[文章编号] 1007－7405(2019)05－0382－05　　DOI:10.19715/j.jmuzr.2019.05.10

一类带限制的 Schrödinger 方程的三个解

刘竞坤[1]，范　琦[2]

（1. 集美大学诚毅学院，福建 厦门 361021；2. 厦门思泰克智能科技股份有限公司，福建 厦门 361100）

[摘要] 应用变分方法，研究一类带限制的 Schrödinger 方程，证明其在一定条件下解的存在性。所获得的三个解：一个是正解，一个是负解，对于第三个解，本文只证明它的存在性，而没有确定它的正负性。

[关键词] Schrödinger 方程；正解；负解；Palais-Smale 条件

[中图分类号] O 175.5

Three Solutions of a Schrödinger Equation with Constraint

LIU Jingkun[1], FAN Qi[2]

(1. Chengyi University College, Jimei University, Xiamen 361021, China;
2. Xiamen Sinic-Tek Intelligent Technology Co., Ltd, Xiamen 361100, China)

Abstract: In this paper, the existence of three solutions of a semilinear Schrödinger equation with constraint was considered. One was a positive solution, the other was a negative solution. For the third solution, its existence was proved, but not its positivity or negativity was fixed.

Keywords: Schrödinger equation; positive solution; negative solution; Palais-Smale condition

0　引言

作为原子物理学中处理非相对论问题的有力工具，Schrödinger 方程反映了微观粒子的状态随时间变化的规律。很多学者对 Schrödinger 方程进行了广泛而深入的研究，特别是近几十年来，它一直是数学界的研究热点。

本文考虑如下带限制的 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda f(x,u), x \in \mathbf{R}^N, u \in H^1(\mathbf{R}^N), \\ \int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2)\mathrm{d}x = r^2, \\ u(x) \to 0, |x| \to +\infty 。\end{cases} \tag{1}$$

解的存在性。若非零函数 $u(x)$ 代入方程（1），可使方程（1）恒成立，且对任意 $x \in \mathbf{R}^N, u(x) \geqslant 0$，则称 (u,λ) 为方程（1）的一个正解；若非零函数 $u(x)$ 代入方程（1），可使方程（1）恒成立，且对任意 $x \in \mathbf{R}^N, u(x) \leqslant 0$，则称 (u,λ) 为方程（1）的一个负解。

之前，有很多文献研究过相关的问题。例如 Kryszewski 等[1]证明了

$$-\Delta u + a(x)u = f(x,u), x \in \mathbf{R}^N, u \in H^1(\mathbf{R}^N)。\tag{2}$$

[收稿日期] 2018－09－25
[基金项目] 福建省教育厅科技项目（JAT170917）；集美大学诚毅学院青年科研基金项目（C16005）
[作者简介] 刘竞坤（1982—），女，讲师，硕士，从事非线性泛函分析研究。

在 $a(x)$ 与 $f(x,u)$ 关于 $x_j(j=1,2,\cdots,N)$ 满足周期性的情况下得到方程（2）的一个非平凡解；若 f 关于 u 是奇的，进一步得到方程（2）的无穷多个解。而后刘竞坤[2]证明半线性椭圆方程

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f(x,u), x \in \mathbf{R}^N, u \in H^1(\mathbf{R}^N), \\ u(x) \to 0, |x| \to +\infty, \end{cases} \tag{3}$$

至少存在一个正解与一个负解。进而文献［3－5］分别在不同条件下研究方程（1）解的存在情况。相对于文献［3－4］，本文弱化了 $a(x)$ 所满足的条件，强化了 $f(x,u)$ 所满足的条件，进而研究问题（1）解的存在性。不同于文献［5］，本文对 $a(x)$ 与 $f(x,u)$ 的周期性不做要求。

假设方程（1）中 $a(x)$ 与 $f(x,u)$ 满足条件：1）$a(x) \in C(\mathbf{R}^N,\mathbf{R})$，且 $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}^N} a(x) > 0$；2）$f \in C^1(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R},\mathbf{R})$，且当 $u\to 0$ 时，$f(x,u)=o(|u|)$ 关于 $x\in\mathbf{R}^N$ 一致成立；3）存在常数 $C>0, p\in(2,2^*)$，使得 $|f(x,u)| \leqslant C(1+|u|^{p-1}), x\in\mathbf{R}^N, u\in\mathbf{R}$，其中，当 $N\geqslant 3$ 时，$2^*=2N/(N-2)$，当 $N=1$，2 时，$2^*=\infty$；4）存在常数 $\eta>2$，使得 $0\leqslant \eta F(x,u)\leqslant uf(x,u), x\in\mathbf{R}^N, u\in\mathbf{R}$，其中 $F(x,u)=\int_0^u f(x,t)\mathrm{d}t$；5）存在 $\mathbf{R}^N$ 的开子集 Ω，使得当 $|u|$ 足够大时，有 $uf(x,u)>0, x\in\Omega$；6）对任意 $\rho>0$，有 $\lim\limits_{|x|\to\infty}\sup\limits_{|u|\leqslant\rho}(|f(x,u)|/|u|)=0$。

本文的主要结果是定理 1。

定理 1　假设 $a(x)$ 与 $f(x,u)$ 满足条件 1）—条件 6），则方程（1）至少有 3 个解。其中一个为正解，一个为负解。

1　解的存在性

首先确定一些标记。对 $s\geqslant 1$，记 $|\cdot|_s$ 为空间 $L^s(\mathbf{R}^N)$ 的范数。定义 Hilbert 空间

$$E:=\{u\in H^1(\mathbf{R}^N): \int_{\mathbf{R}^N} a(x)u^2\mathrm{d}x < +\infty\}, \tag{4}$$

其内积为：

$$(u,v):=\int_{\mathbf{R}^N}(\nabla u\cdot\nabla v + a(x)uv)\mathrm{d}x, u,v\in E, \tag{5}$$

导出的范数为：

$$\|u\| = [\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2 + a(x)u^2)\mathrm{d}x]^{1/2}, u\in E。 \tag{6}$$

由条件 1）可得连续嵌入 $E\to H^1(\mathbf{R}^N)$，因而

$$E\to L^s(\mathbf{R}^N), 2\leqslant s\leqslant 2^*。 \tag{7}$$

设

$$D_r:=\{u\in E: \int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2 + a(x)u^2)\mathrm{d}x = r^2\}, \tag{8}$$

$$F(x,u):=\int_0^u f(x,t)\mathrm{d}t,\ u\in\mathbf{R}, \tag{9}$$

$$J(u):=\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u)\mathrm{d}x,\ u\in E, \tag{10}$$

$$I:=J|D_r, \tag{11}$$

则

$$(J'(u),v):=-\int_{\mathbf{R}^N}f(x,u)v\mathrm{d}x,\ u,v\in E。 \tag{12}$$

由 Zeidler[6] 可知：

$$I'(u) = J'(u) - u(J'(u),u)/\|u\|^2,\ u\in D_r。 \tag{13}$$

由文献［3］可知：I 的临界点与问题（1）的解一一对应，其中 $\lambda = -r^2/(J'(u),u)$。由条件 2）—条件 3）得，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $K(\varepsilon)>0$，使得

$$|f(x,u)| \leqslant \varepsilon|u| + K(\varepsilon)|u|^{p-1},\ x \in \mathbf{R}^N, u \in \mathbf{R}。 \tag{14}$$

定义 1 设 E 为实 Banach 空间，$I \in C^1(E,\mathbf{R})$，称 I 满足 Palais-Smale 条件是指：对任意 $\{u_n\} \subset E, I(u_n)$ 有界，且 $I'(u_n) \to 0$，则 $\{u_n\}$ 有一收敛子列，简称 I 满足（P S）条件。对 $c \in \mathbf{R}$，称 I 满足 $(\mathrm{P\ S})_c$ 条件是指：对任意 $\{u_n\} \subset E$，$I(u_n) \to c$，且 $I'(u_n) \to 0$，则 $\{u_n\}$ 有一收敛子列。若对任意 $c>0$，I 满足 $(\mathrm{P\ S})_c$ 条件，则称 I 满足 $(\mathrm{P\ S})^+$ 条件；若对任意 $c<0$，I 满足 $(\mathrm{P\ S})_c$，则称 I 满足 $(\mathrm{P\ S})^-$ 条件。

I 满足（P S）条件等价于对任意 $c \in \mathbf{R}$，I 满足 $(\mathrm{P\ S})_c$ 条件。

命题 1 $\Phi(u) = \int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2 + a(x)u^2)\mathrm{d}x/2 - \int_{\mathbf{R}^N}F(x,u)\mathrm{d}x, u \in E$，满足 Palais-Smale 条件。

证明 假设 $\{u_n\} \subset E, \Phi(u_n) \to c$，且 $\Phi'(u_n) \to 0$，则对 $\eta>2$，由条件 4）得：$\eta c + o(1)(1+\|u_n\|) \geqslant \eta\Phi(u_n) - (\Phi'(u_n),u_n) \geqslant (\eta-2)\|u_n\|^2/2$。因而 $\{u_n\}$ 在 E 上有界，则存在子列，仍记为 $\{u_n\}$ 满足 $u_n \rightharpoonup u \in E$。由 $(\Phi'(u_n),u_n-u) \to 0$，可得：

$$0 \leqslant \limsup_{n\to\infty}(\|u_n\|^2 - \|u\|^2) = \limsup_{n\to\infty}(u_n,u_n-u) = \limsup_{n\to\infty}\int_{R^N}f(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x。 \tag{15}$$

对任意 $\varepsilon>0$，$\rho>1$，有：

1）当 $N \geqslant 3$ 时，有 $\int_{|u_n|\geqslant\rho}f(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x \leqslant 2C\int_{|u_n|\geqslant\rho}|u_n|^{p-1}|u_n-u|\mathrm{d}x \leqslant 2C\rho^{p-2^*}\int_{|u_n|\geqslant\rho}|u_n|^{2^*-1}|u_n-u|\mathrm{d}x \leqslant 2C\rho^{p-2^*}|u_n|_{2^*}^{2^*-1}|u_n-u|_{2^*}$。由 $p<2^*$，当 ρ 足够大时，对所有 $n \in \mathbf{N}$，有：

$$\int_{|u_n|\geqslant\rho}f(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon/3。 \tag{16}$$

2）当 $N=1,2$ 时，有 $\int_{|u_n|\geqslant\rho}f(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x \leqslant 2C\int_{|u_n|\geqslant\rho}|u_n|^{p-1}|u_n-u|\mathrm{d}x \leqslant 2C/\rho\int_{|u_n|\geqslant\rho}|u_n|^p|u_n-u|\mathrm{d}x \leqslant 2C/\rho|u_n|_\infty^p|u_n-u|_\infty$。由 $p \in (2,+\infty)$，当 ρ 足够大时，对所有 $n \in \mathbf{N}$，式（16）成立。

由条件 6）得，存在 $R>0$，使得对任意 $n \in \mathbf{N}$，有：

$$\int_{|x|\geqslant R,\ |u_n|\leqslant\rho}f(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x \leqslant |u_n|_2|u_n-u|_2 \sup_{|t|\leqslant\rho,\ |x|\geqslant R}(|f(x,t)|/|t|) \leqslant \varepsilon/3。 \tag{17}$$

当 $s \in [2,2^*)$ 时，在 $L^s(B_R(0))$ 上有 $u_n \to u$，其中 $B_R(0)$ 表示 E 上到 0 的距离为 R 的点集。由式（14）得，当 $n \in \mathbf{N}$ 足够大时，有：

$$\int_{|x|\leqslant R,\ |u_n|\leqslant\rho}f(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon/3。 \tag{18}$$

综合式（16）~式（18）得，当 $n \in \mathbf{N}$ 足够大时，有：

$$\int_{\mathbf{R}^N}f(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon。 \tag{19}$$

由式（15）与式（19）可得 $\|u_n\| \to \|u\|$，因而 Φ 满足 Palais-Smale 条件。

命题 2 I 满足 $(\mathrm{P\ S})^-$ 条件。

证明 对任意 $c<0, \{u_n\} \subset D_r$，满足 $I(u_n) \to c$，且 $I'(u_n) \to 0$。由 $J(u_n) = c + o(1) < 0$ 得，$u_n \neq 0$。因而 $(J'(u_n),u_n) \neq 0$，所以 $u_n = r^2(J'(u_n),u_n)^{-1}[J'(u_n) - I'(u_n)]$。由命题 1 得 J' 为紧算子。又由 $\{u_n\}$ 有界得，$\{u_n\}$ 有弱收敛子列，不妨设 $u_n \rightharpoonup u$，则 $J'(u_n) \to J'(u)$，可得 $(J'(u),u) \neq$

0，因而 $u_n \to r^2(J'(u),u)^{-1}[J'(u)-I'(u)] = r^2(J'(u),u)^{-1}J'(u)$，因而 $\{u_n\}$ 有收敛子列，从而可得 I 满足 $(PS)^-$ 条件。

由命题 2 与文献［7］可得，I 有一个临界值 $c = \inf_{u\in D_r} J(u) = \inf_{u\in D_r} I(u)$，因而 $u\in D_r$ 为问题（1）的非平凡解。

构造函数

$$\bar f(x,u):=\begin{cases} f(x,u), & u\geqslant 0,\\ 0, & u<0。\end{cases} \tag{20}$$

考虑椭圆方程

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda \bar f(x,u)x\in \mathbf{R}^N,\ u\in E,\\ \int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2 + a(x)u^2)\mathrm{d}x = r^2,\\ u(x)\to 0,\ |x|\to+\infty。\end{cases} \tag{21}$$

$$\bar F(x,u):=\int_0^u \bar f(x,t)\mathrm{d}t,\ u\in \mathbf{R}, \tag{22}$$

$$\bar J(u):=-\int_{\mathbf{R}^N}\bar F(x,u)\mathrm{d}x,\ u\in E, \tag{23}$$

$$\bar I:=\bar J|D_r, \tag{24}$$

则

$$\bar I'(u) = \bar J'(u) - (\bar J'(u),u)u/r^2,\ u\in E。 \tag{25}$$

其中，$\bar I(u)$ 的临界点与问题（21）的解一一对应，$\lambda = -r^2/(\bar J'(u),u)$。$c_1 = \inf_{u\in D_r}\bar J(u) = \inf_{u\in D_r}\bar I(u)$ 为 $\bar I$ 的临界值，问题（21）至少有一个非平凡解 u_1。设 $\mathscr{A}:=\{x\in\mathbf{R}^N: u_1(x)<0\}$，由条件 4）与条件 5）得，$(\bar J'(u_1),u_1) = -\int_{\mathbf{R}^N}\bar f(x,u_1(x))u_1(x)\mathrm{d}x<0$，因而 $\lambda = -r^2/(\bar J'(u_1),u_1)>0$。由式（20）得，$-\Delta u_1 + a(x)u_1 = 0, x\in\mathscr{A}$，且当 $|x|\to+\infty$ 时，$u_1(x)\to 0$。由极值原理[8]得，$u_1(x)\geqslant 0, x\in\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{A}$ 的定义矛盾，所以 $\mathscr{A}=\varnothing$。从而可得，$u_1(x)\geqslant 0, x\in\mathbf{R}^N$。由 $u_1(x)$ 为式（21）的解，得：$-\Delta u_1 + a(x)u_1 = \lambda\bar f(x,u_1)^+ - \lambda\bar f(x,u_1)^- = [\lambda\bar f(x,u_1)^+/(-u_1)](-u_1) - [\lambda\bar f(x,u_1)^-/(-u_1)](-u_1)$，其中，$f^+:=\max\{f,0\}$，$f^-:=\min\{f,0\}$，因而 $\Delta(-u_1)+[-a(x)-\lambda\bar f(x,u_1)^-/u_1](-u_1) = [\lambda\bar f(x,u_1)^+/(-u_1)](-u_1)\geqslant 0$。

由强极值原理[8]得，$u_1(x)\neq 0, x\in\mathbf{R}^N$。因而 u_1 为方程（1）的正解。同理可得方程（1）的一个负解 u_2。

问题（1）的正解 u_1 与负解 u_2 均为 I 在 E 中的局部极小值点，假设 I 的临界点都是孤立的。接下来，引入山路引理。

引理 1[9]　设 E 为 Hilbert 空间，$I\in \mathbf{C}^2(E,\mathbf{R}), e\in E, l>0$，使得 $\|e\|>l$，且 $b = \inf_{\|u\|=l} I(u) > I(0)\geqslant I(e)$。若 I 满足 $(PS)_c$ 条件，其中 $c = \inf_{g\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(g(t))$，$\Gamma = \{g\in C([0,1],E): g(0)=0, g(1)=e\}$，则 c 为 I 的临界点。

由命题 2 得，I 满足 $(PS)^-$ 条件；由条件 2）得：$I\in C^2(D_r,\mathbf{R})$。存在 $u_1>0$，$u_2<0$ 为 I 在 E 的局部极小值点。

不妨设 $I(u_1)=c_1, I(u_1)\geqslant I(u_2)$，由 u_1 为 I 在 E 上的局部极小值可得：1）存在 $\beta>0$，$\alpha>0$，使得 $I|_{\partial B_\beta(u_1)}\geqslant c_1+\alpha$；2）$u_2\in D_r\setminus B_\beta(u_1)$，$I(u_2)\leqslant c_1$，其中：$B_\beta(u_1)$ 表示 D_r 上到 u_1 的距离为 β 的点集；$\partial B_\beta(u_1)$ 表示 $B_\beta(u_1)$ 在 D_r 上的边界。

令：$\Gamma_0 = \{g\in C([0,1],D_r): g(0)=u_1, g(1)=u_2\}$，$c_0 = \inf_{g\in\Gamma_0}\max_{t\in[0,1]} I(g(t))$，对任意 $g\in C([0,$

$1], D_r)$，有 $g[0,1]$ 为 D_r 上的紧集，因而存在 $n \in \mathbf{N}$，对 $k = 1,2,\cdots,n$，存在 $u_k \in D_r, \delta_k > 0$，使得 $I(u_k) = c_k < 0$，$g[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_{\delta_k}(u_k)$，因而任意 $u \in g([0,1])$，存在 $k = 1,2,\cdots,n$，使得 $u \in B_{\delta_k}(u_k)$，又因为对任意 $u \in B_{\delta_k}(u_k)$，有 $I(u) < c_k/2$，因而 $\max_{t \in [0,1]} I(g(t)) < 0$，则 $c_0 = \inf_{g \in \Gamma_0} \max_{t \in [0,1]} I(g(t)) < 0$，从而可得，$I$ 满足 $(\mathrm{P\,S})_{c_0}$ 条件。

又由 u_1、u_2 为 I 的局部极小值点及 1）和 2）得，I 满足以 u_1、u_2 为基点的山路引理的几何假设，由山路引理得：I 有第 3 个临界点 u_3，使得 $I(u_3) = c_0$，即得方程（1）的第 3 个解，从而可得定理 1 成立。

［参考文献］

［1］KRYSZEWSKI W，SZULKIN A. Generalized linking theorem with an application to semilinear Schrödinger equation［J］. Advances in Differential Equations，1998，3(3)：441-472.

［2］刘竞坤. $H^1(\mathbf{R}^N)$ 上一类半线性椭圆问题的正解与负解［J］. 集美大学学报（自然科学版），2016，21(3)：228-233.

［3］LIU J K，CHEN J Q. Sign changing solutions and multiple solutions of an elliptic eigenvalue problem with constraint in $H^1(\mathbf{R}^N)$［J］. Computers and Mathematics with Applications，2010，59(8)：3005-3013. DOI：10.1016/j.camwa.2010.02.019.

［4］刘竞坤. $H^1(\mathbf{R}^N)$ 上带限制的椭圆特征问题的三个解［J］. 数学研究，2013，46(2)：160-166.

［5］刘竞坤，范琦. $H^1(\mathbf{R}^N)$ 上一类带限制的 Schrödinger 方程的正负解［J］. 集美大学学报（自然科学版），2017，22(2)：75-80.

［6］ZEIDLER E. Nonlinear functional analysis and its applications（III）［M］. New York：Springer-Verlag，1985.

［7］RABINOWITZ P H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations［M］. Providence：Amer Math Soc，1985.

［8］GILBARG D，TRUDINGER N S. Elliptic partial differential equations of second order［M］. New York：Springer-Verlag，1977.

［9］WILLEM M. Minimax theorems［M］. Berlin：Birkhäuser Boston Basel，1996.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）