

时标上局部耦合线性系统的聚类同步

李嘉敏, 宾红华, 黄振坤

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 在牵制控制策略下, 研究了时标上局部耦合线性系统有向网络的聚类同步问题。通过构造 Lyapunov 函数, 运用线性矩阵不等式性质和时标微积分理论, 分别得到了固定拓扑和切换拓扑下达到聚类同步的充分条件。给出了数值模拟来验证所得结论的正确性。

[关键词] 聚类同步; 局部耦合线性系统; 时标; 牵制控制

[中图分类号] O 193

Cluster Synchronization of Partial-state Coupled Linear Systems on Time Scales

LI Jiamin, BIN Honghua, HUANG Zhenkun

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: This paper investigated the cluster synchronization for directed network of partial-state coupled linear systems via pinning control strategy. By utilizing the Lyapunov stability theory, linear matrix inequalities and the calculus of time scales, sufficient conditions were derived to guarantee the cluster synchronization of linear systems under fixed and switched topology. The numerical simulations were provided to show the effectiveness of the theoretical results.

Keywords: cluster synchronization; partial-state coupled linear systems; on time scales; pinning control

0 引言

近年来, 复杂网络同步性研究已经引起了学者们的广泛关注, 并取得了丰硕的成果^[1-4]。同时, 衍生出了多种同步类型, 如完全同步^[1]、相位同步^[2]、滞后同步^[3]以及聚类同步^[4]等。其中, 聚类同步作为一种重要的同步现象, 在信息科学领域有广泛应用, 因而成为近年来一个新的研究热点。文献[4]首次考虑了线性耦合系统的聚类同步问题。随着对网络拓扑结构和聚类同步能力之间的深入研究与理解, 研究者们逐渐提出了一些能够实现聚类同步的控制方法^[4-7]。文献[7]通过间歇牵制控制方法研究了有向网络的聚类同步。另外, 具有部分耦合状态的线性系统复杂网络同步问题也引起了控制领域学者的极大关注。为了使得网络达到聚类同步, 不论节点间耦合强度如何, 文献[8]提出了一种特殊的聚类间耦合方法。但是, 对于在一般的耦合方式下达到聚类同步需要满足什么条件仍然未知。此外, 聚类内部耦合强度下界以及同步速度也值得探讨。值得关注的是, 文献[9]通过较为一般的牵制控制方法研究了线性系统有向网络的聚类同步问题, 并且讨论了类内耦合强度下限与同

[收稿日期] 2018-03-14

[基金项目] 国家自然科学基金项目(61573005); 福建省自然科学基金项目(2018J01417)

[作者简介] 李嘉敏(1991—), 女, 硕士生, 从事复杂网络分析与控制研究。通信作者: 宾红华(1966—), 女, 教授, 硕导, 从事复杂网络分析与控制研究。E-mail: hbbin@jmu.edu.cn

步速度。

上述文献大都局限于连续情形, 离散情况很少受到关注。因此在时标理论上研究聚类同步很有必要, 它不但可以描述连续或离散情形, 也可以描述连续和离散相混合的情形。Hilger 提出的时标理论已经引起人们的关注并取得了很多成果^[10-16]。但是, 时标上的局部耦合线性系统聚类同步尚未得到研究。因此, 本文将研究一般时标上具有部分耦合的线性系统有向网络聚类同步问题, 运用牵制控制方法, 分别讨论了固定拓扑和切换拓扑两种结构下线性系统有向网络达到聚类同步的充分条件。

1 预备知识

1.1 图论预备知识及模型描述

$G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 表示加权有向图, 它包含 N 个节点的非空点集 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$, 边集 $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 和加权邻接矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 其中 a_{ij} 表示有向边 (j, i) 的权重, 若 (j, i) 是图 G 的边, 则 $a_{ij} \neq 0$, 反之 $a_{ij} = 0$ 。假设对所有 $i \in \mathcal{V}$, 有 $a_{ii} = 0$ 。加权有向图 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 的 Laplacian 矩阵如下: $L_{ij} =$

$$\begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^N a_{ik}, & j = i, \\ -a_{ij}, & j \neq i. \end{cases}$$
 图 G 平衡当且仅当所有的节点都平衡, 即满足 $\sum_{j=1}^N a_{ij} = \sum_{j=1}^N a_{ji}, \forall i \in \mathcal{V}$, 其等价于

$1^T \mathcal{L}(G) = 0$ 。如果图 G 至少存在一个根节点, 且从该节点到所有其他节点存在有向路径, 则称该图具有有向生成树。

集合 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 的一个集族 $\{\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_q\}$, 其中 $\mathcal{V}_\ell \neq \emptyset, \cup_{\ell=1}^q \mathcal{V}_\ell = \mathcal{V}$, 并且 $\mathcal{V}_\ell \cap \mathcal{V}_k = \emptyset (\ell \neq k, \ell, k = 1, \dots, q)$, 文中称 \mathcal{V}_ℓ 为类。令 $i \in \mathcal{V}$, \bar{i} 表示整数 i 所属子集的下标, 即 $i \in \mathcal{V}_{\bar{i}}$ 。因此, 如果 i 和 j 属同一类, 则 $\bar{i} = \bar{j}$ 。令 G_ℓ 表示类 $\mathcal{V}_\ell (\ell = 1, \dots, q)$ 的拓扑结构, 有 $\mathcal{V}_\ell = \mathcal{V}(G_\ell)$ 。

考虑时标 \mathbb{T} 上线性系统:

$$\dot{x}_i^\Delta(t) = Ax_i(t) + BK(\sum_{j=1}^N [c_{ij}a_{ij}(x_j(t) - x_i(t))] + u_i(t)), \tag{1}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N, x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t))^T \in \mathbf{R}^n$ 表示第 i 个节点的状态向量, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}, B \in \mathbf{R}^{n \times m}$, 且 $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 是反馈矩阵; $u_i(t)$ 表示牵制控制器; 当节点 i 和 j 同属一类时, $a_{ij} \geq 0$; 若 $\bar{i} = \bar{j} = \ell$, 则 $c_{ij} = c_\ell$, 反之 $c_{ij} = 1 (\bar{i} \neq \bar{j})$; $c_\ell > 0$ 表示类内耦合强度。由于 $\sum_{j=1}^N [c_{ij}a_{ij}(x_j(t) - x_i(t))]$ 前存在 BK , 所以线性系统中的节点是部分耦合的。

受到文献 [5] 和文献 [17] 中牵制控制方法的启发, 本文设计了如下反馈控制器以实现系统聚类同步: 1) 选取齐次线性系统 $s^\Delta(t) = As(t)$ 的 q 个特解 $s_1(t), s_2(t), \dots, s_q(t)$, 使其对任意 $\ell, k = 1, \dots, q, \ell \neq k$, 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|s_\ell(t) - s_k(t)\| \neq 0$; 2) 牵制控制器 $u_i(t)$ 设计为 $u_i(t) = c_i d_i (s_{\bar{i}}(t) - x_i(t))$, 若节点 i 被牵制, 则 $d_i > 0$, 反之 $d_i = 0$ 。

1.2 相关定义及引理

时标 \mathbb{T} 是实数集 \mathbf{R} 的任意一个非空闭子集, 如 $\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{N}$ 等。前跳算子 $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, 定义为 $\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$, 并且当 $\sup \mathbb{T} \in \mathbb{T}$ 时, $\sigma(\sup \mathbb{T}) = \sup \mathbb{T}$ 。后跳算子 $\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ 定义为 $\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$, 并且当 $\inf \mathbb{T} \in \mathbb{T}$ 时, $\rho(\inf \mathbb{T}) = \inf \mathbb{T}$ 。集合 \mathbb{T}^k 定义为: 当 $\sup \mathbb{T} < +\infty$ 时, $\mathbb{T}^k := \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}]$, 否则 $\mathbb{T}^k := \mathbb{T}$ 。距离函数 $\mu: \mathbb{T} \rightarrow [0, +\infty)$ 定义为 $\mu(t) := \sigma(t) - t$ 。当 $\mu(t) > 0$ 时, 称 t 为右扩散点; 当 $\mu(t) = 0$ 时, 称 t 为右稠密点。 C_{rd} 表示所有定义在 \mathbb{T} 上的右稠密连续函数。若函数 $p(t) \in C_{rd}$ 并且满足: 对任意的 $t \in \mathbb{T}^k$, 有 $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$, 则记 $p(t) \in R$ 。若函数 $p(t) \in C_{rd}$ 并且满足: 对任意的 $t \in \mathbb{T}^k$, 有 $1 + \mu(t)p(t) > 0$, 则记 $p(t) \in R^+$ 。

定义 1^[11] 设 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbf{R}, t \in \mathbb{T}^k$ 。若存在 $f^\Delta(t)$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 t 的邻域 $U \in \mathbb{T}$, 使得

$|f(\sigma(t)) - f(s)) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$, $\forall s \in U$, 则称它为 f 在 t 处的 Δ -导数。若 $f^\Delta(t)$ 在所有 $t \in \mathbb{T}^k$ 均存在, 则称 f 是 Δ -可微的。

对任意的 $t \in \mathbb{T}^k$, 可得 $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)\mu f^\Delta(t)$ 。若 f, g 是两个可微函数, 则 fg 的导数为 $(fg)^\Delta = f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta = f^\Delta g^\sigma + fg^\Delta$ 。

定义 2^[9] 若对系统任意初值, 通过设计反馈矩阵使得节点状态能够满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - s_i(t)\| = 0$, 则称系统可达到聚类同步。此外, 若存在正数 $\kappa > 0, T > 0, \varepsilon > 0$, 使得对任意 $x_i(0)$ 和 $t > T$, 都有 $\|x_i(t) - x_j(t)\| \leq \kappa e^{-\varepsilon t}$ 成立, 那么系统将以 ε 的速率达到聚类同步。

\mathcal{G} 表示含有 N 个节点的非负加权有向图 \mathcal{G} 的 Laplacian 矩阵, $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1, \dots, d_N\}$ 是非负对角阵。令 \mathcal{G} 表示包含有向图 \mathcal{G} , 节点 0, 以及从 0 到图 \mathcal{G} 中的有向边 (当且仅当 $d_i > 0$ 则从节点 0 到节点 $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ 之间存在有向边连接) 的有向图。因此, 从文献 [18-19] 中得到引理 1。

引理 1^[9] \mathcal{G} 和 \mathcal{D} 如上所述, 则: 1) 若图 G 平衡,

$$(\mathcal{L} + \mathcal{L}^T)/2 + \mathcal{D} > 0, \quad (2)$$

当且仅当 \mathcal{G} 为弱连通图; 2) 若 \mathcal{G} 包含有向生成树, 则存在正对角阵 Ξ , 使得

$$\Xi(\mathcal{L} + \mathcal{D}) + (\mathcal{L} + \mathcal{D})^T \Xi > 0 \quad (3)$$

成立。

注 1 引理 1 给定任意非负加权有向图 G 以及非负矩阵 $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1, \dots, d_N\}$, 找寻满足式 (3) 矩阵的方法, 文献 [17] 定理 1 已做出了详细说明。

引理 2 Kronecker 积 \otimes 有如下性质: 1) $(\alpha\Phi) \otimes \Psi = \Phi \otimes (\alpha\Psi)$; 2) $(\Phi + \Psi) \otimes P = \Phi \otimes P + \Psi \otimes P$; 3) $(\Phi \otimes \Psi)(P \otimes \Gamma) = (\Phi P) \otimes (\Psi \Gamma)$; 4) $(\Phi \otimes \Psi)^T = \Phi^T \otimes \Psi^T$ 。

引理 3 对任意列向量 $x \in \mathbf{R}^m$, 有: $x^T(Q \otimes W)x \leq \lambda_{\max}(Q)x^T(I_m \otimes W)x$, $x^T(W \otimes Q)x \leq \lambda_{\max}(Q)x^T(W \otimes I_m)x$, 其中 $Q \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 是对称矩阵, $W \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是对称半正定矩阵。

引理 4 令 C_1, C_2 是 $N \times N$ 阶 Hermitian 矩阵, 则满足 $\lambda_{\min}(C_1 + C_2) \geq \lambda_{\min}(C_1) + \lambda_{\min}(C_2)$ 。

假设 1 矩阵对 (A, B) 稳定, 并且 $\sum_{j \in V(G_\ell)} a_{ij} = 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, N, i \in V \setminus V_{G_\ell}$ 。若矩阵对 (A, B) 稳定, 那么对任意正数 δ , 下列 Riccati 不等式存在解 $P > 0$, 使得:

$$PA + A^T P - \delta P B B^T P + \delta I_n < 0. \quad (4)$$

2 固定拓扑下的聚类同步

本节主要研究在固定拓扑结构下系统达到聚类同步的条件。为了便于分析, 记每类中的节点数量

为 $n_\ell (1 \leq \ell \leq q)$, 显然, $N = n_1 + \dots + n_q$ 。Laplacian 矩阵以下列形式给出: $L = \begin{pmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{q1} & \cdots & L_{qq} \end{pmatrix}$, 其

中 L_{ii} 由图 G_i 决定, L_{ij} 表示类 G_j 到 $G_i (i, j = 1, \dots, p)$ 的信息传送, 入度平衡条件等价于矩阵 $L_{\ell k} (\ell \neq k, \ell, k = 1, \dots, q)$ 满足列和为零。

令 $D = \text{diag}\{D_1, \dots, D_q\} = \text{diag}\{d_1, \dots, d_N\}$, 其中 $D_\ell \in \mathbf{R}^{n_\ell \times n_\ell} (\ell = 1, \dots, q)$ 。矩阵 D_ℓ 描述类 \mathcal{G}_ℓ 中的节点牵制情况。此外, 令

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} c_1 \bar{L}_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1q} \\ L_{21} & c_2 \bar{L}_{22} & \cdots & L_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{q1} & L_{q2} & \cdots & c_q \bar{L}_{qq} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中 $\bar{L}_{\ell\ell} = L_{\ell\ell} + D_\ell$ 。 $\bar{G}_\ell (\ell = 1, \dots, q)$ 表示包含有向图 G_ℓ , 虚拟节点 $s_\ell(t)$ 和连接虚拟节点与图 G_ℓ 中节点的边的有向图。由引理 1 可知, 如果 \bar{G}_ℓ 含有有向生成树, 那么存在对角矩阵 $\Xi_\ell > 0$, 使得

$$\Xi_{\ell} \bar{L}_{\ell\ell} + \bar{L}_{\ell\ell}^T \Xi_{\ell} > 0, \ell = 1, 2, \dots, q. \quad (6)$$

文中, 记 $L_0 = L - \text{diag}\{L_{11}, \dots, L_{qq}\} \geq 0$ 和 $\Xi = \text{diag}\{\Xi_1, \dots, \Xi_q\}$, 显然 L_0 只与不同类间的耦合强度有关, 而与类内耦合强度 $c_{\ell} (\ell = 1, \dots, q)$ 无关。

定理1 在假设1下, 若每一个类中均有节点被牵制, 使得每个 $G_{\ell} (\ell = 1, \dots, q)$ 都包含有向生成树, 则: 1) $\lambda_{\min}(\Xi L_0 + L_0^T \Xi) \geq 0$ 。对于固定的 q 个数组 $(c_1, c_2, \dots, c_q) (c_{\ell} > 0, \ell = 1, \dots, q)$, 通过选定 $K = B^T P$ 使线性系统 (1) 能够以 $\varphi/(2\lambda_{\max}(P))$ 的速率指数型达到聚类同步, 其中 $\varphi = \min_{i \in \mathbb{T}} \{\eta_1 + \mu(t)(\eta_2 - \eta_3 \lambda_{\max}(\Sigma))\} > 0$, $P > 0$ 是不等式 (4) 和

$$A^T P A + (\eta_4 - \eta_1) A^T P B B^T P - \eta_4 P B B^T P A + \eta_2 I_n < 0 \quad (7)$$

的解, $\delta = \eta_1$, $\eta_2 > 0$, $\eta_3 > 0$ 及 $\eta_4 > 0$ 且满足 $\Xi \bar{L} + \bar{L}^T \Xi \geq \eta_1 \Xi$, $\bar{L}^T \Xi \bar{L} \leq \eta_3 \Xi$, $\bar{L}^T \Xi \leq \eta_4 \Xi$; 2) $\lambda_{\min}(\Xi L_0 + L_0^T \Xi) < 0$ 。若

$$c_{\ell} > (-\lambda_{\min}(\Xi L_0 + L_0^T \Xi)) / (\lambda_{\min}(\Xi_{\ell} L_{\ell\ell} + \bar{L}_{\ell\ell}^T \Xi_{\ell})), \ell = 1, \dots, q, \quad (8)$$

则选定 $K = B^T P$, 其中 $P > 0$ 是 $\delta = \zeta$ 时不等式 (4) 和 (7) 的解, 且 ζ 满足 $\Xi \bar{L} + \bar{L}^T \Xi \geq \zeta \Xi$, 那么系统 (1) 可达到聚类同步。

证明 令 $e_i(t) = x_i(t) - s_i(t)$ 。若 $j \in \mathcal{N}(G_k)$, 则 $\bar{j} = k$, $e_j(t) = x_j(t) - s_k(t)$ 。与文献 [9] 类似, 根据文献 [9] 和 Laplacian 矩阵定义可知 $\sum_{j=1}^N [a_{ij}(x_j(t) - x_i(t))] = \sum_{j=1}^N [a_{ij}(e_j(t) - e_i(t))]$, 与式 (4) 结合得 $e_i^{\Delta}(t) = A e_i(t) + B K \sum_{j=1}^N [c_{ij} a_{ij}(e_j(t) - e_i(t)) - c_i d_i e_i(t)]$ 。令 $e(t) = (e_1^T(t), e_2^T(t), \dots, e_N^T(t))^T \in \mathbf{R}^{nN}$, 误差系统可写为

$$e^{\Delta}(t) = ((I_N \otimes A) - \bar{L} \otimes B K) e(t), \quad (9)$$

由式 (5) 知 $\bar{L} = L + D$ 。下证 1)。

由于 $\Xi \bar{L} + \bar{L}^T \Xi = \text{diag}\{\Xi_1 \bar{L}_{11} + \bar{L}_{11}^T \Xi_1, \dots, \Xi_q \bar{L}_{qq} + \bar{L}_{qq}^T \Xi_q\} + (\Xi L_0 + L_0^T \Xi)$, 根据引理4和式 (6) 可知 $\Xi \bar{L} + \bar{L}^T \Xi > 0$, 则一定存在 $\eta_1 > 0$, 使得 $\Xi \bar{L} + \bar{L}^T \Xi \geq \eta_1 \Xi$ 。

给定以下 Lyapunov 函数 $V(t) = e^T(t)(\Xi \otimes P)e(t)$, 其中 $P > 0$ 是 $\delta = \eta_1$ 时不等式 (4) 和式 (7) 的解。令 $K = B^T P$, $\Sigma = P B B^T P B B^T P$, 那么, $V^{\Delta}(t) = e^T(t)(\Xi \otimes P)e^{\Delta}(t) + e^{\Delta T}(t)(\Xi \otimes P)e(\sigma(t)) = e^T(t)(\Xi \otimes P)e^{\Delta}(t) + e^{\Delta T}(t)(\Xi \otimes P)(\mu(t)e^{\Delta}(t) + e(t)) = e^T(t)(\Xi \otimes P)e^{\Delta}(t) + \mu(t)e^{\Delta T}(t)(\Xi \otimes P)e^{\Delta}(t) + e^{\Delta T}(t)(\Xi \otimes P)e(t) = e^T(t)(\Xi \otimes P)(I_N \otimes A - \bar{L} \otimes B K)e(t) + \mu(t)e^T(t)(\Xi \otimes P)(I_N \otimes A^T - \bar{L} \otimes K^T B^T) \times (\Xi \otimes P)(I_N \otimes A - \bar{L} \otimes B K)e(t) + e^T(t)(I_N \otimes A^T - \bar{L} \otimes K^T B^T)(\Xi \otimes P)e(t) = e^T(t)(\Xi \otimes (PA + A^T P) - (\Xi \bar{L} + \bar{L}^T \Xi) \otimes P B B^T P)e(t) + \mu(t)e^T(t)(\Xi \otimes A^T P A - \Xi \bar{L} \otimes A^T P B B^T P - \bar{L}^T \Xi \otimes P B B^T P A)e(t) + \mu(t)e^T(t)(\bar{L}^T \Xi \bar{L} \otimes \Sigma)e(t) \leq e^T(t)(\Xi \otimes (PA + A^T P - \eta_1 P B B^T P))e(t) + \mu(t)e^T(t)(\Xi \otimes A^T P A + (\bar{L}^T \Xi - \eta_1 \Xi) \otimes A^T P B B^T P - \bar{L}^T \Xi \otimes P B B^T P A)e(t) + \mu(t)\lambda_{\max}(\Sigma)e^T(t)(\bar{L}^T \Xi \bar{L} \otimes I_n)e(t) \leq -\eta_1 e^T(t)(\Xi \otimes I_n)e(t) + \mu(t)e^T(t)(\Xi \otimes A^T P A + \bar{L}^T \Xi \otimes (A^T P B B^T P - P B B^T P A) - \eta_1 \Xi \otimes A^T P B B^T P)e(t) + \mu(t)\lambda_{\max}(\Sigma)e^T(t)(\bar{L}^T \Xi \bar{L} \otimes I_n)e(t) \leq -\eta_1 e^T(t)(\Xi \otimes I_n)e(t) + \mu(t)e^T(t)(\Xi \otimes (A^T P A + (\eta_4 - \eta_1) A^T P B B^T P - \eta_4 P B B^T P A) \times e(t) + \mu(t)\lambda_{\max}(\Sigma)e^T(t)(\bar{L} \Xi \bar{L} \otimes I_n)e(t) \leq -\eta_1 e^T(t)(\Xi \otimes I_n)e(t) - \mu(t)\eta_2 e^T(t)(\Xi \otimes I_n)e(t) + \mu(t)\eta_3 \lambda_{\max}(\Sigma)e^T(t)(\Xi \otimes I_n)e(t) = -(\eta_1 + \mu(t)(\eta_2 - \eta_3 \lambda_{\max}(\Sigma)))e^T(t)(\Xi \otimes I_n)e(t) \leq -\varphi e^T(t)(\Xi \otimes I_n)e(t)。$

由 $V(t) \leq \lambda_{\max}(P)e^T(t)(\Xi \otimes I_n)e(t)$ 可知, $V^{\Delta}(t) \leq -\varphi V(t)/\lambda_{\max}(P)$ 。因此, 系统 (1) 可以 $\varphi/(2\lambda_{\max}(P))$ 速率指数型达到聚类同步。

对于 2), 由 1) 的讨论易知, 想要达到聚类同步的一个关键是确保 $\Xi \bar{L} + \bar{L}^T \Xi > 0$, 因此根据引理4和 $\Xi \bar{L} + \bar{L}^T \Xi = \Xi L_0 + L_0^T \Xi + L_d$, 只需选取适当的 c_1, \dots, c_q 满足 $\lambda_{\min}(L_d) + \lambda_{\min}(\Xi L_0 + L_0^T \Xi) > 0$ 即可, 其中 $L_d = \text{diag}\{c_1(\Xi_1 \bar{L}_{11} + \bar{L}_{11}^T \Xi_1), \dots, c_q(\Xi_q \bar{L}_{qq} + \bar{L}_{qq}^T \Xi_q)\}$ 。也就是说, 对任意 $\ell = 1, \dots, q$, 只需保证

$$c_\ell \lambda_{\min}(\Xi_\ell \bar{L}_{\ell\ell} + \bar{L}_{\ell\ell}^T \Xi_\ell) + \lambda_{\min}(\Xi L_0 + L_0^T \Xi) > 0 \quad (10)$$

成立, 即 $c_\ell > -(\lambda_{\min}(\Xi L_0 + L_0^T \Xi))/(\lambda_{\min}(\Xi_\ell \bar{L}_{\ell\ell} + \bar{L}_{\ell\ell}^T \Xi_\ell))$, $\forall \ell = 1, \dots, q$ 。可知存在正常数 ζ , 使得 $\Xi \bar{L} + \bar{L}^T \Xi \geq \zeta \Xi$ 成立。其余证明和 1) 类似, 略有不同, 在根据不等式 (4) 选择 Lyapunov 函数中的 P 时令 $\delta = \zeta$ 即可。定理证毕。

注 2 根据定理 1 可知, 除了矩阵对稳定和一定的连通性假设之外, 只要类内的耦合强度与不同类之间强度相比足够强, 那么系统就可快速达到聚类同步。此外, 定理 1 还得到了确保系统达到同步的类内耦合强度下界, 采用的牵制方案允许任意的类内拓扑结构且不需要其他连通条件。

3 切换拓扑下的聚类同步

本节讨论切换拓扑下的同步问题。 t 时刻的网络拓扑图记为 $G(t)$, 其中 $G_1(t), \dots, G_q(t)$ 分别为 q 类 $\{V_1, \dots, V_q\}$ 的网络拓扑图, 线性系统模型如下:

$$\dot{x}_i(t) = A x_i(t) + B K \left(\sum_{j=1}^N c_{ij} a_{ij}(t) (x_j(t) - x_i(t)) + c_i d_i(t) (s_i(t) - x_i(t)) \right), \quad (11)$$

其中: $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 为待设计的反馈矩阵; 若节点 j 和 i 之间有连接, 则 $a_{ij}(t) \neq 0$, 反之 $a_{ij}(t) = 0$; 若节点 i 在时刻 t 被牵制, $d_i(t) > 0$, 反之 $d_i(t) = 0$; c_{ij} 和 c_i 如系统 (1) 所示。

令 $\bar{\alpha}$ 表示包含所有 $a_{ij}(t)$ 和 $d_i(t)$ 的有限集。对于不同聚类, 如果 $G_k(t)$ 与 $G_\ell(t)$ ($\ell \neq k$) 之间在 t 时刻存在耦合, 假设 $G_\ell(t)$ 和 $G_k(t)$ 之间保持入度平衡, 那么以矩阵形式可描述如下。

假设 2 任意 t 时刻, 矩阵 $L_{\ell k}(t)$ ($k \neq \ell$) 均满足列和为零。

令 $L(t)$ 表示图 $G(t)$ 的 Laplacian 矩阵 $L = \begin{pmatrix} L_{11}(t) & \cdots & L_{1q}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{q1}(t) & \cdots & L_{qq}(t) \end{pmatrix}$, 其中 $L_{\ell\ell}(t)$ 表示非负加权有向

图 $G_\ell(t)$ ($\ell = 1, \dots, q$) 的 Laplacian 矩阵, $D(t) = \text{diag}\{D_1(t), \dots, D_q(t)\} = \text{diag}\{d_1(t), \dots, d_N(t)\}$, 且 $D_\ell(t) \in \mathbf{R}^{n_\ell \times n_\ell}$,

$$\bar{L}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \bar{L}_{11}(t) & L_{12}(t) & \cdots & L_{1q}(t) \\ L_{21}(t) & c_2 \bar{L}_{22}(t) & \cdots & L_{2q}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{q1}(t) & L_{q2}(t) & \cdots & c_q \bar{L}_{qq}(t) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

其中 $\bar{L}(t) = \bar{L}_{\ell\ell}(t) + D_\ell(t)$, $\ell = 1, \dots, q$ 。

对每一类 V_ℓ , 定义

$$\lambda_{\min}^\ell = \lambda_{\min}(L_{\ell\ell}(t) + L_{\ell\ell}^T(t) + 2D_\ell(t)), \quad (13)$$

图 $\bar{G}_\ell(t)$ 表示包含有向图 $G_\ell(t)$ 和 $D_\ell(t)$ 的有向图, 是弱连通图且 $G_\ell(t)$ 为平衡图。由于 $\bar{\alpha}$ 是一个有限集, 因此根据引理 1 可得 $\lambda_{\min}^\ell > 0$ 。

令

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & L_{12}(t) & \cdots & L_{1q}(t) \\ L_{21}(t) & 0 & \cdots & L_{2q}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{q1}(t) & L_{q2}(t) & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

因为 $\bar{\alpha}$ 是有限集, 则引理 5 显而易见。

引理 5 令 ϕ 是所有 $M(t)$ 构成的集合, $\phi = \{M = (M_{ij})_{q \times q} \mid M_{ij} \in \mathbf{R}^{n_i \times n_j}; M_{ii} = 0; M_{ij} 1_{n_j} = 0, i, j = 1, \dots, q\}$, 其中 M_{ij} 从 $\bar{\alpha}$ 中选取, 则 ϕ 是有限集。

根据引理 5 可定义 $\bar{\lambda} := \min \{ \lambda_{\min}(\mathbf{M} + \mathbf{M}^T) \mid \mathbf{M} \in \Phi \}$ 。

定理 2 在假设 1 和假设 2 下, 若每个 $G_\ell(t)$ 是平衡图且每一类中均有节点被牵制使得 $\bar{G}_\ell(t)$ 保持弱连通, 则有: 1) $\bar{\lambda} \geq 0$ 。对于固定的 q 个数组 $(c_1, c_2, \dots, c_q) (c_\ell > 0, \ell = 1, \dots, q)$, 通过设计反馈矩阵 $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{P}$, 使得线性系统 (11) 以速率 $\phi/(2\lambda_{\max}(P))$ 达到聚类同步, 其中 $\phi = \min_{t \in T} \{ \gamma_1 + \mu(t)(\gamma_2 - \gamma_3 \lambda_{\max}(\Sigma)) \} > 0$, $\mathbf{P} > 0$ 是不等式 (4) 和

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + (\gamma_4 - \gamma_1) \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P} - \gamma_4 \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \gamma_2 \mathbf{I}_n < 0 \tag{15}$$

的解, $\delta = \gamma_1$, $\gamma_2 > 0$, $\gamma_3 > 0$ 及 $\gamma_4 > 0$, 且满足 $\bar{\mathbf{L}}(t) + \bar{\mathbf{L}}^T(t) \geq \gamma_1 \mathbf{I}_N$, $\bar{\mathbf{L}}(t) \bar{\mathbf{L}}^T(t) \leq \gamma_3 \mathbf{I}_N$, $\bar{\mathbf{L}}^T(t) \leq \gamma_4 \mathbf{I}_N$ 。2) $\bar{\lambda} < 0$ 。若

$$c_\ell > -\bar{\lambda}/\lambda_{\min}^\ell, \ell = 1, \dots, q, \tag{16}$$

则令反馈矩阵 $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{P}$, 其中 $\mathbf{P} > 0$ 是 $\delta = \xi$ 时不等式 (4) 和 (15) 的解, 且 ξ 满足 $\bar{\mathbf{L}}(t) + \bar{\mathbf{L}}^T(t) \geq \xi \mathbf{I}_N$ 使得系统 (11) 达到同步状态。

证明 令 $e_i(t) = x_i(t) - s_i(t)$ 。类似于式 (9), 可得误差系统为

$$e^\Delta(t) = ((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}) - \bar{\mathbf{L}}(t) \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}) e(t), \tag{17}$$

其中 $\bar{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{L}(t) + \mathbf{D}(t)$ 如式 (12) 所示。先证明 1)。由于 $\bar{\mathbf{L}}(t) = \bar{\mathbf{L}}_{\ell\ell}(t) + \mathbf{D}_\ell(t), \ell = 1, \dots, q$, 根据引理 4 可以推出,

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\bar{\mathbf{L}}(t) + \bar{\mathbf{L}}^T(t)) &\geq \lambda_{\min}(\mathbf{M}(t) + \mathbf{M}^T(t)) + \lambda_{\min} \text{diag} \{ c_1(\bar{\mathbf{L}}_{11}(t) + \bar{\mathbf{L}}_{11}^T(t)), \dots, \\ &c_q(\bar{\mathbf{L}}_{qq}(t) + \bar{\mathbf{L}}_{qq}^T(t)) \} \geq \min \{ c_1 \lambda_{\min}^1, \dots, c_q \lambda_{\min}^q \} > 0. \end{aligned} \tag{18}$$

那么, 定会存在一个常数 $\gamma_1 > 0$ 使得 $\bar{\mathbf{L}}(t) + \bar{\mathbf{L}}^T(t) \geq \gamma_1 \mathbf{I}_N$ 。

考虑 Lyapunov 函数 $V(t) = e^T(t)(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P})e(t)$, 其中 $\mathbf{P} > 0$ 是 $\delta = \gamma_1$ 时不等式 (4) 和 (15) 的解。于是, 令 $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{P}$, $\Sigma = \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$, 那么, $V^\Delta(t) \leq e^T(t)(\mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \gamma_1 \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}))e(t) + \mu(t)e^T(t) \times (\mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + (\gamma_4 - \gamma_1) \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P} - \gamma_4 \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A})e(t) + \mu(t)\lambda_{\max}(\Sigma)e^T(t)(\bar{\mathbf{L}}^T(t)\bar{\mathbf{L}}(t) \otimes \mathbf{I}_n)e(t) \leq -\gamma_1 e^T(t)e(t) - \mu(t)\gamma_2 e^T(t)e(t) + \mu(t)\gamma_3 \lambda_{\max}(\Sigma)e^T(t)e(t) = -(\gamma_1 + \mu(t)(\gamma_2 - \gamma_3 \lambda_{\max}(\Sigma)))e^T(t)e(t) \leq -\phi e^T(t)e(t)$ 。因此, 系统可以 $\phi/(2\lambda_{\max}(P))$ 的速率达到聚类同步。

下面证明 2)。 $\mathbf{M}(t)$ 和 $\bar{\lambda}$ 均与 $c_\ell (\ell = 1, \dots, q)$ 无关, 令 $\mathbf{L}_d(t) = \text{diag} \{ c_1(\bar{\mathbf{L}}_{11}(t) + \bar{\mathbf{L}}_{11}^T(t)), \dots, c_q(\bar{\mathbf{L}}_{qq}(t) + \bar{\mathbf{L}}_{qq}^T(t)) \}$, 那么有 $\bar{\mathbf{L}}(t) + \bar{\mathbf{L}}^T(t) = \mathbf{L}_d(t) + \mathbf{M}(t) + \mathbf{M}^T(t)$ 。同样, 为了保证 $\bar{\mathbf{L}}(t) + \bar{\mathbf{L}}^T(t) > 0$, 即只需确保 $\text{diag} \{ c_1 \lambda_{\min}^1 \mathbf{I}_{n_1}, \dots, c_q \lambda_{\min}^q \mathbf{I}_{n_q} \} + \mathbf{M}(t) + \mathbf{M}^T(t) > 0$, 根据引理 4, 通过选择合适的 c_ℓ 满足 $c_\ell \lambda_{\min}^\ell + \bar{\lambda} > 0 (c_\ell > -\bar{\lambda}/\lambda_{\min}^\ell, \ell = 1, \dots, q)$ 。故选择 $\xi > 0$ 使得 $\bar{\mathbf{L}}(t) + \bar{\mathbf{L}}^T(t) \geq \xi \mathbf{I}_N$ 成立。其余证明和 1) 类似, 略有不同, 在根据不等式 (4) 选择 Lyapunov 函数中的 P 时令 $\delta = \xi$ 即可。定理证毕。

4 数值模拟

为了验证以上理论分析, 给出一组参数进行数值模拟。

例 1 考虑 $N=7$ 分为 3 类的线性系统有向网络, $G_1 = \{1, 2\}$, $G_2 = \{3, 4, 5\}$, $G_3 = \{6, 7\}$ 。时标 $\mathbb{T} = \cup_{l=0}^\infty [1.5l, 1.5l+1]$, 对所有的 $1.5l+1$ 有 $\mu(t) \equiv 0.5$, 且 3 类中分别牵制节点 1, 4, 7。系统

模型为 $x_i^\Delta(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B} \mathbf{K} (\sum_{j=1}^7 [c_{ij} a_{ij} (x_j(t) - x_i(t)) + u_i(t)])$, 其中 $\mathbf{x}_i(t) = \begin{pmatrix} x_{i1}(t) \\ x_{i2}(t) \\ x_{i3}(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} =$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}。显然, 矩阵对 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 稳定。$$

网络的加权邻接矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。假设所有节点的初值在 $[-50, 50] \times$

$[-50, 50] \times [-50, 50] \subset \mathbf{R}^3$ 中随机选取, $s_1(t), s_2(t), s_3(t)$ 分别取 $(-20, 15, 30)^T, (0, -10, -30)^T, (25, 0, -50)^T$, 且满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|s_i(t) - s_j(t)\| \neq 0$ 。

令 $\Xi = I_7$, 其中 $\Xi_1 = I_2, \Xi_2 = I_3, \Xi_3 = I_2$ 。容易算出 $\lambda_{\min}(\Xi L_0 + L_0^T \Xi) = -2.0529$, 取 $\zeta = 0.5$ 。可得类 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ 和 \mathcal{V}_3 的耦合强度分别为 $c_1 = 3, c_2 = 4.5, c_3 = 3.5$ 以确保满足式 (8)。正定矩阵 $P = \begin{pmatrix} 0.2231 & 0.3222 & 0.1674 \\ 0.3222 & 0.6869 & 0.3326 \\ 0.1674 & 0.3326 & 0.2879 \end{pmatrix}$, 则 $K = B^T P = (0.3222 \quad 0.6869 \quad 0.3326)$ 。

令 $E_1(t) = \sum_{\ell=1}^2 \|x_i(t) - s_1(t)\|, E_2(t) = \sum_{\ell=3}^5 \|x_i(t) - s_2(t)\|, E_3(t) = \sum_{\ell=6}^7 \|x_i(t) - s_3(t)\|$ 描述每个类的期望误差, 节点的运动轨迹和误差变化参见图 1 和图 2。

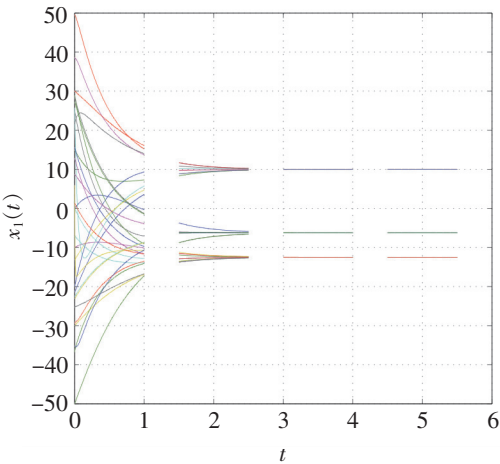


图 1 系统在时标 \mathbb{T} 上达到聚类同步
Fig.1 Cluster synchronization of systems on timescale \mathbb{T}

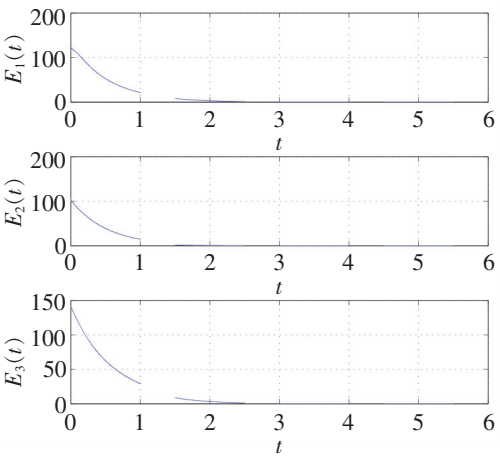


图 2 $E_1(t), E_2(t)$ 和 $E_3(t)$ 在时标 \mathbb{T} 上的轨迹
Fig.2 Evolution of $E_1(t), E_2(t)$ and $E_3(t)$

例 2 考虑分为 2 类含有 8 个节点的网络模型, $G_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, G_2 = \{6, 7, 8\}$, 时标 \mathbb{T} 和例 1

中一致。切换的两个拓扑结构加权邻接阵如下: $\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_2 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

且在两种拓扑结构的 3 个类中分别牵制节点 1,4,8。为了方便,

取例 1 中的矩阵对 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 和 $s_1(t), s_2(t)$, 节点的初值在 $[-50, 50]^3 \subset \mathbf{R}^3$ 中随机选取, 令 $\xi = 0.2$, $c_1 = 2.6$, $c_2 = 4$ 确保不等式 $\bar{L}(t) + \bar{L}(t)^T \geq \xi I_N$ 成立。当不等式 (4) 中 $\delta = \xi = 0.2$ 时, $P = \begin{pmatrix} 0.3201 & 0.5168 & 0.2642 \\ 0.5168 & 1.0776 & 0.5269 \\ 0.2642 & 0.5269 & 0.3864 \end{pmatrix}$, $K = B^T P = (0.5168 \quad 1.0776 \quad 0.5269)$ 。令 $E_1(t) = \sum_{i=1}^5 \|x_i(t) - s_1(t)\|$, $E_2(t) = \sum_{i=6}^8 \|x_i(t) - s_2(t)\|$, 节点的运动轨迹和最终误差参见图 3 和图 4。

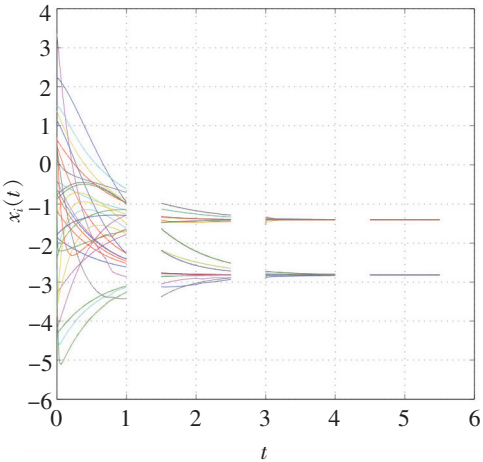


图 3 系统在时标 \mathbb{T} 上达到聚类同步

Fig.3 Cluster synchronization of systems on timescale \mathbb{T}

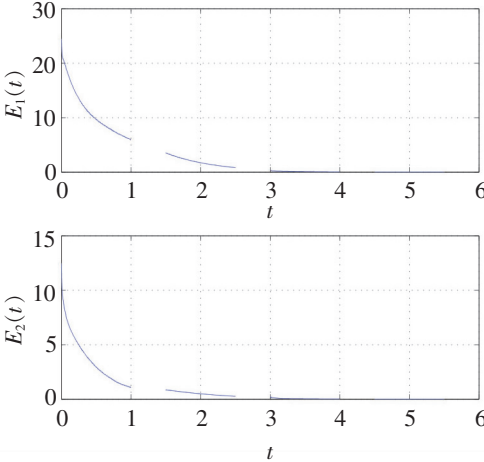


图 4 $E_1(t), E_2(t)$ 在时标 \mathbb{T} 上的轨迹

Fig.4 Evolution of $E_1(t), E_2(t)$

在上述算例中, 若时标 $\mathbb{T} = \mathbf{R}$, 则距离函数 $\mu(t) \equiv 0$, 此时本文的结果和文献 [9] 类似, 因此本文所得结果不仅包含文献 [9] 连续情况下的结果, 还包含了连续与离散混合情况, 是对文献 [9] 的一种推广和拓展。上述数值算例表明本文结论正确, 比文献 [9] 结果更具有一般性。

5 结语

通过牵制控制策略, 研究了一般时标上节点之间具有局部耦合状态的线性系统网络聚类同步。在固定拓扑结构下, 本文结果表明, 可设计合适的反馈矩阵来达到聚类同步, 只要网络满足 2 点: 第一, 每个聚类的诱导网络拓扑结构具有有向生成树; 第二, 类内的耦合强度与不同类之间强度相比足够强。此外, 若要求每个聚类诱导网络拓扑是平衡图, 那么结果可拓展到切换拓扑的情形。本文还取得了保证达到聚类同步的类内耦合强度下限以及聚类同步的速率。

[参考文献]

[1] YU W W, CHEN G, LÜ J H, et al. Synchronization via pinning control on general complex networks [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2013, 51(2): 1395-1416. DOI:10.1137/100781699.

- [2] MATHENY M H, GRAU M, VILLANUEVA L G, et al. Phase synchronization of two anharmonic nanomechanical oscillators [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(1): 1-15. DOI:10.1103/PhysRevLett.112.014101.
- [3] ZHANG Q J, ZHAO J C. Projective and lag synchronization between general complex networks via impulsive control [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 67(4): 2519-2525. DOI: 10.1007/s11071-011-0164-6.
- [4] WANG X, SHE K, ZHONG S M, et al. Pinning cluster synchronization of delayed complex dynamical networks with nonidentical nodes and impulsive effects [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 88(4): 2771-2782. DOI:10.1007/s11071-017-3410-8.
- [5] CHEN T P, LIU X W, LU W L. Pinning complex networks by a single controller [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2007, 54(6): 1317-1326. DOI:10.1109/TC.SI.2007.895383.
- [6] LIU X W, LI S H. Finite-time cluster synchronization of complex networks with time-varying delays [C] //2016 Chinese Control and Decision Conference. Yinchuan: IEEE, 2016: 4091-4096. DOI:10.1109/C CDC.2016.7531699.
- [7] LIU X W, CHEN T. Cluster synchronization in directed networks via intermittent pinning control [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, 22(7): 1009-1020. DOI:10.1109/TNN.2011.2139224.
- [8] QIN J H, YU C B. Cluster consensus control of generic linear multi-agent systems under directed topology with acyclic partition [J]. *Automatica*, 2013, 49(9): 2898-2905. DOI:10.1016/j.automatica.2013.06.017.
- [9] YU C B, QIN J H, GAO H J. Cluster synchronization in directed networks of partial-state coupled linear systems under pinning control [J]. *Automatica*, 2014, 50(9): 2341-2349. DOI:10.1016/j.automatica.2014.07.013.
- [10] HE W L, QIAN F, CAO J D, et al. Impulsive synchronization of two nonidentical chaotic systems with time-varying delay [J]. *Physics Letters A*, 2011, 375(3): 498-504. DOI:10.1016/j.physleta.2010.11.052.
- [11] BOHNER M, PETERSON A. *Dynamic equations on time scales; an introduction with applications* [M]. Boston: Birkhauser, 2001.
- [12] ZHANG Z Q, PENG G Q, ZHOU D M. Periodic solution to Cohen-Grossberg BAM neural networks with delays on time scales [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2011, 348(10): 2759-2781. DOI:10.1016/j.jfranklin.2011.08.015.
- [13] LU X D, WANG Y Z, ZHAO Y G. Synchronization of complex dynamical networks on time scales via Wirtinger-based inequality [J]. *Neurocomputing*, 2016, 216: 143-149. DOI:10.1016/j.neucom.2016.07.031.
- [14] TAN Y X, HUANG Z K. Synchronization of drive-response networks with delays on time scales [J]. *IEEE Journal of Automatica Sinica*, 2016, 99: 1-10. DOI:10.1109/JAS.2016.7510043.
- [15] HUANG Z K, RAFFOUL Y, CHENG C Y. Scale-limited activating sets and multi periodicity for Threshold-linear networks on time scales [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2014, 44(4): 488-499. DOI:10.1109/TCYB.2013.2257747.
- [16] ALI M S, YOGAMBIGAI J. Synchronization criterion of complex dynamical networks with both leakage delay and coupling delay on time scales [J]. *Neural Processing Letters*, 2019, 49(2): 453-466. DOI:10.1007/s11063-018-9821-9.
- [17] QIN J H, ZHENG W X, GAO H J. On pinning synchronisability of complex networks with arbitrary topological structure [J]. *International Journal of Systems Science*, 2011, 42(9): 1559-1571. DOI:10.1080/00207721.2011.555014.
- [18] QIN J H, GAO H J, ZHENG W X. Exponential synchronization of complex networks of linear system and nonlinear oscillators: a unified analysis [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, 26(3): 510-521. DOI:10.1109/TNNLS.2014.2316245.
- [19] QIN J H, YU C B. Coordination of multiagents interacting under independent position and velocity topologies [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks Learning System*, 2013, 24(10): 1588-1597. DOI:10.1109/TNNLS.2013.2261090.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)