

# 解非线性互补问题的非精确正则化算法

丁小妹, 王 平

(武夷学院数学与计算机学院, 福建 武夷山 354300)

[摘要] 构造一个新的光滑逼近函数, 通过该函数将非线性互补问题转化为与之等价的方程组问题。建立解该方程组的非精确正则化算法, 在该算法中光滑参数与正则参数为彼此独立的变量, 且可以通过解线性方程组很快得到。并在较弱的条件下证明了该正则算法的全局收敛性和局部超线性收敛性。

[关键词] 非线性互补问题; 全局收敛; 局部超线性收敛; 非精确正则算法

[中图分类号] O 224.2

## An Inexact Regularization Algorithm for Solving Nonlinear Complementarity Problems

DING Xiaomei, WANG Ping

(Department of Mathematics and Computational Science, Wuyi University, Wuyishan 354300, China)

**Abstract:** A new smoothing approximation function was constructed to transform the nonlinear complementarity problem into an equivalent system of equations. The inexact regularization algorithm for solving this system of equations was established. And in this algorithm, the smooth parameters and regular parameters were independent. Thus, the solution of the original nonlinear complementarity problem was obtained and the global and local convergence of this method were proved under weak conditions.

**Keywords:** nonlinear complementarity problem; global convergence; local superlinear convergence; inexact regularization algorithm

## 0 引言

考虑非线性互补问题  $(NCP(F))^{[1-5]}$ : 求向量  $x \in \mathbf{R}^n$ , 使得  $x \geq 0, F(x) \geq 0, x^T F(x) = 0$  成立。其中, 非线性向量函数  $F(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  连续可微。

互补问题作为计算数学与运筹学的一个交叉研究领域, 其与变分不等式问题、不动点理论等都有紧密的联系, 在力学、工程、经济、交通等许多领域都有广泛的应用, 这就使得该领域成为了数学规划中的一个很热门的研究课题。

由于底层函数的导数可能存在严重的病态性, 并且可能阻止光滑化方法收敛到问题的解, 因此引入正则化技术克服这一缺点, 文献 [6] 首次提出了类似的正则化技术。2010 年, 唐嘉<sup>[2]</sup>提出了解  $P_0$ -函数混合互补问题的一种正则算法, 该算法中的正则参数和光滑参数都是彼此独立的变量, 并且可以通过线性方程组的迭代很快得到, 在不需要严格互补假设的条件下, 该算法的全局收敛性和局

[收稿日期] 2018-09-14

[基金项目] 国家自然科学基金项目(11071041); 福建省自然科学基金项目(2016J01005); 福建省教育厅中青年教师教育科研项目(JA15525, JA15522)

[作者简介] 丁小妹(1984—), 女, 讲师, 硕士, 从事最优化理论与算法方向研究, E-mail: 25225074@qq.com

部超线性收敛性也得到了证明。但是该算法中每一步都要精确求解一个线性方程组,而当方程组的变量较多时,精确求解该方程组的计算量较大。受文献 [7-9] 的启发,本文建立了求解非线性互补问题的非精确正则化算法。

众所周知,通常将  $\text{NCP}(F)$  转化为与之等价的方程组问题,即  $\Phi(x) = 0$ 。其中,  $\Phi(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  是半光滑函数,本文中采用 Fischer-Burmeister (FB) 函数来完成,即  $\varphi_{\text{FB}}(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$ ,

那么,  $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{\text{FB}}(x_1, F_1(x)) \\ \vdots \\ \varphi_{\text{FB}}(x_n, F_n(x)) \end{pmatrix}$ , 则  $\varphi_{\text{FB}}(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, ab = 0$ 。但是 FB 函数在点  $(0, 0)$

处不可微,通过引入光滑参数  $\mu > 0$ , 得到一个光滑 FB 函数:  $\varphi(\mu, a, b) = (e^{2\mu} + \mu)(a + b) - \sqrt{\mu^2 + (a + \mu b)^2 + (b + \mu a)^2}$ , 则  $\varphi(0, a, b) = \varphi_{\text{FB}}(a, b)$ 。

令  $z := (\mu, \varepsilon, x) \in \mathbf{R}_{++} \times \mathbf{R}_{++} \times \mathbf{R}^n$ ,

$$H(z) = (\mu \quad \varepsilon \quad (\Gamma(z))^T)^T, \quad (1)$$

$$\Psi(\mu, x) := (\varphi(\mu, x_1, F_1(x)) \quad \cdots \quad \varphi(\mu, x_n, F_n(x)))^T, \quad (2)$$

$$\Gamma(z) := \Psi(\mu, x) + \varepsilon x. \quad (3)$$

那么非线性互补问题  $\text{NCP}(F)$  等价于以下正则化的方程:  $H(z) = 0$ 。经过简单计算,得

$$H'(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Gamma'_\mu(\mu, \varepsilon, x) & \Gamma'_\varepsilon(\mu, \varepsilon, x) & D_1(\mu, x) + D_2(\mu, x)F'(x) + \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中,  $\Gamma'_\mu(\mu, \varepsilon, x) := \text{vec}\{\varphi'_\mu(\mu, x_i, F_i(x)), i = 1, \cdots, n\}$ ,  $\Gamma'_\varepsilon(\mu, \varepsilon, x) := \text{vec}\{x_i, i = 1, \cdots, n\}$ ,  $D_1(\mu, x) := \text{diag}\{a_1(\mu, x), a_2(\mu, x), \cdots, a_n(\mu, x)\}$ ,  $D_2(\mu, x) := \text{diag}\{b_1(\mu, x), b_2(\mu, x), \cdots, b_n(\mu, x)\}$ ,  $a_i(\mu, x) = (e^{2\mu} + \mu) - ((1 + \mu^2)x_i + 2\mu F_i(x)) / \sqrt{\mu^2 + (x_i + \mu F_i(x))^2 + (F_i(x) + \mu x_i)^2}$ ,  $b_i(\mu, x) = (e^{2\mu} + \mu) - ((1 + \mu^2)F_i(x) + 2\mu x_i) / \sqrt{\mu^2 + (x_i + \mu F_i(x))^2 + (F_i(x) + \mu x_i)^2}$ 。可得,对于任意的  $i = 1, \cdots, n$ , 有  $0 < a_i(\mu, x) \leq e^{2\mu} + 3\mu, 0 < b_i(\mu, x) \leq e^{2\mu} + 3\mu$ 。

**定义 1** 设  $C \subset \mathbf{R}^n$  是一非空集合,  $F: C \rightarrow \mathbf{R}^n$  是一映射,  $F = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T$ , 如对任意点  $x, y \in C, x \neq y$ , 存在下标  $k = k(x, y), 1 \leq k \leq n$ , 使得  $x_k \neq y_k, (x_k - y_k)(f_k(x) - f_k(y)) \geq 0$ , 则称  $F$  为  $C$  中的  $P_0$  函数。

**引理 1** 设函数  $H$  由式 (1) 定义, 函数  $\Gamma$  由式 (3) 定义, 则: i) 对于任意的  $z := (\mu, \varepsilon, x) \in \mathbf{R}_{++} \times \mathbf{R}_{++} \times \mathbf{R}^n$ , 函数  $\Gamma$  连续可微; ii) 对于任意的  $z := (\mu, \varepsilon, x) \in \mathbf{R}_{++} \times \mathbf{R}_{++} \times \mathbf{R}^n$ , 如果函数  $F$  是  $P_0$  函数, 则式 (4) 定义的函数  $H'(z)$  非奇异。

**引理 2** 设  $F$  为连续可微的  $P_0$  函数,  $H$  由式 (1) 定义, 则对于任意的  $\mu > 0, \varepsilon > 0$ , 有  $H$  关于  $x$  强制, 即  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|H(\mu, \varepsilon, x)\| = +\infty$ 。

**证明** 见参考文献 [2] 引理 1.1.3。

## 1 非精确正则化算法

本节构造了一种求解非线性互补问题的非精确正则化算法(算法 1)。定义价值函数:

$$f(z) := \|H(z)\|^2. \quad (5)$$

下面给出算法 1 的具体步骤。

**步骤 1** 选取常数  $\delta \in (0, 1)$ ,  $\eta, \gamma, \sigma, \mu_0, \varepsilon_0, \zeta_0 \in (0, 1/2)$ , 令  $\eta_0 := \min\{\eta, \varepsilon_0\}, \gamma_0 := \min\{\gamma, \mu_0\}$ , 任意初始点  $x^0 \in \mathbf{R}^n$ 。令  $z^0 := (\mu_0, \varepsilon_0, x^0)$ ,  $\bar{\mu} = (\mu_0, 0, 0)$ ,  $\bar{\varepsilon} = (0, \varepsilon_0, 0)$ , 令  $\bar{w}_0 = (0, 0, \Gamma(z^0))$ , 令  $k := 0$ 。

**步骤2** 如果  $f(z^k) = 0$ , 那么算法结束。否则, 求解下面方程组:

$$\mathbf{H}'(z^k)\Delta z^k + \mathbf{H}(z^k) = \gamma_k \bar{\mu} + \eta_k \bar{\varepsilon} + \zeta_k \bar{w}_k, \quad (6)$$

得下降方向  $\Delta z^k = (\Delta \mu^k, \Delta \varepsilon^k, \Delta x^k) \in \mathbf{R}^{n+2}$ , 其中  $\bar{w}_k = (0, 0, \Gamma(z^k))$ 。

**步骤3** 设  $\lambda_k$  为  $1, \delta, \delta^2, \dots$  中满足以下不等式的最大值:

$$f(z^k + \lambda_k \Delta z^k) \leq [1 - 2\sigma(1 - \gamma_k - \eta_k - \zeta_k)\lambda_k]f(z^k). \quad (7)$$

**步骤4** 令  $z^{k+1} := z^k + \lambda_k \Delta z^k$ ,  $\eta_{k+1} := \min\{\eta, \varepsilon_{k+1}\}$ ,  $\gamma_{k+1} := \min\{\gamma, \mu_{k+1}\}$ ,  $\zeta_{k+1}^2 = \min\{\zeta_k^2/4, \|\mathbf{H}(z^{k+1})\|\}$ ,  $\zeta_{k+1} \geq 0$ ,  $k := k+1$ , 转步骤2。

**注1** 算法1中若  $\zeta_k = 0$ , 则算法1退化为文献[1]中的正则化算法。

**定理1** 算法1适定, 且对于任意的  $k > 0$ , 算法1迭代生成的无限序列  $\{z^k = (\mu_k, \varepsilon_k, x^k)\}$  中非负序列  $\{\mu_k\}$  和  $\{\varepsilon_k\}$  严格单调递减。

**证明** 若  $\mu_k > 0, \varepsilon_k > 0$ , 由引理1知矩阵  $\mathbf{H}'(z^k)$  非奇异, 所以算法1步骤3在第  $k$  次迭代中是适定的。

对于任意的  $\alpha \in (0, 1]$ , 定义函数:  $\vartheta(\alpha) := f(z^k + \lambda_k \Delta z^k) - f(z^k) - 2\alpha \mathbf{H}(z^k)^T \mathbf{H}'(z^k) \Delta z^k$ 。

由式(6)可知  $\Delta \mu_k = -\mu_k + \gamma_k \mu_0$ ,  $\Delta \varepsilon_k = -\varepsilon_k + \eta_k \varepsilon_0$ , 那么对于任意的  $\lambda_k \in (0, 1]$ , 有

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \lambda_k \Delta \varepsilon_k = \varepsilon_k + \lambda_k (-\varepsilon_k + \eta_k \varepsilon_0) = (1 - \lambda_k) \varepsilon_k + \lambda_k \eta_k \varepsilon_0 > 0, \quad (8)$$

且

$$\mu_{k+1} = \mu_k + \lambda_k \Delta \mu_k = \mu_k + \lambda_k (-\mu_k + \gamma_k \mu_0) = (1 - \lambda_k) \mu_k + \lambda_k \gamma_k \mu_0 > 0. \quad (9)$$

结合式(5)以及引理1可知函数  $f(\cdot)$  关于  $z^k$  连续可微, 那么  $\|\vartheta(\alpha)\| = o(\alpha)$ 。对于任意的  $\alpha \in (0, 1]$ , 有:

$$\begin{aligned} f(z^k + \lambda_k \Delta z^k) - f(z^k) &= \vartheta(\alpha) + 2\alpha \mathbf{H}(z^k)^T \mathbf{H}'(z^k) \Delta z^k = 2\alpha \mathbf{H}(z^k)^T [-\mathbf{H}(z^k) + \gamma_k \bar{\mu} + \eta_k \bar{\varepsilon} + \zeta_k \bar{w}_k] + \\ & o(\alpha) \leq -2\alpha f(z^k) + 2\alpha \gamma_k f(z^k) + 2\alpha \eta_k f(z^k) + 2\alpha \zeta_k f(z^k) + o(\alpha). \end{aligned}$$

这表明存在常数  $\bar{\alpha} \in (0, 1]$ , 使得  $f(z^k + \alpha \Delta z^k) \leq [1 - 2\sigma(1 - \gamma_k \eta_k - \zeta_k)\alpha]f(z^k)$  对于任意的  $\alpha \in (0, \bar{\alpha}]$  都成立。那么, 算法1步骤3在第  $k$  次迭代是适定的。另外, 由式(8)、式(9)及  $\gamma_k, \eta_k$  的定义知, 对于任意的  $\lambda_k \in (0, 1]$ , 有  $0 < \mu_{k+1} = \mu_k + \lambda_k \Delta \mu_k = \mu_k + \lambda_k (-\mu_k + \gamma_k \mu_0) = (1 - \lambda_k) \mu_k + \lambda_k \gamma_k \mu_0 < (1 - \lambda_k/2) \mu_k < \mu_k$ , 以及  $0 < \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \lambda_k \Delta \varepsilon_k = \varepsilon_k + \lambda_k (-\varepsilon_k + \eta_k \varepsilon_0) = (1 - \lambda_k) \varepsilon_k + \lambda_k \eta_k \varepsilon_0 < (1 - \lambda_k/2) \varepsilon_k < \varepsilon_k$ 。证毕。

## 2 收敛性分析

本节讨论算法1的收敛性。为了建立算法1的全局收敛性, 首先给出下面的假设。

**假设1**  $\text{NCP}(F)$  的解集  $S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x \geq 0, F(x) \geq 0, x^T F(x) = 0\}$  非空有界。

**定理2<sup>[1]</sup>** (Mountain Pass 定理) 假设  $h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  连续可微且满足强制性。  $C \subset \mathbf{R}^n$  是一个非空紧集,  $m$  是函数  $h$  在非空紧集  $C$  的边界上的最小值:  $m := \min_{x \in \partial C} h(x)$ 。如果存在两个点  $a \in C, b \notin C$ , 使得  $h(a) < m, h(b) < m$  成立, 那么, 一定存在一个点  $c \in \mathbf{R}^n$  满足  $\nabla f(c) = 0, f(c) \geq 0$ 。

**定理3** 设函数  $F$  为连续可微的  $P_0$  函数,  $\Gamma$  由式(3)定义。设无穷序列  $\{\mu_k\}, \{\varepsilon_k\}, \{\alpha^k\}$  满足:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k = 0$ , 其中  $k \geq 0, \mu_k > 0, \varepsilon_k > 0, \alpha^k > 0$ 。且对于任意的  $k \geq 0, \{x^k\} \in \mathbf{R}^n$ , 有  $\|\Gamma(\mu_k, \varepsilon_k, x^k)\| \leq \alpha^k$ 。若假设1成立, 那么序列  $\{x^k\}$  有界。

**证明** 见参考文献[2]定理1.2。

**定理4** 设函数  $F$  为连续可微的  $P_0$  函数, 序列  $\{z^k\}$  由算法1迭代生成。若假设1成立, 那么:

i)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{H}(z^k)\| = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ ; ii) 序列  $\{z^k\}$  有界, 则至少存在一个聚点  $z^*$ , 使得  $\mathbf{H}(z^*) = 0$ ; iii) 序列  $\{z^k\}$  的每一个聚点都是  $\text{NCP}(F)$  的解。

**证明** 由算法 1 知  $\zeta_0 \in (0, 1/2)$ , 对于每个  $k > 0$ ,  $\zeta_k = \min\{\zeta_{k-1}/2, \|H(z^k)\|^{1/2}\}$ , 那么, 对于任意的  $k > 0$ , 有  $0 \leq \zeta_k \leq \zeta_0/2^k$ , 所以有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_k = 0$ 。

i) 由式 (7) 以及定理 1 易知序列  $\{f(z^k)\}$  单调递减有下界。另一方面, 由定理 1 可得序列  $\{\mu_k\}$  和  $\{\varepsilon_k\}$  也单调递减有下界。那么, 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $f(z^k) \rightarrow f(z^*)$ ,  $\mu_k \rightarrow \mu_*$ ,  $\gamma_k \rightarrow \gamma_*$ ,  $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_*$ ,  $\eta_k \rightarrow \eta_*$ 。若  $f(z^*) = 0$ , 则结论 i) 成立。反设  $f(z^*) > 0$ 。那么由算法 1 的步骤 3 可得

$$f(z^k + \delta^{k-1} \Delta z^k) > [1 - 2\sigma(1 - \gamma_k - \eta_k - \zeta_k)\delta^{k-1}]f(z^k). \quad (10)$$

令式 (10) 中两边  $k \rightarrow \infty$ , 那么得

$$H(z^*)^T H'(z^*) \Delta z^* \geq -\sigma(1 - \gamma_* - \eta_*)f(z^*). \quad (11)$$

再令式 (6) 两边  $k \rightarrow \infty$ , 那么得  $H'(z^*) \Delta z^* + H(z^*) = \gamma_* \bar{\mu} + \eta_* \bar{\varepsilon}$ , 所以,

$$\begin{aligned} H(z^*)^T H'(z^*) \Delta z^* &= -H(z^*)^T H(z^*) + \gamma_* H(z^*)^T \bar{\mu} + \eta_* H(z^*)^T \bar{\varepsilon} \leq \\ &= -f(z^*) + \gamma_* f(z^*) + \eta_* f(z^*). \end{aligned} \quad (12)$$

由式 (11) 和式 (12) 得  $-\sigma(1 - \gamma_* - \eta_*) \leq -(1 - \gamma_* - \eta_*)$ , 即  $(1 - \sigma)(1 - \gamma_* - \eta_*) \leq 0$ , 与  $\sigma < 1/2$ ,  $\gamma_* < \mu_0 < 1/2$ ,  $\eta_* < \varepsilon_0 < 1/2$  矛盾。那么  $f(z^*) = 0$ ,  $\varepsilon_* = 0$ ,  $\mu_* = 0$ , 即  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|H(z^k)\| = 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ 。

ii) 由 i) 得  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|H(z^k)\| = 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ 。对于任意的  $k \geq 0$ , 有  $\|\Gamma(\mu_k, \varepsilon_k, x^k)\| \leq \|H(\mu_k, \varepsilon_k, x^k)\|$ , 又由定理 2 可得  $\{x^k\}$  有界。又因为  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ , 所以序列  $\{z^k\}$  有界, 那么序列  $\{z^k\}$  至少存在一个聚点。

iii) 由  $H(\cdot)$  的定义以及 i), 易知序列  $\{z^k\}$  的每一个聚点都是非线性互补问题  $\text{NCP}(F)$  的解。

下面讨论算法 1 的局部收敛性。

**定理 5** 若假设 1 成立, 且  $z^* = (\mu_*, \varepsilon_*, x^*)$  为由算法 1 迭代生成的序列  $\{z^k\}$  的一个聚点。且对于任意的  $V \in \partial H(z^*)$  均非奇异, 则: i) 当  $z^k$  充分逼近于  $z^*$  时,  $\lambda_k \equiv 1$ ; ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = z^*$ ; iii) 序列  $\{z^k\}$  超线性收敛于  $z^*$ ; iv) 若  $F'(x)$  关于  $\mathbf{R}^n$  Lipschitz 连续, 那么  $\{z^k\}$  二阶收敛于  $z^*$ 。

**证明** 因为任意的  $V \in \partial H(z^*)$  均非奇异, 由文献 [9] 的性质 3.1 知, 当  $z^k$  充分逼近于  $z^*$  时, 有

$$\|H'(z^k) - 1\| = O(1). \quad (13)$$

由半光滑 (强半光滑) 的定义可得函数  $H$  在  $z^*$  处是半光滑的 (若  $F'$  关于  $\mathbf{R}^n$  Lipschitz 连续, 那么是强半光滑的)。所以当  $z^k$  充分逼近于  $z^*$  时, 有

$$\|H(z^k) - H(z^*) - H'(z^k)(z^k - z^*)\| = o(\|z^k - z^*\|) = O(\|z^k - z^*\|^2). \quad (14)$$

又因为函数  $H$  在  $z^*$  附近局部 Lipschitz 连续, 那么当  $z^k$  充分逼近于  $z^*$  时, 有

$$\|H(z^k)\|^2 = O(\|z^k - z^*\|^2), \quad (15)$$

结合算法 1 中  $\gamma_k$ 、 $\eta_k$ 、 $\zeta_k$ 、 $\bar{w}_k$  的定义以及式 (15), 得

$$\gamma_k \mu_k \leq \mu_k^2 \leq \|H(z^k)\|^2 = O(\|z^k - z^*\|^2), \quad (16)$$

$$\eta_k \varepsilon_k \leq \varepsilon_k^2 \leq \|H(z^k)\|^2 = O(\|z^k - z^*\|^2), \quad (17)$$

$$\|\zeta_k \bar{w}_k\| \leq \|H(z^k)\|^2 = O(\|z^k - z^*\|^2). \quad (18)$$

那么由式 (6)、式 (13)、式 (14)、式 (16)、式 (17) 以及式 (18), 有

$$\begin{aligned} \|z^k + \Delta z^k - z^*\| &= \|z^k + H'(z^k)^{-1}[-H(z^k) + \gamma_k \bar{\mu} + \eta_k \bar{\varepsilon} + \zeta_k \bar{w}_k] - z^*\| = \\ &= \|H'(z^k)^{-1}[-H(z^k) + \gamma_k \bar{\mu} + \eta_k \bar{\varepsilon} + \zeta_k \bar{w}_k + H'(z^k)(z^k - z^*)]\| \leq \|H'(z^k)^{-1}\| [\|H(z^k) - H(z^*) - \\ &= H'(z^k)(z^k - z^*)\| + \gamma_k \mu_k + \eta_k \varepsilon_k + \|\zeta_k \bar{w}_k\|] = o(\|z^k - z^*\|). \end{aligned} \quad (19)$$

类似于参考文献 [10] 中的定理 3.1 的证明, 得: 当  $z^k$  充分逼近于  $z^*$  时, 有  $\|z^k - z^*\| =$



$O(\|H(z^k) - H(z^*)\|)$ 。所以当  $z^k$  充分逼近于  $z^*$  时, 有

$$\begin{aligned}\|H(z^k + \Delta z^k)\| &= O(\|z^k + \Delta z^k - z^*\|) = o(\|z^k - z^*\|) = \\ &= o(\|H(z^k) - H(z^*)\|) = o(\|H(z^k)\|).\end{aligned}\quad (20)$$

又因为  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|H(z^k)\| = 0$ , 那么由式 (20) 可知, 当  $z^k$  充分逼近于  $z^*$  时,  $\lambda_k = 1$  一定能满足式 (7), 那么 i) 成立。当  $z^k$  充分逼近于  $z^*$  时, 有  $z^{k+1} = z^k + \Delta z^k$ 。结合式 (19) 可得结论 ii) 成立, 并且有  $\|z^{k+1} - z^*\| = o(\|z^k - z^*\|) = O(\|z^k - z^*\|^2)$ 。证毕。

## [ 参 考 文 献 ]

- [1] HARKER P T, PANG J S. Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications [J]. Math Program, 1990, 48(1/3): 161-220. DOI:10.1007/BF01582255.
- [2] 唐嘉. 互补问题的算法研究 [D]. 西安: 西安电子科技大学, 2010.
- [3] 牛潇萌. 非线性互补问题光滑化拟牛顿算法的收敛性分析 [J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(6): 240-247.
- [4] HUANG B H, MA C F. Accelerated modulus-based matrix splitting iteration method for a class of nonlinear complementarity problems [J]. Computational and Applied Mathematics, 2018, 37(3): 3053-3076. DOI:10.1007/s40314-017-0496-z.
- [5] FAN B, MA C F, WU A D, et al. levenberg-marquardt method for nonlinear complementarity problems based on nonmonotone trust region and line search techniques [J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2018, 15(3): 1-19. DOI: 10.1007/s00009-018-1168-y.
- [6] HUANG Z H, QI L, SUN D. Sub-quadratic convergence of a smoothing Newton algorithm for the  $P_0$  and monotone LCP [J]. Mathematical Programming, 2004, 99(3): 423-441. DOI:10.1007/s10107-003-0457-8.
- [6] ZHENG X Y, SHI J R, YANG W, et al. Nonmonotone smoothing Broyden-like method for generalized nonlinear complementarity problem [J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 54(1/2): 277-295. DOI:10.1007/s12190-016-1009-8.
- [7] 伍佩钰, 张丽. 求解非线性方程组的一种非精确 Broyden-like 方法 [J]. 数学理论与应用, 2015, 36(2): 1-9.
- [8] CHEN B L, MA C F. Superlinear/quadratic smoothing Broyden-like method for the generalized nonlinear complementarity problem [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, 12(2): 1250-1263. DOI:10.1016/j.nonrwa.2010.09.021.
- [9] CLARKE F H. Optimization and nonsmooth analysis [M]. New York, NY: Wiley, 1983.
- [10] OI L Q. Convergence analysis of some algorithms for solving nonsmooth equations [J]. Mathematics of Operations Research, 1993, 18(1): 227-244.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)