)	(0.9,0.1,0.42)	(0.8,0.1,0.59)	(0.9,0.2,0.39)	(0.3,0.6,0.74)
e_3	P_1	(0.8,0.1,0.59)	(0.8,0.1,0.59)	(0.9,0.1,0.42)	(0.8,0.2,0.57)	(0.4,0.7,0.59)
	P_2	(0.9,0.2,0.39)	(0.7,0.3,0.65)	(0.8,0.1,0.59)	(0.9,0.2,0.39)	(0.7,0.3,0.65)
	P_3	(0.9,0.1,0.42)	(0.8,0.1,0.59)	(0.8,0.1,0.59)	(0.9,0.1,0.42)	(0.6,0.4,0.69)

步骤2 根据式(2)~式(4),解得专家客观权重向量为: $W=(0.333\ 6,0.333\ 3,0.333\ 1)$ 。

步骤3 已知专家客观权重向量,再由式(5)计算出综合的专家评价矩阵如表3。

表3 专家 e_1, e_2, e_3 的综合评价矩阵 R
Tab.3 Comprehensive evaluation matrix R of all expert e_1, e_2, e_3

机型 Type	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
P_1	(0.87,0.13,0.47)	(0.80,0.16,0.58)	(0.82,0.13,0.56)	(0.87,0.17,0.47)	(0.70,0.39,0.60)
P_2	(0.82,0.20,0.54)	(0.86,0.18,0.48)	(0.80,0.17,0.57)	(0.82,0.20,0.54)	(0.31,0.58,0.75)
P_3	(0.82,0.16,0.55)	(0.87,0.10,0.47)	(0.80,0.10,0.59)	(0.87,0.18,0.45)	(0.41,0.56,0.72)

步骤4 根据式(8)~式(10),求解得方案属性的客观权重向量为: $\omega=(0.1886,0.1679,0.1461,0.1886,0.3088)$ 。

步骤5 已知属性客观权重,再通过式(8)计算方案的综合属性列 T ,并根据定义4计算出3个方案综合评分值的得分函数和精确函数,如表4。

表 4 3 个方案的综合属性评价表
Tab. 4 Comprehensive attribute evaluation of three programs

机型 Type	综合属性评价价值 Comprehensive attriuate evaluation value	得分函数 Score function	精确函数 Exact function
P_1	(0. 81,0. 19,0. 55)	0. 63	0. 70
P_2	(0. 75,0. 28,0. 60)	0. 49	0. 64
P_3	(0. 78,0. 21,0. 59)	0. 56	0. 65

步骤 6 排序和择优。根据定义 6 和定理 1，比较 3 个方案综合属性评价价值的大小，得出 3 个方案的优先排序方案，结果为： $P_1 > P_2 > P_3$ 。故综合 5 个方面的考虑，航空公司应选择第一种机型。

5 结语

本文提出了一种基于 Pythagorean 模糊非线性规划的多属性群决策方法。首先，针对 Pythagorean 模糊非线性规划多属性决策问题，给出两种思路下决策者和属性客观权重的确定方法，进而提出此类模糊群决策的详细解决步骤；其次，以航空公司机型的选取实例，论证了本文提出的 Pythagorean 模糊非线性规划的多属性决策模型的可行性和有效性。

本文运用的矩阵间距离测度公式的定义仅基于 Lance 距离进行的拓展，而且简单的平方差会增加评价误差。同时，目标函数的模型构造也较为简洁。下一步的工作目标就是在本文的基础上改进距离公式和目标函数，以提高评价的精确度。

[参 考 文 献]

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets [J]. Information & Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20: 87-96.

[3] YAGER R R. Pythagorean membership grades in multicriteria decision making [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2014, 22(4): 958-965.

[4] ZHANG X, XU Z S. Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2014, 29: 1061-1078.

[5] GARG H. A novel accuracy function under interval-valued Pythagorean fuzzy environment for solving multicriteria decision making problem [J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2016, 31(1): 529-540.

[6] GARG H. A novel correlation coefficients between Pythagorean fuzzy sets and its applications to decision making processes [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31(12): 1234-1252.

[7] 刘卫锋, 杜迎雪, 常娟. 毕达哥拉斯模糊交叉影响集成算子及其决策应用 [J]. 控制与决策, 2017, 32(6): 1033-1040.

[8] 丁恒, 李延来. 基于毕达哥拉斯模糊幂加权平均算子的多属性群决策方法 [J]. 计算机工程与应用, 2018(5): 1-6.

[9] 孟波. 有限方案模糊多目标决策方法的研究 [J]. 系统工程, 1995, 13(4): 43-46.

[10] 孟波, 付微. 一种有限方案多目标群决策方法 [J]. 系统工程, 1998, 16(4): 57-61.

[11] 胡毓达, 田川. 求解群体多指标决策问题的偏爱度法 [J]. 系统工程理论与实践, 1996(3): 52-56.

[12] 宋光兴, 邹平. 多属性群决策中决策者权重的确定方法 [J]. 系统工程, 2001, 19(4): 84-89.

[13] 徐泽水. 几类多属性决策方法研究 [D]. 南京: 东南大学, 2002.

[14] 徐泽水. 多属性决策的两种方差最大化方法 [J]. 管理工程学报, 2002, 15(2): 11-14.

[15] HWANG C L, YOON K. Multiple attribute decisionmaking and applications [M]. New York: Springer-Verlag, 1981.

[16] XU Z S, CAI X Q. Intuitionistic fuzzy information aggregation: theory and applications [M]. Beijing: Science Press, 2012: 286-294.

[17] 陈华友. 运筹学 [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2015: 229-230.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)