第24卷　第5期　　集美大学学报（自然科学版）　　Vol. 24　No. 5
2019年9月　　Journal of Jimei University (Natural Science)　　Sep. 2019

［文章编号］1007 - 7405(2019)05 - 0378 - 04　　DOI:10.19715/j.jmuzr.2019.05.09

模糊 n-cell 数近似大于等于关系的性质

刘晓芬，黄　欢

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

［摘要］研究了模糊 n-cell 数近似大于等于关系、近似大于关系在水平收敛下的变化，与通常实数序列性质类似，近似大于等于关系在水平收敛下能保持不变，近似大于关系在水平收敛下无法保持。但是与通常实数列极限具有保号性不一样的是，水平收敛的模糊 n-cell 数序列关于近似大于关系的保号性不成立。

［关键词］模糊 n-cell 数；近似大于等于；近似大于；水平收敛

［中图分类号］O 159

Some Properties of Approximate Equal or Greater than Relation on Fuzzy n-cell Numbers

LIU Xiaofen, HUANG Huan

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, the transformation of approximate equal or greater than relation and approximate greater than relation on fuzzy n-cell number space under the level convergence was investigated. Similar to the case of real numbers, on fuzzy n-cell numbers, the approximate equal or greater than relation is maintained and the approximate greater than relation may not be maintained under the level convergence. Different from the case of real numbers, sign-preserving theorem of the sequence of fuzzy n-cell numbers may not hold under the level convergence.

Keywords: fuzzy n-cell numbers; approximate equal or greater than; approximate greater than; level convergence

0　引言

模糊 n-cell 数是一种特殊的 n 维模糊数，王桂祥等[1]首先提出并研究了它的基本性质，并将它用于分类、模式识别、信息融合等领域中，取得了较好的效果[1-2]，并受到了广泛的关注。Kaleva[3]提出了一维模糊数序列水平收敛的概念，随后人们讨论了 n 维模糊数序列水平收敛的分析和拓扑性质[4-5]，文献［6］研究了模糊 n-cell 数上的近似大于等于偏序，讨论了这一偏序在加、减、乘、除、数乘运算下的变化。本文探讨了模糊 n-cell 数空间上的近似大于等于关系、近似大于关系在水平收敛下的变化，为进一步研究模糊 n-cell 数的相关理论提供理论基础。

1　预备知识

本节介绍了 n 维模糊数和模糊 n-cell 数的基本概念和表现定理，以及模糊 n-cell 数上的近似大于

［收稿日期］2018 - 07 - 03
［基金项目］福建省自然科学基金项目（2016J01022）
［作者简介］刘晓芬（1992—），女，硕士生，从事模糊数学研究。通信作者：黄欢（1976—），女，教授，硕导，从事模糊数学与模糊系统研究。E-mail:hhuangjy@126.com

等于、近似大于关系，详细内容参阅文献［1，4，6 -9］。

设 u 是 $\mathbf{R}^n$ 上的模糊集，u 可看作 $\mathbf{R}^n \to [0,1]$ 的函数。任取 $\alpha \in [0,1]$，称 $[u]_\alpha$ 是 u 的 α - 截集，其中当 $\alpha > 0$ 时，$[u]_\alpha = \{x \in \mathbf{R}^n : u(x) \geqslant \alpha\}$，当 $\alpha = 0$ 时，$[u]_0 = \overline{\{x \in \mathbf{R}^n : u(x) > 0\}}$，$[u]_0$ 也称为 u 的支集，记作 supp u。

若 $u:\mathbf{R}^n \to [0,1]$ 满足以下性质：1）u 是正规的模糊集，即存在 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 使得 $u(x_0) = 1$；2）u 是凸模糊集，即对任意 $x, y \in \mathbf{R}^n$，$\lambda \in [0,1]$，有 $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \min\{u(x), u(y)\}$；3）$u$ 是上半连续函数，即对任意的 $x_0 \in \mathbf{R}^n$，$\lim\sup_{x \to x_0} u(x) \leqslant u(x_0)$；4）$[u]_0$ 有界，则称 u 为 n 维模糊数。全体 n 维模糊数记作 E^n。

用 a 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的点 $(a, a, \cdots, a)$，用 $\hat{a}$ 表示模糊集 $\hat{a}:\mathbf{R}^n \to [0,1]$，$\hat{a}(x) = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ 1, & x = a \end{cases}$。在不引起混淆的情况下，也用 a 表示 $\hat{a}$，此时对任意的 $\alpha \in [0,1]$，$[a]_\alpha = \{a\}$。

文献［1］引入了模糊 n-cell 数的概念：设 $u \in E^n$，若 $[u]_\alpha = \prod_{i=1}^{n} [u_i^-(\alpha), u_i^+(\alpha)]$，其中 $\alpha \in [0,1]$，$u_i^-(\alpha)$，$u_i^+(\alpha) \in \mathbf{R}$，$u_i^-(\alpha) \leqslant u_i^+(\alpha)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则称 u 是模糊 n-cell 数。记 $L(E^n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上全体模糊 n-cell 数，显然 $L(E^n) \nsubseteq E^n$。

定理 1[1]（表现定理）　设 $u \in L(E^n)$，则 $u_i^-(\alpha)$，$u_i^+(\alpha)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 均为 $[0,1]$ 上的函数，且满足：1）$u_i^-(\alpha)$ 单调非降左连续；2）$u_i^+(\alpha)$ 单调非增左连续；3）对任给 $\alpha \in (0,1]$，$u_i^+(\alpha) \geqslant u_i^-(\alpha)$；4）$u_i^-(\alpha)$，$u_i^+(\alpha)$ 在 $\alpha = 0$ 处右连续。

反之，对任何满足上述条件 1）—4）的 $[0,1]$ 上的函数 $u_i^-(\alpha)$，$u_i^+(\alpha)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，存在唯一的 $u \in L(E^n)$，使得对任给 $\alpha \in [0,1]$，有 $[u]_\alpha = \prod_{i=1}^{n} [u_i^-(\alpha), u_i^+(\alpha)]$。

定义 1[6]　设 $u, v \in L(E^n)$，$\alpha \in (0,1]$，若 $u_i^+(\alpha) \geqslant v_i^-(\alpha)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则称 u 在 α 水平下近似大于等于 v，记作 $u \geqslant_\alpha v$ 或 $v \leqslant_\alpha u$。

定义 2　设 $u, v \in L(E^n)$，$\alpha \in (0,1]$，若 $u \geqslant_\alpha v$，且存在 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$，使得 $u_i^+(\alpha) > v_i^-(\alpha)$，则称 u 在 α 水平下近似大于 v，记作 $u >_\alpha v$ 或 $v <_\alpha u$。

显然，$u >_\alpha v$ 必定有 $u \geqslant_\alpha v$。

2　近似大于等于关系和近似大于关系的性质

本节通过论证和具体的例子说明了模糊 n-cell 数近似大于等于关系在水平收敛下保持不变，而近似大于关系在水平收敛下无法保持。与通常实数列极限具有的保号性不一样的是，模糊 n-cell 数在水平收敛下关于近似大于关系的保号性不成立。

文献［1］引入了 $\mathrm{LC}(\mathbf{R}^n) = \{\prod_{i=1}^{n} [a_i^-, a_i^+] : a_i^- \leqslant a_i^+, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 上的度量 $d_L:\mathrm{LC}(\mathbf{R}^n) \times \mathrm{LC}(\mathbf{R}^n) \to [0, \infty)$，对任给的 $(A, B) \in \mathrm{LC}(\mathbf{R}^n) \times \mathrm{LC}(\mathbf{R}^n)$，$d_L(A, B) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{|a_i^- - b_i^-| \vee |a_i^+ - b_i^+|\}$。

设 $\{u_k\} \subset L(E^n)$ 是一数列，$u \in L(E^n)$，若对任意的 $\alpha \in (0,1]$，有：$\lim_{k \to \infty} d_L([u_k]_\alpha, [u]_\alpha) = 0$，则称 $\{u_k\}$ 水平收敛于 u。

关于模糊数上水平收敛的性质和拓扑结构，可参阅文献［3 -5］。

容易看出，$\lim_{k \to \infty} d_L([u_k]_\alpha, [u]_\alpha) = 0$ 等价于 $\lim_{k \to \infty} u_{ki}^-(\alpha) = u_i^-(\alpha)$，$\lim_{k \to \infty} u_{ki}^+(\alpha) = u_i^+(\alpha)$，$i = 1, 2, \cdots, n$。下面的定理 2 表明，模糊 n-cell 数上的近似大于等于关系在水平收敛下保持不变。

定理 2 设 $\{u_k\},\{v_k\}\subset L(E^n),\alpha\in(0,1]$。若 $\{u_k\}$ 水平收敛于 u，$\{v_k\}$ 水平收敛于 v，且存在正整数 $\mathbf{N}$，当 $k>\mathbf{N}$ 时，不等式 $v_k\geqslant_\alpha u_k$ 都成立，则 $v\geqslant_\alpha u$。

证明 因为 $\{v_k\}$ 水平收敛于 v，$\{u_k\}$ 水平收敛于 u，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}v_{ik}^+(\alpha)=v_i^+(\alpha)$，$\lim\limits_{k\to\infty}u_{ki}^-(\alpha)=u_i^-(\alpha),i=1,2,\cdots,n$。由于存在正整数 N，当 $k>N$ 时，有 $v_k\geqslant_\alpha u_k$，即 $v_{ki}^+(\alpha)\geqslant u_{ki}^-(\alpha),i=1,2,\cdots,n$。因此，$v_i^+(\alpha)=\lim\limits_{k\to\infty}v_{ki}^+(\alpha)\geqslant\lim\limits_{k\to\infty}u_{ki}^-(\alpha)=u_i^-(\alpha),i=1,2,\cdots,n$，所以 $v\geqslant_\alpha u$ 成立。定理 2 证毕。

模糊 n-cell 数上的近似大于关系在水平收敛下无法保持。设 $\{u_k\},\{v_k\}\subset L(E^n),\alpha\in(0,1]$，$\{u_k\}$ 水平收敛于 u，$\{v_k\}$ 水平收敛于 v。即使对任意的 $k\in\mathbf{N}$，有 $v_k>_\alpha u_k$ 成立，仍然保证不了 $v>_\alpha u$。下面通过例 1 来进行说明。

例 1 任给的 $\alpha\in[0,1]$，$k\in\mathbf{N}$，设 $\begin{cases}u_{ki}^-(\alpha)=(\alpha/2+1)/(2k)\\u_{ki}^+(\alpha)=(1-\alpha/4)/k\end{cases},i=1,2,\cdots,n$。容易看出，对每一 $i=1,2,\cdots,n,u_{ki}^-(\alpha)$ 是单调非降的连续函数，$u_{ki}^+(\alpha)$ 是单调非增的连续函数，且 $u_{ki}^+(\alpha)=(1-\alpha/4)/k\geqslant(\alpha/2+1)/(2k)=u_{ki}^-(\alpha)$。所以，$u_{ki}^-(\alpha),u_{ki}^+(\alpha)$ 满足表现定理 1 的条件 1)~4)，故存在唯一的模糊 n-cell 数 u_k，使得 $[u_k]_\alpha=\prod\limits_{i=1}^n[u_{ki}^-(\alpha),u_{ki}^+(\alpha)]=\prod\limits_{i=1}^n[(\alpha/2+1)/(2k),(1-\alpha/4)/k]$。因为 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{ki}^-(\alpha)=\lim\limits_{k\to\infty}(\alpha/2+1)/(2k)=0$，$\lim\limits_{k\to\infty}u_{ki}^+(\alpha)=\lim\limits_{k\to\infty}(1-\alpha/4)/k=0$，所以 $\{u_k\}$ 水平收敛于 0，其中 $[0]_\alpha=[0,0]\times[0,0]\times\cdots\times[0,0]=\{0\}$。

设 $\begin{cases}v_{ki}^-(\alpha)=0\\v_{ki}^+(\alpha)=(2-\alpha/4)/k\end{cases},i=1,2,\cdots,n$。容易看出，对每一 $i=1,2,\cdots,n,v_{ki}^-(\alpha)$ 是单调非降的连续函数，$v_{ki}^+(\alpha)$ 是单调非增的连续函数，且 $v_{ki}^+(\alpha)=(2-\alpha/4)/k\geqslant0=v_{ki}^-(\alpha)$，所以 $v_{ki}^-(\alpha),v_{ki}^+(\alpha)$ 满足表现定理 1 的条件 1)~4)，故存在唯一的模糊 n-cell 数 v_k，使得 $[v_k]_\alpha=\prod\limits_{i=1}^n[v_{ki}^-(\alpha),v_{ki}^+(\alpha)]=\prod\limits_{i=1}^n[0,(2-\alpha/4)/k]$。因为 $\lim\limits_{k\to\infty}v_{ki}^-(\alpha)=\lim\limits_{k\to\infty}0=0$，$\lim\limits_{k\to\infty}v_{ki}^+(\alpha)=\lim\limits_{k\to\infty}(2-\alpha/4)/k=0$，所以 $\{v_k\}$ 水平收敛于 0，其中 $[0]_\alpha=[0,0]\times[0,0]\times\cdots\times[0,0]=\{0\}$。

因为 $v_{ki}^+(\alpha)-u_{ki}^-(\alpha)=(2-\alpha/4)/k-(\alpha/2+1)/(2k)=(3-\alpha)/(2k)>0,i=1,2,\cdots,n$，即 $v_{ki}^+(\alpha)>u_{ki}^-(\alpha),i=1,2,\cdots,n$。所以由定义 2 知，$v_k>_\alpha u_k$，而显然 $0>_\alpha0$ 是不成立的，即 $\lim\limits_{k\to\infty}v_k>_\alpha\lim\limits_{k\to\infty}u_k$ 不成立。

与通常实数列极限具有保号性不一样的是，水平收敛的模糊 n-cell 数序列关于近似大于关系的保号性不成立。设 $\{u_k\},\{v_k\}\subset L(E^n),\alpha\in(0,1]$，$\{u_k\}$ 水平收敛于 u，$\{v_k\}$ 水平收敛于 v。即使 $v>_\alpha u$，但是仍有可能对任意的 $k\in\mathbf{N}$，$v_k>_\alpha u_k$ 不成立。下面通过例 2 来进行说明。

例 2 任给的 $\alpha\in[0,1],k\in\mathbf{N}$，设 $\begin{cases}u_{k1}^-(\alpha)=\alpha/(2k)\\u_{k1}^+(\alpha)=3-\alpha/k\end{cases}$，$\begin{cases}u_{ki}^-(\alpha)=(4+\alpha)/k\\u_{ki}^+(\alpha)=(7-\alpha)/k\end{cases},i=2,3,\cdots,n$。容易看出，对每一 $i=1,2,\cdots,n,u_i^-(\alpha)$ 是单调非降的连续函数，$u_i^+(\alpha)$ 是单调非增的连续函数，且 $u_{k1}^+(\alpha)=3-\alpha/k>\alpha/(2k)=u_{k1}^-(\alpha)$，$u_{ki}^+(\alpha)=(7-\alpha)/k>(4+\alpha)/k=u_{ki}^-(\alpha),i=2,3,\cdots,n$。所以 $u_{ki}^-(\alpha),u_{ki}^+(\alpha)$ 满足表现定理 1 的条件 1)~4)，故存在唯一的模糊 n-cell 数 u_k，使得 $[u_k]_\alpha=[\alpha/(2k),3-\alpha/k]\times[(4+\alpha)/k,(7-\alpha)/k]\times\cdots\times[(4+\alpha)/k,(7-\alpha)/k]$。设 $\begin{cases}u_1^-(\alpha)=0\\u_1^+(\alpha)=3\end{cases}$，$\begin{cases}u_i^-(\alpha)=0\\u_i^+(\alpha)=0\end{cases},i=2,3,\cdots,n$。容易看出，对每一 $i=1,2,\cdots,n,u_i^-(\alpha)$ 是单调非降的连续函数，$u_i^+(\alpha)$ 是单调非增的连续函数，且 $u_1^+(\alpha)=3>0=u_1^-(\alpha)$，$u_i^+(\alpha)=0=u_i^-(\alpha),i=2,3,\cdots,n$，所以

$u_i^-(\alpha)$，$u_i^+(\alpha)$ 满足表现定理 1 的条件 1）~4）。故存在唯一的模糊 n-cell 数 u，使得 $[u]_\alpha = [0,3] \times [0,0] \times \cdots \times [0,0]$，容易看出 $\{u_k\}$ 水平收敛于 u。

设 $\begin{cases} v_{k1}^-(\alpha) = \alpha/k \\ v_{k1}^+(\alpha) = 4 - \alpha/k \end{cases}$，$\begin{cases} v_{ki}^-(\alpha) = \alpha/k \\ v_{ki}^+(\alpha) = (3-\alpha)/k \end{cases}$，$i = 2,3,\cdots,n$。容易看出，对每一 $i = 1,2,\cdots,n$，$v_{ki}^-(\alpha)$ 是单调非降的连续函数，$v_{ki}^+(\alpha)$ 是单调非增的连续函数，且 $v_{k1}^+(\alpha) = 4 - \alpha/k > \alpha/k = v_{k1}^-(\alpha)$，$v_{ki}^+(\alpha) = (3-\alpha)/k > \alpha/k = v_{ki}^-(\alpha)$，$i = 2,3,\cdots,n$。所以 $v_{ki}^-(\alpha)$，$v_{ki}^+(\alpha)$ 满足表现定理 1 的条件 1）~4），故存在唯一的模糊 n-cell 数 v_k，使得 $[v_k]_\alpha = [\alpha/k, 4-\alpha/k] \times [\alpha/k, (3-\alpha)/k] \times \cdots \times [\alpha/k, (3-\alpha)/k]$。

设 $\begin{cases} v_1^-(\alpha) = 0 \\ v_1^+(\alpha) = 4 \end{cases}$，$\begin{cases} v_i^-(\alpha) = 0 \\ v_i^+(\alpha) = 0 \end{cases}$，$i = 2,3,\cdots,n$。容易看出，对每一 $i = 1,2,\cdots,n$，$v_i^-(\alpha)$ 是单调非降的连续函数，$v_i^+(\alpha)$ 是单调非增的连续函数，且 $v_1^+(\alpha) = 4 > 0 = v_1^-(\alpha)$，$v_i^+(\alpha) = 0 = v_i^-(\alpha)$，$i = 2,3,\cdots,n$。所以 $v_i^-(\alpha)$，$v_i^+(\alpha)$ 满足表现定理 1 的条件 1）~4），故存在唯一的模糊 n-cell 数 v，使得 $[v]_\alpha = [0,4] \times [0,0] \times \cdots \times [0,0]$，容易看出 $\{v_k\}$ 水平收敛于 v。

因为 $v_1^+(\alpha) = 4 > 0 = u_1^-(\alpha)$，$v_i^+(\alpha) = 0 = u_i^-(\alpha)$，$i = 2,3,\cdots,n$。所以由定义 2 知，$v >_\alpha u$。但是，$v_{ki}^+(\alpha) = (3-\alpha)/k < (4+\alpha)/k = u_{ki}^-(\alpha)$，$i = 2,3,\cdots,n$，所以对任意的 $k \in \mathbf{N}$，$v_k >_\alpha u_k$ 这一关系并不成立。

3　结论

本文研究了模糊 n-cell 数空间上近似大于等于关系、近似大于关系在水平收敛下的变化，发现其与实数列的大于等于关系、大于关系在通常收敛下的变化是一样的，但与收敛实数列不一样的是，保号性不再成立。

[参考文献]

[1] WANG G X，WU C X. Fuzzy n-cell numbers and the differential of fuzzy n-cell number value mappings [J]. Fuzzy Sets and Systems，2002，130(3)：367-381. DOI：10.1016/S0165-0114(02)00113-6.

[2] WANG G X，SHI P. Representation of uncertain multichannel digital signal spaces and study of pattern recognition based on metrics and difference values on fuzzy n-cell number spaces [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2009，17(2)：421-439. DOI：10.1109/TFUZZ.2008.2012352.

[3] KALEVA O，SEIKKALA S. On fuzzy metric space [J]. Fuzzy Sets and Systems，1984，12：215-229. DOI：10.1016/0165-0114(84)90069-1.

[4] FANG J X，HUANG H. On the level convergence of a sequence of fuzzy numbers [J]. Fuzzy Sets and Systems，2004，147(3)：417-435. DOI：10.1016/j.fss.2003.08.001.

[5] FANG J X，HUANG H. Some properties of the level convergence topology on fuzzy numbers space E^n [J]. Fuzzy Sets and Systems，2003，140(3)：509-517. DOI：10.1016/S0165-0114(02)00576-6.

[6] 刘晓芬，黄欢. N-cell 模糊数上的近似大于等于关系 [J]. 应用数学进展，2018，7(2)：224-230. DOI：10.12677/aam.2018.72027.

[7] 吴从炘，马明. 模糊分析学基础 [M]. 北京：国防工业出版社，1991.

[8] 陈水利，李敬功，王向公. 模糊集理论及其应用 [M]. 北京：科学出版社，2005.

[9] DIAMOND P，KLOEDEN P. Metric spaces of fuzzy sets：theory and applications [M]. Singapore：World Scientific，1994.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）