第 25 卷　第 1 期
2020 年 1 月

集美大学学报（自然科学版）
Journal of Jimei University(Natural Science)

Vol. 25　No. 1
Jan. 2020

[文章编号] 1007 - 7405(2020)01 - 0063 - 06　　DOI:10.19715/j.jmuzr.2020.01.10

# 两个独立部件并联系统的随机序性质

徐雅琳，陈　豪，蔡南莲

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 考虑两个独立且服从指数分布的部件组成的并联系统，研究两个并联系统 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ ，其中 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 有一个部件参数相同，另一个部件参数不同，得到了 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 在随机序、似然比序、故障率序和反故障率序意义下的随机比较性质。同时，得到了部件服从成比例故障率模型和韦布尔分布模型的相应结论。

[关键词] 指数分布；似然比序；故障率序；反故障率序；随机序；成比例故障率模型；韦布尔分布

[中图分类号] O 211.5

# Properties of Stochastic Orders on Parallel Systems with Two Independent Components

XU Yalin, CHEN Hao, CAI Nanlian

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** The parallel system composed of two independent and exponentially distributed components was mainly considered. By studying two such parallel systems $\Sigma_1$ and $\Sigma_2$ , where the parameters of one component are the same and the parameters of the other component are different, the stochastic comparison properties of parallel systems $\Sigma_1$ and $\Sigma_2$ in the sense of stochastic order were gained, likelihood ratio, hazard rate and reverse hazard rate. Meanwhile, the results of the proportional hazard rate model and Weibull distribution model were obtained.

**Keywords:** exponential distribution; likelihood ratio order; hazard rate order; reversed hazard rate order; stochastic order; proportional hazard rate model; Weibull distribution

## 0　引言

指数分布的无记忆性和良好的数学结构，使得它在产品的可靠性分析、运筹学等领域中被广泛使用，如文献［1］对指数分布的性质和应用进行了较系统的研究。同时，由于成比例故障率（proportional hazard rate，PHR）模型可化为指数分布模型来研究，韦布尔分布模型是 PHR 模型的特殊情形，从而 PHR 模型和韦布尔分布模型的应用及研究也受到学者们越来越多的关注，如文献［2－3］在部件寿命服从 PHR 模型或韦布尔分布模型的前提下，讨论了并联系统的随机比较性质。

次序统计量是统计推断、拍卖理论、可靠性理论等领域很重要的概念，有着广泛的应用。在可靠性理论中，$k/n$ 系统是指 $n$ 个部件组成的系统，当且仅当 $n$ 个部件中至少有 $k$ 个部件正常工作，系统才能正常工作。特别地，$1/n$ 系统、$n/n$ 系统分别对应着并联系统和串联系统。设第 $i$ 个部件的寿命为随机变量 $X_i(i=1,\cdots,n)$ 。$X_1,\cdots,X_n$ 的次序统计量为 $X_{1:n}\leqslant\cdots\leqslant X_{n:n}$ ，则并联系统、串联系统的寿

[收稿日期] 2018 - 07 - 19
[基金项目] 国家自然科学基金项目（11771181）
[作者简介] 徐雅琳（1994—），女，硕士生，从事概率论与数理统计研究。通信作者：蔡南莲（1965—），女，教授，主要从事概率论与数理统计研究。E-mail:cainanlian@163.com

命分别为 $X_{n:n}$ 和 $X_{1:n}$ ，$k/n$ 系统的寿命为 $X_{n-k+1:n}$ 。近年来，极值次序统计量的随机比较性质的研究已成为学界研究的热点之一，如：Boland 等[4]研究了两个独立的不同指数分布的部件组成的并联系统的故障率性质，并得到故障率的上界；Khaledi 等[5]进一步研究了多个指数部件并联系统的情形，得到了 $n$ 个非齐次指数分布并联系统的故障率的上界，该结论优于文献［4］得到的；Zhao 等[6]讨论了具有不同参数指数分布的两个部件的并联系统的故障率序、反故障率序、似然比序意义下的随机比较性质。随后，Balakrishnan 等[7]对近年来在部件寿命服从独立指数分布情形下有关次序统计量的随机比较性质的研究进行了较全面的综述。

## 1 定义

下面介绍随机序、PHR 模型及向量超优序的定义，更多的性质可参阅文献［8－9］。文中均假设随机变量非负，分布函数是绝对连续的，具有概率密度函数；“单调增加”均指“单调不降”，“单调减少”均指“单调不增”。

**定义 1** 设随机变量 $X$、$Y$ 的密度函数分别为 $f_X$、$f_Y$，分布函数分别为 $F_X$、$F_Y$，生存函数分别为 $\bar{F}_X = 1 - F_X$、$\bar{F}_Y = 1 - F_Y$。称：1）$X$ 依随机序小于 $Y$（记作 $X \leqslant_{\mathrm{st}} Y$），若 $\bar{F}_Y(x) \geqslant \bar{F}_X(x)$；2）$X$ 依故障率序小于 $Y$（记作 $X \leqslant_{\mathrm{hr}} Y$），若 $\bar{F}_Y(x)/\bar{F}_X(x)$ 关于 $x$ 单调增加；3）$X$ 依反故障率序小于 $Y$（记作 $X \leqslant_{\mathrm{rh}} Y$），若 $F_Y(x)/F_X(x)$ 关于 $x$ 单调增加；4）$X$ 依似然比序小于 $Y$（记作 $X \leqslant_{\mathrm{lr}} Y$），若 $f_Y(x)/f_X(x)$ 关于 $x$ 单调增加。

设随机变量 $X$、$Y$ 的故障率函数分别为 $r_X = f_X/\bar{F}_X$、$r_Y = f_Y/\bar{F}_Y$，反故障率分别为 $\tilde{r}_X = f_X/F_X$、$\tilde{r}_Y = f_Y/F_Y$，有：$X \leqslant_{\mathrm{hr}} Y$ 等价于 $r_X(t) \geqslant r_Y(t)$，$\forall t > 0$；$X \leqslant_{\mathrm{rh}} Y$ 等价于 $\tilde{r}_X(t) \leqslant \tilde{r}_Y(t)$，$\forall t > 0$。

上述随机序有如下关系：$X \leqslant_{\mathrm{lr}} Y \Rightarrow X \leqslant_{\mathrm{hr}} Y \Rightarrow X \leqslant_{\mathrm{st}} Y$；$X \leqslant_{\mathrm{lr}} Y \Rightarrow X \leqslant_{\mathrm{rh}} Y \Rightarrow X \leqslant_{\mathrm{st}} Y$（见文献［8］）。

**定义 2** 称独立随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 服从 PHR 模型，如果存在非负随机变量的分布函数 $F$ 及非负常数 $\lambda_i$，使得 $X_i$ 的生存函数 $\bar{F}_i$ 满足 $\bar{F}_i(x) = [\bar{F}(x)]^{\lambda_i}$，$i = 1, \cdots, n$，其中称 $F$ 为基线分布函数。

若 $r(t)$ 为基线分布函数 $F$ 的故障率函数，则 $X_i$ 的故障率为 $r_i(t) = \lambda_i r(t)$，生存函数为 $\bar{F}_i(x) = \mathrm{e}^{-\lambda_i R(x)}$，$i = 1, \cdots, n$，此时 $R(x) = \int_0^x r(t)\,\mathrm{d}t$ 为 $X$ 的累积故障率。显然，当 $R(x) = x$ 时，PHR 模型即为故障率为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的指数分布。

**定义 3** 将向量 $\boldsymbol{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ 和 $\boldsymbol{Y} = (x_1, \cdots, x_n)$ 中的每个元素按从小到大重排，记为 $(x_{(1)}, \cdots, x_{(n)})$ 和 $(y_{(1)}, \cdots, y_{(n)})$。1）称 $\boldsymbol{X} \geqslant^m \boldsymbol{Y}$，若 $\sum_{i=1}^{j} x_{(i)} \leqslant \sum_{i=1}^{j} y_{(i)}$，$\forall j = 1, \cdots, n-1$ 且 $\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} y_{(i)}$；2）称 $\boldsymbol{X} \geqslant^w \boldsymbol{Y}$，若 $\sum_{i=1}^{j} x_{(i)} \leqslant \sum_{i=1}^{j} y_{(i)}$，$\forall j = 1, \cdots, n$；3）称 $\boldsymbol{X} \geqslant^p \boldsymbol{Y}$，若 $\prod_{i=1}^{j} x_{(i)} \leqslant \prod_{i=1}^{j} y_{(i)}$，$\forall j = 1, \cdots, n$。容易得出：$\boldsymbol{X} \geqslant^m \boldsymbol{Y} \Rightarrow \boldsymbol{X} \geqslant^w \boldsymbol{Y} \Rightarrow \boldsymbol{X} \geqslant^p \boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{X} \geqslant^p \boldsymbol{Y} \Leftrightarrow \ln(\boldsymbol{X}) \geqslant^w \ln(\boldsymbol{Y})$。

## 2 引理

在证明主要结果之前，先介绍一些引理。

**引理 1** 对于任意 $x \in \mathbf{R}^+$，函数 $(1 - \mathrm{e}^{-x})/x$ 和 $x\mathrm{e}^{-x}/(1 - \mathrm{e}^{-x})$ 关于 $x$ 单调减少。

**证明** 见文献［6］引理 3.1。

**引理 2** 设 $X$、$Y$ 是两个随机变量，分布函数分别为 $F$ 和 $G$，反故障率函数分别为 $\tilde{r}$ 和 $\tilde{q}$。当 $X \leqslant_{\mathrm{rh}} Y$ 且 $\tilde{q}(t)/\tilde{r}(t)$ 关于 $t \in \mathbf{R}^+$ 单调增加时，有 $X \leqslant_{\mathrm{lr}} Y$。

**证明** 见文献［8］定理 1。

**引理 3** 设 $X$、$Y$ 是两个随机变量，$g(x)$ 是单调增加函数，则有：1）设 $X \leqslant_{\mathrm{st}} Y$，则 $g(X) \leqslant_{\mathrm{st}} g(Y)$；2）设 $X \leqslant_{\mathrm{hr}} Y$，则 $g(X) \leqslant_{\mathrm{hr}} g(Y)$；3）设 $X \leqslant_{\mathrm{rh}} Y$，则 $g(X) \leqslant_{\mathrm{rh}} g(Y)$；4）设 $X \leqslant_{\mathrm{lr}} Y$，则 $g(X) \leqslant_{\mathrm{lr}} g(Y)$。

**证明** 见文献［8］定理 1。

**引理4**　设 $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$，$\lambda_1$、$\lambda_2$、$\lambda$ 均为大于零的常数，$\varphi(t) = [\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}/(1-e^{-\lambda_1 t}) + \lambda e^{-\lambda t}/(1-e^{-\lambda t})]/[\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}/(1-e^{-\lambda_2 t}) + \lambda e^{-\lambda t}/(1-e^{-\lambda t})]$，$t>0$，则 $\varphi(t)$ 关于 $t$ 单调增加。

**证明**　两边求导得：$\varphi'(t)[\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}/(1-e^{-\lambda_2 t}) + \lambda e^{-\lambda t}/(1-e^{-\lambda t})]^2 = [-\lambda_1^2 e^{-\lambda_1 t}/((1-e^{-\lambda_1 t})^2) - \lambda^2 e^{-\lambda t}/((1-e^{-\lambda t})^2)] \times [\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}/(1-e^{-\lambda_2 t}) + \lambda e^{-\lambda t}/(1-e^{-\lambda t})] - [-\lambda_2^2 e^{-\lambda_2 t}/((1-e^{-\lambda_2 t})^2) - \lambda^2 e^{-\lambda t}/((1-e^{-\lambda t})^2)] \times [\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}/(1-e^{-\lambda_1 t}) + \lambda e^{-\lambda t}/(1-e^{-\lambda t})]$。将等式展开得：$\varphi'(t)[\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}/(1-e^{-\lambda_2 t}) + \lambda e^{-\lambda t}/(1-e^{-\lambda t})]^2 = [-\lambda_1^2 \lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}/((1-e^{-\lambda_1 t})^2(1-e^{-\lambda_2 t})) - \lambda\lambda_1^2 e^{-(\lambda+\lambda_1)t}/((1-e^{-\lambda_1 t})^2(1-e^{-\lambda t})) - \lambda_2\lambda^2 e^{-(\lambda+\lambda_2)t}/((1-e^{-\lambda t})^2(1-e^{-\lambda_2 t})) - \lambda^3 e^{-2\lambda t}/((1-e^{-\lambda t})^3)] - [-\lambda_2^2\lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}/((1-e^{-\lambda_2 t})^2(1-e^{-\lambda_1 t})) - \lambda\lambda_2^2 e^{-(\lambda+\lambda_2)t}/((1-e^{-\lambda_2 t})^2(1-e^{-\lambda t})) - \lambda_1\lambda^2 e^{-(\lambda+\lambda_1)t}/((1-e^{-\lambda t})^2(1-e^{-\lambda_1 t})) - \lambda^3 e^{-2\lambda t}/((1-e^{-\lambda t})^3)]$。整理得：

$$\varphi'(t)[\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}/(1-e^{-\lambda_2 t}) + \lambda e^{-\lambda t}/(1-e^{-\lambda t})]^2 = \lambda_1\lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}/((1-e^{-\lambda_1 t})(1-e^{-\lambda_2 t}))[\lambda_2/(1-e^{-\lambda_2 t}) - \lambda_1/(1-e^{-\lambda_1 t})] + \lambda\lambda_2 e^{-(\lambda+\lambda_2)t}/((1-e^{-\lambda t})(1-e^{-\lambda_2 t}))[\lambda_2/(1-e^{-\lambda_2 t}) - \lambda/(1-e^{-\lambda t})] + \lambda\lambda_1 e^{-(\lambda+\lambda_1)t}/((1-e^{-\lambda t})(1-e^{-\lambda_1 t}))[\lambda/(1-e^{-\lambda t}) - \lambda_1/(1-e^{-\lambda_1 t})] = A + B, \tag{1}$$

其中：$A = \lambda_1\lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}/((1-e^{-\lambda_1 t})(1-e^{-\lambda_2 t}))[\lambda_2/(1-e^{-\lambda_2 t}) - \lambda_1/(1-e^{-\lambda_1 t})]$，$B = \lambda\lambda_2 e^{-(\lambda+\lambda_2)t}/((1-e^{-\lambda t})(1-e^{-\lambda_2 t}))[\lambda_2/(1-e^{-\lambda_2 t}) - \lambda/(1-e^{-\lambda t})] + \lambda\lambda_1 e^{-(\lambda+\lambda_1)t}/((1-e^{-\lambda t})(1-e^{-\lambda_1 t}))[\lambda/(1-e^{-\lambda t}) - \lambda_1/(1-e^{-\lambda_1 t})]$。

因 $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$，由引理1，有 $A>0$，且有 $B \overset{\mathrm{sgn}}{=} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}/(1-e^{-\lambda_2 t})[\lambda_2/(1-e^{-\lambda_2 t}) - \lambda/(1-e^{-\lambda t})] + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}/(1-e^{-\lambda_1 t})[\lambda/(1-e^{-\lambda t}) - \lambda_1/(1-e^{-\lambda_1 t})] \geqslant \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}/(1-e^{-\lambda_1 t})[\lambda_2/(1-e^{-\lambda_2 t}) - \lambda/(1-e^{-\lambda t})] + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}/(1-e^{-\lambda_1 t})[\lambda/(1-e^{-\lambda t}) - \lambda_1/(1-e^{-\lambda_1 t})] = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}/(1-e^{-\lambda_1 t})[\lambda_2/(1-e^{-\lambda_2 t}) - \lambda_1/(1-e^{-\lambda_1 t})] \geqslant 0$。由式（1）得 $\varphi'(t)>0$，故 $\varphi(t)$ 关于 $t$ 单调增加。

**命题1**[6]　设 $X_1$ 与 $X_2$ 相互独立，分别服从参数为 $\lambda_1$ 和 $\lambda$ 的指数分布，$Y_1$ 与 $Y_2$ 相互独立，分别服从参数为 $\lambda_2$ 和 $\lambda$ 的指数分布。令 $X_{2:2} = \max(X_1, X_2)$，$Y_{2:2} = \max(Y_1, Y_2)$。设 $\lambda \geqslant \max(\lambda_1, \lambda_2)$，则 $X_{2:2} \geqslant_{lr} Y_{2:2} \Leftrightarrow \lambda_1 \leqslant \lambda_2$。

**命题2**[6]　设 $X_1$ 与 $X_2$ 相互独立，分别服从参数为 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的指数分布，$Y_1$ 与 $Y_2$ 相互独立，分别服从参数为 $\lambda_1^*$ 和 $\lambda_2^*$ 的指数分布。令 $X_{2:2} = \max(X_1, X_2)$，$Y_{2:2} = \max(Y_1, Y_2)$。设 $\min(\lambda_1, \lambda_2) \leqslant \min(\lambda_1^*, \lambda_2^*) \leqslant \max(\lambda_1^*, \lambda_2^*) \leqslant \max(\lambda_1, \lambda_2)$，则：

1）下面三条件等价：ⅰ）$(\lambda_1, \lambda_2) \overset{w}{\geqslant} (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$；ⅱ）$X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{lr}} Y_{2:2}$；ⅲ）$X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{rh}} Y_{2:2}$。

2）下面三条件等价：ⅰ）$(\lambda_1, \lambda_2) \overset{p}{\geqslant} (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$；ⅱ）$X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{hr}} Y_{2:2}$；ⅲ）$X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{st}} Y_{2:2}$。

本文假设 $X_1$ 与 $X_2$ 相互独立，$Y_1$ 与 $Y_2$ 相互独立。令 $X_{2:2} = \max(X_1, X_2)$，$Y_{2:2} = \max(Y_1, Y_2)$，根据 $\lambda$、$\lambda_1$ 与 $\lambda_2$ 的大小关系，讨论 $X_{2:2}$ 与 $Y_{2:2}$ 在随机序、似然比序、故障率序、反故障率序下的随机比较性质，得到定理1是上述已有命题1的补充，定理2及定理3是命题2的补充。

# 3　主要结果

## 3.1　指数分布情形

本节考虑服从指数分布的两个部件组成的并联系统，当其中一个部件的参数固定，另一个部件的参数变化时，并联系统寿命的随机序性质。

设两个部件 $X_1$、$X_2$ 相互独立，分别服从参数为 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$（$\lambda_1>0, \lambda_2>0$）的指数分布，则 $X_1$、$X_2$ 组成的并联系统寿命 $X_{2:2}$ 的分布函数为 $F_{X_{2:2}}(t) = (1-e^{-\lambda_1 t})(1-e^{-\lambda_2 t})$，概率密度为 $f_{X_{2:2}}(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - (\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$，反故障率函数为 $\tilde{r}_{X_{2:2}}(t) = f_{X_{2:2}}(t)/F_{X_{2:2}}(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}/(1-e^{-\lambda_1 t}) + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}/(1-e^{-\lambda_2 t})$，有 $\tilde{r}_{X_{2:2}}(t) = \tilde{r}_{X_1}(t) + \tilde{r}_{X_2}(t)$，$\forall t>0$。

**定理 1** 设 $X_1$ 、$X_2$ 相互独立，分别服从参数为 $\lambda_1$ 和 $\lambda$ 的指数分布，$Y_1$ 、$Y_2$ 相互独立，分别服从参数为 $\lambda_2$ 和 $\lambda$ 的指数分布，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda > 0$ 且 $\lambda \geqslant \min(\lambda_1,\lambda_2)$ ，则 $X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{lr}} Y_{2:2}$ 的充要条件是 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ 。

**证明** 当 $\lambda \geqslant \max(\lambda_1,\lambda_2)$ 时，见文献［6］定理3.2。只需考虑 $\min(\lambda_1,\lambda_2) \leqslant \lambda \leqslant \max(\lambda_1,\lambda_2)$ 情形。记 $\tilde{r}_{X_2}(t)$ 、$\tilde{r}_{Y_2}(t)$ 分别为 $X_{2:2}$ 、$Y_{2:2}$ 的反故障率。

充分性。设 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ ，由引理2，要证 $X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{lr}} Y_{2:2}$ ，只需证 $X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{rh}} Y_{2:2}$ 和 $\varphi(t) = \tilde{r}_{X_{2:2}}(t)/\tilde{r}_{Y_{2:2}}(t)$ 关于 $t \in \mathbf{R}^+$ 单调增加。$X_{2:2}$ 、$Y_{2:2}$ 的反故障率分别为 $\tilde{r}_{X_{2:2}}(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}/(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}) + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}/(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}) = \tilde{r}_{X_1}(t) + \tilde{r}_{X_2}(t)$ ，$\tilde{r}_{Y_{2:2}}(t) = \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}/(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}) + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}/(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}) = \tilde{r}_{Y_1}(t) + \tilde{r}_{Y_2}(t)$ 。

题设 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ ，由引理1：$\lambda_1 t\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}/(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}) \geqslant \lambda_2 t\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}/(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 t})$ ，从而 $\tilde{r}_{X_1}(t) \geqslant \tilde{r}_{Y_1}(t)$ 。又因为 $\tilde{r}_{X_2}(t) = \tilde{r}_{Y_2}(t)$ ，故 $\tilde{r}_{X_{2:2}}(t) \geqslant \tilde{r}_{Y_{2:2}}(t)$ ，即 $X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{rh}} Y_{2:2}$ 。由引理4，$\varphi(t) = \tilde{r}_{X_{2:2}}(t)/\tilde{r}_{Y_{2:2}}(t)$ 关于 $t$ 单调增加，故 $X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{lr}} Y_{2:2}$ 。

必要性。设 $X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{lr}} Y_{2:2}$ ，要证 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ 。因 $X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{lr}} Y_{2:2}$ ，故 $X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{st}} Y_{2:2}$ ，则对任意的 $t>0$ ，有 $\bar{F}_{X_{2:2}}(t) \geqslant \bar{F}_{Y_{2:2}}(t)$ 。又 $\bar{F}_{X_{2:2}}(t)$ 在原点的泰勒展开式为：$\bar{F}_{X_{2:2}}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \mathrm{e}^{-\lambda t} - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda)t} = [1-\lambda_1 t + \lambda_1^2 t^2/2 + o(t^2)] + [1-\lambda t + \lambda^2 t^2/2 + o(t^2)] - [1-(\lambda_1+\lambda)t + (\lambda_1+\lambda)^2 t^2/2 + o(t^2)]$ ，所以，

$$\bar{F}_{X_{2:2}}(t) = 1 - \lambda\lambda_1 t^2 + o(t^2), \tag{2}$$

其中 $o(t^2)$ 表示 $t^2$ 的高阶无穷小。

同理，

$$\bar{F}_{Y_{2:2}}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} + \mathrm{e}^{-\lambda t} - \mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda)t} = 1 - \lambda\lambda_2 t^2 + o(t^2)。 \tag{3}$$

由式（2）和式（3）得：$1-\lambda\lambda_1 t^2 + o(t^2) \geqslant 1 - \lambda\lambda_2 t^2 + o(t^2)$ ，两边同除以 $t^2$ 得：$-\lambda\lambda_1 + o(t^2)/t^2 \geqslant -\lambda\lambda_2 + o(t^2)/t^2$ ，令 $t \to 0$ ，得 $\lambda\lambda_1 \leqslant \lambda\lambda_2$ ，即 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ 。

下面的命题3说明，定理1中如果条件 $\lambda \geqslant \min(\lambda_1,\lambda_2)$ 不满足，即 $\lambda < \min(\lambda_1,\lambda_2)$ ，定理1的结论不一定成立。

**命题 3** 设 $X_1$ 、$X_2$ 相互独立，分别服从参数为 $\lambda_1$ 和 $\lambda$ 的指数分布，$Y_1$ 、$Y_2$ 相互独立，分别服从参数为 $\lambda_2$ 和 $\lambda$ 的指数分布，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda > 0$ 。若 $\lambda < \min(\lambda_1,\lambda_2)$ ，则：ⅰ）由 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ 不能得出 $X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{lr}} Y_{2:2}$ ；ⅱ）由 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ 不能得出 $X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{hr}} Y_{2:2}$ 。

**证明** 分别令：a）$\lambda = 1.6$ ，$\lambda_1 = 3$ ，$\lambda_2 = 5.6$ ；b）$\lambda = 0.3$ ，$\lambda_1 = 0.6$ ，$\lambda_2 = 0.7$ ；c）$\lambda = 0.1$ ，$\lambda_1 = 0.3$ ，$\lambda_2 = 0.65$ 。令 $I(t;\lambda,\lambda_1,\lambda_2) = f_{X_{2:2}}(t)/f_{Y_{2:2}}(t) = [\lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} - (\lambda_1+\lambda)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda)t}]/[\lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} - (\lambda_1+\lambda)\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda)t}]$ ，$J(t;\lambda,\lambda_1,\lambda_2) = \bar{F}_{X_{2:2}}(t)/\bar{F}_{Y_{2:2}}(t) = [\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \mathrm{e}^{-\lambda t} - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda)t}]/[\mathrm{e}^{-\lambda_2 t} + \mathrm{e}^{-\lambda t} - \mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda)t}]$ 。由图1、图2可以看出：当 $t \in \mathbf{R}^+$ 时，$I(t;\lambda,\lambda_1,\lambda_2)$ 、$J(t;\lambda,\lambda_1,$

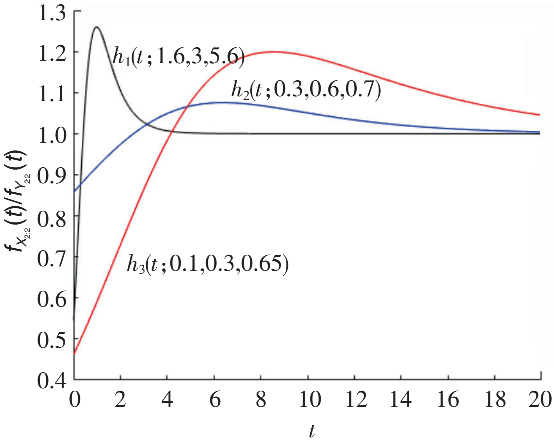


图 1 $I(t;\lambda,\lambda_1,\lambda_2)=f_{X_{2:2}}(t)/f_{Y_{2:2}}(t)$

Fig.1 $I(t;\lambda,\lambda_1,\lambda_2)=f_{X_{2:2}}(t)/f_{Y_{2:2}}(t)$

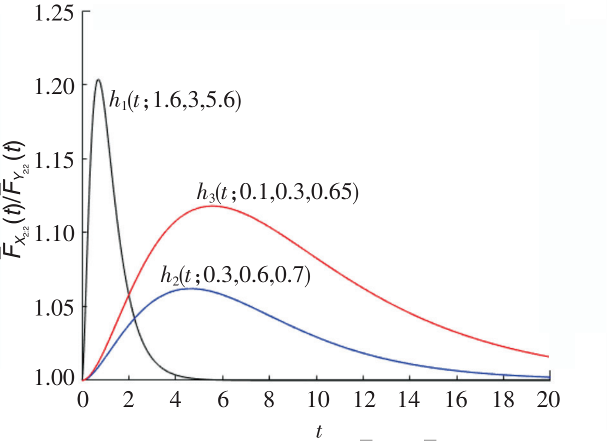


图 2 $J(t;\lambda,\lambda_1,\lambda_2)=\bar{F}_{X_{2:2}}(t)/\bar{F}_{Y_{2:2}}(t)$

Fig.2 $J(t;\lambda,\lambda_1,\lambda_2)=\bar{F}_{X_{2:2}}(t)/\bar{F}_{Y_{2:2}}(t)$

$\lambda_2$）非单调增加，故 $X_{2:2} \geqslant_{\rm lr} Y_{2:2}$ 和 $X_{2:2} \geqslant_{\rm hr} Y_{2:2}$ 均不成立。有如下进一步的结论。

**定理 2**　设 $X_1$、$X_2$ 相互独立，分别服从参数为 $\lambda_1$ 和 $\lambda$ 的指数分布，$Y_1$、$Y_2$ 相互独立，分别服从参数为 $\lambda_2$ 和 $\lambda$ 的指数分布，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda > 0$。设 $\lambda \geqslant \min(\lambda_1,\lambda_2)$，则下列条件等价：1）$\lambda_1 \leqslant \lambda_2$；2）$X_{2:2} \geqslant_{\rm lr} Y_{2:2}$；3）$X_{2:2} \geqslant_{\rm hr} Y_{2:2}$；4）$X_{2:2} \geqslant_{\rm rh} Y_{2:2}$；5）$X_{2:2} \geqslant_{\rm st} Y_{2:2}$。

**证明**　由于 $X \leqslant_{\rm lr} Y \Rightarrow X \leqslant_{\rm hr} Y \Rightarrow X \leqslant_{\rm st} Y$，$X \leqslant_{\rm lr} Y \Rightarrow X \leqslant_{\rm rh} Y \Rightarrow X \leqslant_{\rm st} Y$，且由定理 1 得 1）$\Leftrightarrow$2），故只需证 5）$\Rightarrow$1），1）$\Rightarrow$4）。

5）$\Rightarrow$1）：设 $X_{2:2} \geqslant_{\rm st} Y_{2:2}$，要证 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$。与定理 1 必要性部分证法相同。

1）$\Rightarrow$4）：设 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$，要证 $X_{2:2} \geqslant_{\rm rh} Y_{2:2}$。当 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ 时，由引理 1 有：$\tilde{r}_{X_1}(t) \geqslant \tilde{r}_{Y_1}(t)$，又因 $\tilde{r}_{X_2}(t) = \tilde{r}_{Y_2}(t)$，故 $\tilde{r}_{X_{2:2}}(t) = \tilde{r}_{X_1}(t) + \tilde{r}_{X_2}(t) \geqslant \tilde{r}_{Y_1}(t) + \tilde{r}_{Y_2}(t) = \tilde{r}_{Y_{2:2}}(t)$，即 $X_{2:2} \geqslant_{\rm rh} Y_{2:2}$，证毕。

**注 1**　定理 2 中，当 $\min(\lambda_1,\lambda_2) \leqslant \lambda \leqslant \max(\lambda_1,\lambda_2)$ 时，并不满足文献［6］定理 3.4、定理 4.3 的条件，故定理 2 的结论是文献［6］定理 3.4、定理 4.3 的补充。

**定理 3**　设 $X_1$、$X_2$ 相互独立，分别服从参数为 $\lambda_1$ 和 $\lambda$ 的指数分布，$Y_1$、$Y_2$ 相互独立，分别服从参数为 $\lambda_2$ 和 $\lambda$ 的指数分布。对于任意的 $\lambda > 0$，则下列条件等价：1）$\lambda_1 \leqslant \lambda_2$；2）$X_{2:2} \geqslant_{\rm rh} Y_{2:2}$；3）$X_{2:2} \geqslant_{\rm st} Y_{2:2}$。

**证明**　因 $X \leqslant_{\rm rh} Y \Rightarrow X \leqslant_{\rm st} Y$，只需证 1）$\Rightarrow$2），3）$\Rightarrow$1）。

1）$\Rightarrow$2）：设 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$，要证 $X_{2:2} \geqslant_{\rm rh} Y_{2:2}$。当 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ 时，由引理 1 有：$\tilde{r}_{X_1}(t) \geqslant \tilde{r}_{Y_1}(t)$，又因 $\tilde{r}_{X_2}(t) = \tilde{r}_{Y_2}(t)$，故 $\tilde{r}_{X_{2:2}}(t) = \tilde{r}_{X_1}(t) + \tilde{r}_{X_2}(t) \geqslant \tilde{r}_{Y_1}(t) + \tilde{r}_{Y_2}(t) = \tilde{r}_{Y_{2:2}}(t)$，即 $X_{2:2} \geqslant_{\rm rh} Y_{2:2}$。

3）$\Rightarrow$1）：设 $X_{2:2} \geqslant_{\rm st} Y_{2:2}$，要证 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$。证法与定理 1 必要性部分证法相同。

**注 2**　定理 3 中，当 $\lambda \leqslant \min(\lambda_1,\lambda_2)$ 时，并不满足文献［6］定理 3.4 的条件，故定理 3 的结论是文献［6］定理 3.4 的补充。

### 3.2　PHR 模型情形

下面考虑部件分布服从 PHR 模型时，并联系统寿命的随机序性质。

设 $X_i$ 的生存函数 $\bar{F}_i$ 满足 $\bar{F}_i(x) = [\bar{F}(x)]^{\lambda_i}$ $(i = 1,2)$，其中生存函数 $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$，$F(x)$ 为基线分布函数。基线分布函数 $F(t)$ 的故障率函数是 $r(t)$，累积故障率为 $R(x) = \int_0^x r(t)\,{\rm d}t = -\ln \bar{F}(x)$ $(i = 1,2)$。

因 $P(R(X_i) > x) = P(X_i > R^{-1}(x)) = \bar{F}^{\lambda_i}(\bar{F}^{-1}({\rm e}^{-x})) = {\rm e}^{-\lambda_i x}$，其中 $R^{-1}(x)$ 为 $R(x)$ 的反函数。记 $U_i = R(X_i)$，则 $U_i$ 是参数为 $\lambda_i$ 的指数分布（$i = 1,2$）。

令 $U_{2:2} = \max(U_1,U_2)$，因 $R(x)$ 是单调增加函数，故

$$U_{2:2} = \max(R(X_1),R(X_2)) = R(\max(X_1,X_2)) = R(X_{2:2})。\tag{4}$$

再次利用 $R(x)$ 及 $R^{-1}(x)$ 是单调增加函数，通过引理 3，将 PHR 模型转化为已有指数分布的情形，得到定理 4 和定理 5。

**定理 4**　设 $\bar{F}(x)$ 为非负随机变量的生存函数。$X_1$、$X_2$ 相互独立，生存函数分别为 $[\bar{F}(t)]^{\lambda_1}$ 和 $[\bar{F}(t)]^{\lambda}$，$Y_1$、$Y_2$ 相互独立，生存函数分别为 $[\bar{F}(t)]^{\lambda_2}$ 和 $[\bar{F}(t)]^{\lambda}$，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda > 0$。设 $\lambda \geqslant \min(\lambda_1,\lambda_2)$，则下列条件等价：1）$\lambda_1 \leqslant \lambda_2$；2）$X_{2:2} \geqslant_{\rm lr} Y_{2:2}$；3）$X_{2:2} \geqslant_{\rm hr} Y_{2:2}$；4）$X_{2:2} \geqslant_{\rm rh} Y_{2:2}$；5）$X_{2:2} \geqslant_{\rm st} Y_{2:2}$。

**证明**　沿用上述的记号，令 $U_i = R(X_i)$，$V_i = R(Y_i)$。$U_1$，$U_2$ 分别服从参数为 $\lambda_1$ 和 $\lambda$ 的指数分布，$V_1$，$V_2$ 分别服从参数为 $\lambda_2$ 和 $\lambda$ 的指数分布。由式（4）得 $U_{2:2} = R(X_{2:2})$，$V_{2:2} = R(Y_{2:2})$。

1）$\Rightarrow$2）：已知 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$，要证 $X_{2:2} \geqslant_{\rm lr} Y_{2:2}$。由定理 2 有：$U_{2:2} \geqslant_{\rm lr} U_{2:2}$。因 $R^{-1}(x)$ 是单调增加函数，由引理 3 得 $R^{-1}(U_{2:2}) \geqslant_{\rm lr} R^{-1}(V_{2:2})$，即 $X_{2:2} \geqslant_{\rm lr} Y_{2:2}$。

2）$\Rightarrow$1）：已知 $X_{2:2} \geqslant_{\rm lr} Y_{2:2}$，要证 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$。因 $R(x)$ 是单调增加函数，由引理 3 得 $U_{2:2} = R(X_{2:2}) \geqslant_{\rm lr} R(Y_{2:2}) = V_{2:2}$，再由定理 2 得 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$，故 1）$\Leftrightarrow$2）。

同理可类似证明 1）⇔3）⇔4）⇔5）。

**注 3** 定理 4 中，当 $\min(\lambda_1,\lambda_2) \leqslant \lambda \leqslant \max(\lambda_1,\lambda_2)$ 时，并不满足文献［7］定理 2.8 的条件，且定理 4 给出的是使 $X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{lr}} Y_{2:2}$ 成立的充要条件，而已有文献［7］定理 2.8 给出的是使 $X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{lr}} Y_{2:2}$ 成立的充分条件，故定理 4 是文献［7］定理 2.8 的补充。

**定理 5** 设 $\bar{F}(x)$ 为非负随机变量的生存函数。$X_1$、$X_2$ 相互独立，生存函数分别为 $[\bar{F}(t)]^{\lambda_1}$ 和 $[\bar{F}(t)]^{\lambda}$，$Y_1$、$Y_2$ 相互独立，生存函数分别为 $[\bar{F}(t)]^{\lambda_2}$ 和 $[\bar{F}(t)]^{\lambda}$，对于任意的 $\lambda > 0$，则下列条件等价：1）$\lambda_1 \leqslant \lambda_2$；2）$X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{rh}} Y_{2:2}$；3）$X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{st}} Y_{2:2}$。

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是韦布尔随机变量，$X_i \sim W(\alpha,\lambda_i)$，$i=1,\cdots,n$，$\lambda_i > 0$，$\alpha > 0$。因 $X_i$ 的生存函数为 $\bar{F}_i(t) = \mathrm{e}^{-(\lambda_i t)^{\alpha}}$（$t > 0$），故 $X_1,\cdots,X_n$ 服从参数为 ${\lambda_1}^{\alpha},\cdots,{\lambda_n}^{\alpha}$ 的 PHR 模型。

下面是部件服从韦布尔分布时的相应结论。

**推论 1** 设 $X_1$、$X_2$ 相互独立，服从相同的形状参数 $\alpha$，尺度参数为 $\lambda_1$ 和 $\lambda$ 的韦布尔分布，$Y_1$、$Y_2$ 相互独立，服从相同的形状参数 $\alpha$，尺度参数为 $\lambda_2$ 和 $\lambda$ 的韦布尔分布，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda,\alpha > 0$，假设 $\lambda \geqslant \min(\lambda_1,\lambda_2)$，则下列条件等价：1）$\lambda_1 \leqslant \lambda_2$；2）$X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{lr}} Y_{2:2}$；3）$X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{hr}} Y_{2:2}$；4）$X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{rh}} Y_{2:2}$；5）$X_{2:2} \geqslant_{\mathrm{st}} Y_{2:2}$。

**证明** 因 $\alpha > 0$，$\lambda_1^{\alpha} \leqslant \lambda_2^{\alpha} \Leftrightarrow \lambda_1 \leqslant \lambda_2$，故由定理 4 立即得到。

## ［参 考 文 献］


［1］BALAKRISHNAN N，BASU A P. The exponential distribution：theory，methods and applications［J］. Society for Industrial and Applied Mathematics，1998，40(1)：167-168.

［2］KOCHAR S C，XU M. Stochastic comparisons of parallel systems when components have proportional hazard rates［J］. Probability in the Engineering and Informational Sciences，2007，21(4)：597-609. DOI：10.1017/S0269964807000344.

［3］TORRADO N，KOCHAR S. Stochastic order relations among parallel systems from Weibull distributions［J］. Journal of Applied Probability，2015，52(1)：102-116. DOI：10.1239/JAP/1429282609.

［4］BOLAND P J，El-NEWEIHI E，PROSCHAN F. Applications of the hazard rate ordering in reliability and order statistics［J］. Journal of Applied Probability，1994，31(1)：180-192. DOI：10.2307/3215245.

［5］KHALEDI B E，KOCHAR S. Some new results on stochastic comparisons of parallel systems［J］. Journal of Applied Probability，2000，37(4)：1123-1128. DOI：10.1239 /JAP/1014843091.

［6］ZHAO P，BALAKRISHNAN N. Some characterization results for parallel systems with two heterogeneous exponential component［J］. Statistics，2011，45(6)：593-604. DOI：10.1080/02331888.2010.485276.

［7］BALAKRISHNAN N，ZHAO P. Ordering properties of order statistics from heterogeneous populations：review with an emphasis on some recent developments［J］. Probability in the Engineering & Informational Sciences，2013，27(4)：403-443. DOI：10.1017/S026996481 3000156.

［8］SHAKED M，SHANTHIKUMAR J G. Stochastic order［M］. New York：Springer，2007：6，18，38，44，46.

［9］MARSHALL A W，OLKIN I. Inequalities：theory of majorization and its applications［M］. New York：Springer，2010：8-13.


（责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤）