

# 具波动算子非线性 Schrödinger 方程线性化差分格式

闫瑞娥, 梁宗旗

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 构造了具波动算子的非线性 Schrödinger 方程的一种线性化差分格式。即在守恒非线性差分格式的基础上, 利用 Taylor 方法展开非线性项, 引入小参数  $\epsilon$  得到该方程的线性化差分格式。利用 Fourier 方法证明了其格式的收敛性和稳定性。最后通过数值例子验证了该方法的可信性和有效性。

[关键词] 非线性 Schrödinger 方程; 波动算子; 收敛性; 稳定性; 线性化格式

[中图分类号] O 241

## Linearized Difference Scheme for Nonlinear Schrödinger Equation with Wave Operator

YAN Ruie, LIANG Zongqi

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** In this paper, the nonlinear Schrödinger equation with wave operator was constructed by a linearized difference scheme. In the conservation of nonlinear difference scheme on the basis of the method of Taylor expansion. The nonlinear term was introduced by the small parameter equation of linear difference scheme. Using the Fourier method, the convergence and stability of the format were proved. At last, through numerical example, the credibility and validity of the method were validated.

**Keywords:** nonlinear schrödinger equation; wave operator; convergence; stability; linearization scheme

## 0 引言

非线性 Schrödinger 方程是一类经典的非线性偏微分方程, 在量子力学、非线性光学、流体力学等中均有广泛应用。具波动算子的非线性 Schrödinger 方程是 Matsunishi<sup>[1]</sup>于 1980 年在研究单色波的非线性相互作用时首次得到的。随后在推导高频电子横向速度、研究等离子物理孤立子等问题的许多物理模型所满足的方程中也得到了同类方程。具波动算子的非线性 Schrödinger 方程与经典的非线性 Schrödinger 方程相比, 在非线性 Schrödinger 方程基础上增加了波动项和一阶项, 使其同时具有波动方程与抛物方程的性质, 从而使该问题的研究变得更加复杂且具有挑战性。关于该方程的研究文献不多, 郭柏灵<sup>[2]</sup>研究了该方程多维问题的初、边值问题, 证明了其解的存在性与唯一性, 并研究了其正则性; 文献 [3] 研究了特殊情况下该类方程一维情况下的数值解问题; 文献 [4-6] 构造了该方程的显式差分格式、谱方法及拟谱方法, 并分别证明了其稳定性; 文献 [7-9] 在文献 [3] 的基础

[收稿日期] 2018-09-17

[基金项目] 国家自然科学基金项目(11201178, 11901237); 福建省自然科学基金项目(2019J01329); 福建省教育厅项目(JT180262, ZC2018008)

[作者简介] 闫瑞娥(1993—), 女, 硕士生, 从事计算数学方向研究。通信作者: 梁宗旗(1964—), 男, 教授, 硕士生导师, 从事计算数学方向研究。E-mail: zqliang@jmu.edu.cn

上给出了一类特殊情况下该方程的多种守恒差分格式; 文献 [10] 给出了该方程的一种高精度守恒差分格式; 文献 [11] 给出了有限元方法; 文献 [12] 和文献 [13] 分别给出了该方程的一类多辛傅里叶拟谱格式和指数波积分的傅里叶谱方法; 文献 [14 - 15] 构造了多种该类方程的多辛格式; 文献 [16] 研究了特殊情况下该类方程的行波解的线性稳定性问题; 文献 [17] 和文献 [18] 分别给出了规范变换后的多种组合解、Jacobi 椭圆函数周期解及新的多级包络周期解, 并在极限情况下求得了该方程的多类精确孤波解; 文献 [19] 和文献 [20] 分别给出了该类方程的多尺度时间积分与两尺度方法、能量守恒的哈密顿边值方法; 文献 [21 - 24] 分别给出了守恒差分格式、守恒紧格式及 Galerkin 谱方法等。

本文研究如下形式的具波动算子的非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} Tu + i\alpha(u_t + u_x) + \delta^2 u + \beta |u|^2 u = 0, & t \geq 0, x_l \leq x \leq x_r, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & x_l \leq x \leq x_r, \\ u(x, t) = u(x + L, T), & t \geq 0, x_l \leq x \leq x_r, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $i^2 = -1$ ;  $Tu = u_{tt} - u_{xx} + \gamma u_{tx}$ ;  $u_t = \partial u / \partial t$ ,  $u_x = \partial u / \partial x$ ,  $u_{tt} = \partial^2 u / \partial t^2$ ,  $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$ ;  $u_{tx} = \partial^2 u / (\partial t \partial x)$ ;  $\alpha, \gamma, \delta^2, \beta > 0$  为实常数;  $u(x, t)$  是未知复值函数;  $u_0(x), u_1(x)$  均为实值函数;  $L = x_r - x_l$ 。

方程 (1) 满足如下的守恒律<sup>[10]</sup>, 能量守恒律:  $E(t) = \int_{x_l}^{x_r} (|u_x|^2 + |u_t|^2 - i\alpha u \bar{u}_x + \delta^2 |u|^2 + (\beta/2) |u|^4) dx = E(0)$ ; 质量守恒律:  $Q(t) = \int_{x_l}^{x_r} [(u_t \bar{u} - \bar{u}_t u) - \gamma u \bar{u}_x - i\alpha |u|^2] dx = Q(0)$ 。

在数值计算中, 为了拟合原方程具有的守恒性, 构造的格式也能保持原方程的守恒性, 称之为守恒格式。但守恒格式在一般情况下都要求解一个非线性方程组, 加入一个小参数, 这给实际计算带来了许多的问题和困难。例如, 如果选择合适的迭代法、收敛速度等, 如构造的格式是显示格式, 一方面是显示格式是否稳定, 即使是稳定, 一般其稳定性条件都是比较苛刻的。因此, 本文提出了对非线性项在时间层利用 Taylor 展开, 将非线性格式转化为线性化差分格式的差分方法。

### 1 线性化格式构造

对平面区域  $\Omega = [x_r, x_l] \times [0, T]$  作网格剖分, 并记空间、时间步长分别记为:  $h = (x_r - x_l) / J$ ,  $\tau = T / N (J, N \in \mathbb{N})$ ,  $x_j = x_r + jh$ ,  $t_n = n\tau$ 。令:  $\Omega_h = x_j | 0 \leq j \leq J, \Omega_\tau = t_n | 0 \leq n \leq N, \Omega_h^\tau = \Omega_h - \Omega_\tau$ ,  $(u_j^n)_x = (u_{j+1}^n - u_j^n) / h$ ,  $(u_j^n)_{\bar{x}} = (u_j^n - u_{j-1}^n) / h$ ,  $(u_j^n)_{\hat{x}} = (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) / (2h)$ ,  $(u_j^n)_t = (u_j^{n+1} - u_j^n) / \tau$ ,  $(u_j^n)_{\bar{t}} = (u_j^n - u_j^{n-1}) / \tau$ ,  $(u_j^n)_{\hat{t}} = (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) / (2\tau)$ ,  $(u_j^n)_{\bar{x}\bar{x}} = (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) / h^2$ ,  $(u_j^n)_{\bar{t}\bar{t}} = (u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}) / \tau^2$ ,  $u_j^{n+1/2} = (u_j^{n+1} + u_j^n) / 2$ 。

定义周期 Sobolev 空间  $H_{per}^m[0, L] = \{u(x) | (\partial^m u / \partial x^m) \in L^2(\Omega), u(x + L) = u(x), m > 0\}$ 。离散内积及范数定义为:  $(u^n, v^n) = h \sum_{j=0}^{J-1} (u_j^n \bar{v}_j^n)$ ,  $(u_j^n, v_j^n \in \Omega_h^n)$ ,  $\|u^n\| = (u^n, v^n)$ ,  $\|u\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq J} |u_j|$ , 其中  $\bar{u}$  表示  $u$  的复共轭, 记为  $u_j^n$  差分近似解,  $U_j^n = U(x_j, t_n)$  为方程精确解。

先构造如下的守恒“蛙跳”差分格式:

$$Wu + i\alpha[(u_j^n)_{\hat{t}} + (u_j^{n+1/2})_{\hat{x}}] + \delta^2 u_j^{n+1/2} + (\beta/2)(|u_j^{n+1}|^2 u_j^{n+1} + |u_j^{n-1}|^2 u_j^{n-1}) = 0, \quad (2)$$

其中:  $n = 1, 2, \dots, N - 1$ ;  $j = 1, 2, \dots, J - 1$ ;  $Wu = (u_j^n)_{\bar{t}\bar{t}} - (u_j^{n+1/2})_{\bar{x}\bar{x}} + \gamma(u_j^n)_{\hat{x}\hat{x}}$ 。

显然上述的格式为全隐格式, 需要求解一阶非线性方程组或采用预估-校正方法求解。为了避免求解非线性方程组, 引入一个小参数  $\epsilon$  对非线性项进行处理。

将差分格式(2)中非线性项部分  $|u_j^{n+1}|^2 u_j^{n+1}$  在第  $n$  个时间层 Taylor 展开, 得

$$|u_j^{n+1}|^2 u_j^{n+1} = |u_j^n|^2 u_j^n + \tau[\partial(|u_j^n|^2 u_j^n) / \partial t] + R(\tau), \quad (3)$$

其中  $R(\tau) = o(\tau^2)$  是截断误差。对式 (3) 引入小参数  $\epsilon (\epsilon \in \mathbf{R})$ , 舍去误差项后得

$$\begin{aligned}
|u_j^{n+1}|^2 u_j^{n+1} &\approx |u_j^n|^2 u_j^n + \epsilon \tau [\partial(|u_j^n|^2 u_j^n) / \partial t] = \\
&|u_j^n| |u_j^n + 2\epsilon \tau |u_j^n| u_j^n [\partial(|u_j^n|) / \partial t] + \epsilon \tau |u_j^n| [\partial u_j^n / \partial t],
\end{aligned}
\tag{4}$$

用向后差分格式代替式 (4) 中的  $\partial(|u_j^n|) / \partial t$ 、 $\partial(u_j^n) / \partial t$  项, 即

$$\partial |u_j^n| / \partial t = (|u_j^n| - |u_j^{n-1}|) / \tau, \partial u_j^n / \partial t = (u_j^n - u_j^{n-1}) / \tau.
\tag{5}$$

将式 (5) 代入式 (4) 并整理得

$$|u_j^{n+1}|^2 u_j^{n+1} \approx [(1 + 3\epsilon) |u_j^n|^2 - 2\epsilon |u_j^n| |u_j^{n-1}|] u_j^n - \epsilon |u_j^n| u_j^{n-1}.
\tag{6}$$

将式 (6) 代入差分格式 (2) 中非线性项, 非线性项部分变为如下形式:

$$|u_j^{n+1}|^2 u_j^{n+1} + |u_j^{n-1}|^2 u_j^{n-1} \approx [(1 + 3\epsilon) |u_j^n|^2 - 2\epsilon |u_j^n| |u_j^{n-1}|] u_j^n - \epsilon |u_j^n| u_j^{n-1} + |u_j^{n-1}|^2 u_j^{n-1}.
\tag{7}$$

将式 (7) 代入差分格式 (2) 中, 从而得到了带小参数  $\epsilon$  的线性化格式:

$$Wu + i\alpha [(u_j^n)_i + (u_j^{n+1/2})_{\hat{x}}] + \delta^2 u_j^{n+1/2} + (\beta/2) f(u_j^n, u_j^{n-1}) = 0,
\tag{8}$$

其中  $f(u_j^n, u_j^{n-1}) = [(1 + 3\epsilon) |u_j^n|^2 - 2\epsilon |u_j^n| |u_j^{n-1}|] u_j^n - \epsilon |u_j^n| u_j^{n-1} + |u_j^{n-1}|^2 u_j^{n-1}$ .

令  $s = \tau / h$ , 式 (8) 可以改写成:

$$Du_j^{n+1} + Eu_{j+1}^{n+1} + Fu_{j-1}^{n+1} = M_j u_j^n + Y_j u_j^{n-1} + Qu_{j+1}^{n-1} + Hu_{j-1}^{n-1},
\tag{9}$$

其中:  $1 \leq j \leq N - 1; n = 1, 2, \dots; D = 4 + 4s^2 + 2i\alpha\tau + 2\tau^2\delta^2; E = i\alpha\tau s + \gamma s - 2s^2; F = -i\alpha\tau s - \gamma s - 2s^2; M_j = 8 - 2\beta\tau^2 [(1 + 3\epsilon) |u_j^n|^2 - 2\epsilon |u_j^n| |u_j^{n-1}|]; Y_j = 2\beta\tau^2 (\epsilon |u_j^n|^2 - |u_j^{n-1}|^2) + 2i\alpha\tau - 4 - 4s^2 - 2\tau^2\delta^2; Q = 2s^2 + \gamma s - i\alpha\tau s, H = 2s^2 - \gamma s + i\alpha\tau s$ . 令  $U^n = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ .

根据式 (9) 对应的所有网格点及方程 (1) 给出的初、边值条件, 得到如下形式的线性代数系统:

$$LU^{n+1} = MU^n + PU^{n-1},
\tag{10}$$

$$\text{其中, } L, M, P \text{ 为 } N \times N \text{ 阶矩阵: } L = \begin{pmatrix} D & E & \dots & 0 & F \\ F & D & E & \dots & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & F & D & E \\ E & 0 & \dots & F & D \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & M_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & M_N \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} Y_1 & Q & 0 & \dots & H \\ H & Y_2 & Q & & 0 \\ \vdots & & H & Y_{N-1} & Q \\ Q & 0 & \dots & H & Y_N \end{pmatrix}.$$

### 2 稳定性分析

下面讨论线性格式 (8)、(9) 的稳定性。令  $u_j^{n-1} = v_j^n$ , 式 (8) 也可写成如下的等价形式:

$$\begin{cases} Du_j^{n+1} + Eu_{j+1}^{n+1} + Fu_{j-1}^{n+1} = M_j u_j^n + Y_j v_j^n + Qu_{j+1}^{n-1} + Hu_{j-1}^{n-1}, \\ u_j^{n-1} = v_j^n. \end{cases}
\tag{11}$$

令  $\omega_j^n = (u_j^n, v_j^n)^T$ , 则式 (11) 变为如下形式:  $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \omega_j^{n+1} + \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \omega_{j+1}^{n+1} + \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \omega_{j-1}^{n+1} = \begin{pmatrix} M_j & Y_j \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega_j^n +$

$\begin{pmatrix} 0 & Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \omega_{j+1}^n + \begin{pmatrix} 0 & H \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \omega_{j-1}^n$ . 设  $\omega_j^n = \hat{\omega}^n(\xi) e^{i\xi h}$ , 代入上式得

$$\begin{pmatrix} A + B_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{\omega}_j^{n+1}(\xi) = \begin{pmatrix} M_j & 2\beta\tau^2 (\epsilon |u_j^n|^2 - |u_j^{n-1}|^2) - A + B_i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{\omega}_j^n(\xi),
\tag{12}$$

其中:  $A = -4s^2 \cos(\xi h) - 2s\alpha\tau \sin(\xi h) + 4 + 4s^2 + 2\tau^2\delta^2; B = 2s\gamma \sin(\xi h) + 2\alpha\tau$ .

令  $C = \max\{|u^{n+1}|, |u^n|, |u^{n-1}|\}$ , 式 (12) 等价地写为  $\hat{\omega}^{n+1} = G\hat{\omega}^n(\xi)$ , 其中增长矩阵  $G$  为:

$$G = \begin{pmatrix} [8 - 2\beta\tau^2(1 + \epsilon)C^2]/(A + B_i) & [2\beta\tau^2(\epsilon - 1)C^2 - A + B_i]/(A + B_i) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

设增长矩阵  $G$  的特征方程为  $\lambda^2 - b\lambda + c = 0$ , 其中  $b = [8 - 2\beta\tau^2(1 + \epsilon)C^2]/(A + B_i)$ ,  $c = -[2\beta\tau^2(\epsilon - 1)C^2 - A + B_i]/(A + B_i)$ .

根据 Fourier 稳定性分析方法, 要保证格式稳定, 需要满足  $|\lambda| \leq 1$ , 即  $|b| \leq 2, |c| \leq 1$ . 为满足上述条件, 只需满足以下条件即可

$$|[8 - 2\beta\tau^2(1 + \epsilon)C^2]/(A + B_i)| \leq 2, \tag{13}$$

即

$$[4 - \beta\tau^2(1 + \epsilon)C^2]^2 - B^2 \leq A^2. \tag{14}$$

式 (14) 是关于  $h$  的四次不等式, 得到  $h$  与  $\tau$  的关系是一个简单而运算复杂的过程。为方便起见, 考虑一种特殊情况:

设  $A = a_1 + b_1$ , 其中  $a_1 = -4s^2 \cos(\xi h) - 2s\alpha\tau \sin(\xi h)$ ,  $b_1 = 4 + 4s^2 + 2\tau^2\delta^2$ , 当  $a_1 = -b_1$  时, 式 (14) 右侧有最小值, 使不等式恒成立, 此时满足  $\sqrt{16s^4 + 4s^2\alpha^2\tau^2 \sin(\xi h + \varphi_0)} = 4 + 4s^2 + 2\tau^2\delta^2$ , 即  $4 + 4s^2 + 2\tau^2\delta^2 \leq \sqrt{16s^4 + 4s^2\alpha^2\tau^2}$ . 通过简单计算得, 步长  $h$  需满足下述条件

$$h \leq \sqrt{[\tau^2(\alpha^2\tau^2 - 8 - 4\delta^2\tau^2)]/(4 + 4\delta^2\tau^2 + \delta^4\tau^4)}. \tag{15}$$

**定理 1** 设  $u(x, t) \in C^4[0, T; H_{per}^2]$ , 在空间步长  $h$  与时间步长  $\tau$  满足式 (15) 时, 线性化格式 (8) 是稳定的。

类似于稳定性定理 1 的证明, 可类似得到如下的收敛性定理 2。

**定理 2** 设  $u(x, t) \in C^4[0, T; H_{per}^2]$ , 在空间步长和时间步长满足式 (15) 时, 格式 (8) 有以下的误差估计  $\|e\| \leq c(h^2 + \tau^2)$ 。

### 3 数值实验

设  $e_j^n = U_j^n - u_j^n, e(h, \tau) = \|e^n\|, \|e^n\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq N} |e_j^n|, \|e^n\|^2 = h \sum_{j=1}^N (e_j^n)^2, \text{Order } 2 = \log_2(\|e(2h, 2\tau)\|_2 / \|e(h, \tau)\|_2), \text{Order} = \log_2(\|e(2h, 2\tau)\|_\infty / \|e(h, \tau)\|_\infty)$ 。

取参数  $\alpha = \gamma = 1, \delta^2 = 1, \beta = 2$ , 考虑如下周期边界条件的具波动算子的非线性 Schrödinger 方程的初、边值问题:  $\begin{cases} u_t - u_{xx} + u_{ix} + i(u_t + u_x) + u + 2|u|^2u = 0, (x, t) \in [0, 2\pi] \times (0, 10], \\ u(x + 2\pi, t) = u(x, t), u(x, 0) = e^{ix}, u_t(x, 0) = ie^{ix}. \end{cases}$  其精

确行波解为  $u(x, t) = e^{i(x+t)}$ 。

由于在格式中有一个待定的参数  $\epsilon$ , 在数值模拟实验中需要先通过运算来确定小参数  $\epsilon$  的取值。取  $\tau = 0.01, h = 2\pi/100$ , 选取不同参数  $\epsilon$ , 运算结果见表 1。通过表 1 知, 在相同情况下, 当小参数  $\epsilon = 1$  时, 其  $\|\cdot\|_\infty$  及  $\|\cdot\|_2$  误差为最小, 故选择  $\epsilon = 1$ 。

为了检验该格式的有效性, 在小参数  $\epsilon = 1$  条件下, 取  $\tau = 0.01, h = 2\pi/100$ , 利用

计算格式 (8), 模拟了原方程的解。通过图 1 可以看出, 当  $t = 5, 10$  时, 数值解与精确解拟合较为理想, 不论数值解的实部还是虚部均较好地拟合了精确解的实部与虚部, 说明了该计算格是一个简单有

表 1 不同参数下的误差比较

Tab. 1 Error comparison in different parameters

$\epsilon$	$\ e^n\ _2$	$\ e^n\ _\infty$	$\epsilon$	$\ e^n\ _2$	$\ e^n\ _\infty$
0.1	0.765 3	0.096 6	0.9	0.096 2	0.012 1
0.2	0.679 5	0.085 7	1.0	0.015 6	0.002 0
0.3	0.594 4	0.075 0	1.1	0.065 2	0.008 2
0.5	0.425 8	0.053 7	1.2	0.144 9	0.018 3
0.7	0.259 8	0.032 8	1.4	0.302 6	0.038 2

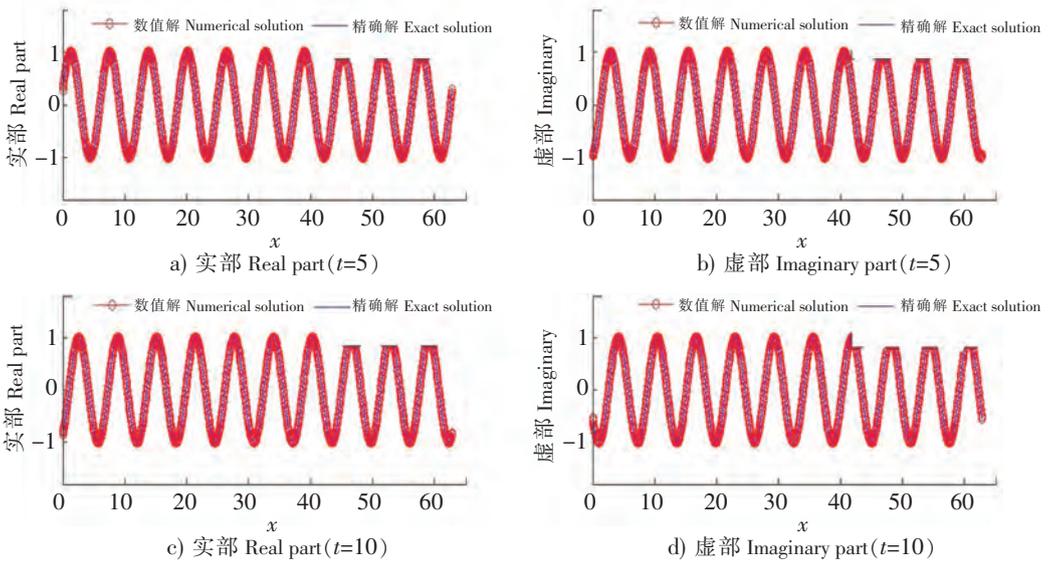


图 1 数值解与精确解实部与虚部拟合图像

Fig.1 The simulation of the numerical solutions and exact solutions

效的格式。为了验证格式的代数精度，表 2 给出了不同  $h$ 、 $\tau$  时  $\|e^n\|_2$ 、 $\|e^n\|_\infty$  的值及其收敛阶，从表 2 中可以得出其收敛阶是二阶，与理论分析完全一致。

与文献 [21 – 24] 相比，本文提供的格式是线性化格式，在相同精度要求下只需求解一个线性方程组，可以用显示的追赶迭代法求解，大大节省了运算时间，求解的复杂度明显降低，说明本文提出的格式是一种高效的、简单的稳定格式。

表 2 不同步长下的误差比较

Tab.2 Error comparison of different step sizes

$(h, \tau)$	$\ e^n\ _2$	Order 2	$\ e^n\ _\infty$	Order
$(2\pi/10, 1/10)$	1.541 2	—	0.194 4	—
$(2\pi/20, 1/20)$	0.389 4	1.98	0.049 1	1.98
$(2\pi/40, 1/40)$	0.097 4	1.99	0.012 3	1.99
$(2\pi/80, 1/80)$	0.024 3	2.00	0.003 1	1.98

### 4 结论

本文在“蛙跳”格式的基础上，通过对非线性部分进行处理，将原来的全隐格式转化为线性化格式，得到了一个带小参数的修正的线性化格式，并证明了其收敛性与稳定性。通过数值算例，验证了该结果的可信性和有效性。此格式最大的优势是将原全隐格式需求解一个非线性方程组的问题转化为只需求解一个线性方程组，大大简化了运算，提高了计算效率。此外，新方案与文献 [11] 中的方案进行比较，无论是在计算时间还是模误差，本文构造的带小参数的线性化格式远远优于文献 [11]，计算效率明显提高，是一种简单易行、有效快捷的数值方法。

### [ 参 考 文 献 ]

[1] MATSUUCHI K. Nonlinear interactions of counter-travelling waves [J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1980, 48(5): 1746-1754, DOI:10.1143/JPSJ.48.1746.

[2] 郭柏灵. 具波动算子的一类多维非线性 Schrödinger 方程组的初、边值问题 [J]. 中国科学 (A 辑), 1983, 26(2): 134-146.

[3] 郭柏灵, 梁华湘. 具波动算子的一类非线性 Schrödinger 方程组的数值计算问题 [J]. 数值计算与计算机应用, 1983, 4(3): 176-182.

[4] 梁宗旗, 鲁百年. 具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程的拟谱方法 [J]. 高等学校计算数学学报, 1999, 9(3): 201-211.

- [5] 梁宗旗, 张法勇. 具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程的有限差分方法 [J]. 黑龙江大学学报 (自然科学版), 1998(1): 1-4.
- [6] 梁宗旗. 具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程的谱方法 [J]. 陕西师范大学学报 (自然科学版), 2002, 16(2): 9-15.
- [7] ZHANG L M, CHANG Q S. A conservative numerical scheme for a class of nonlinear Schrödinger equation with wave operator [J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 145(2): 603-612. DOI:10.1016/S0096-3003(02)0084-1.
- [8] WANG T C, ZHANG L M. Analysis of some new conservative schemes for nonlinear Schrödinger equation with wave operator [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 182(2): 1780-1794. DOI:10.1016/j.amc.2006.06.015.
- [9] 张鲁明, 李祥贵. 一类带波动算子的非线性 Schrödinger 方程的一个守恒差分格式 [J]. 数学物理学报, 2002, 22A(2): 258-263.
- [10] 胡汉章, 谢水连. 一类带波动算子的非线性 Schrödinger 方程的高精度守恒差分格式 [J]. 高校应用数学学报, 2014, 29(1): 36-44. DOI:10.13299/j.cnki.amjcu.001796.
- [11] LI G, YAN X. Energy conserving local discontinuous galerkin methods for the nonlinear Schrödinger equation with wave operator [J]. Journal of Scientific Computing, 2015, 65(2): 622-647. DOI:10.1007/s10915-014-9977-z.
- [12] WANG J. Multi-symplectic fourier pseudospectral method for the nonlinear Schrödinger equation with wave operator [J]. Journal of Computational Mathematics, 2007, 25(1): 31-48. DOI:10.1016/j.cpc.2010.03.009.
- [13] JI B Q, ZHANG L M. An exponential wave integrator Fourier pseudospectral method for the nonlinear Schrödinger equation with wave operator [J]. Journal of Applied Mathematics Computing, 2018(58): 273-288, DOI:10.1007/s12190-017-1144-x.
- [14] KONG L H, WAN L, YIN X L, et al. Conservative properties analysis of multi-symplectic integrator for the Schrödinger equation with wave operator [J]. Numerical Analysis and Applied Mathematics, 2012, 1479(1): 1283-1286, DOI:10.1063/1.4756389.
- [15] WANG L, KONG L H, ZHANG L Y, et al. Multi-symplectic preserving integrator for the Schrödinger equation with wave operator [J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(22): 6817-6829, DOI:10.1016/j.apm.2015.01.068.
- [16] 林成龙, 梁宗旗. 具波动算子非线性 Schrödinger 方程的行波解的稳定性 [J]. 集美大学学报 (自然科学版), 2016, 21(6): 466-470.
- [17] 游叔军, 尚亚东. 具波动算子的非线性 Schrödinger 方程的显式精确解 [J]. 广州大学学报 (自然科学版), 2005, 4(6): 475-481.
- [18] 林成龙, 梁宗旗. 一类具有波动算子非线性 Schrödinger 方程的新多级包络周期解 [J]. 高校应用数学学报, 2018, 33(2): 211-222.
- [19] ZHAO X F. A combination of multiscale time integrator and two-scale formulation for the nonlinear Schrödinger equation with wave operator [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2017, 326: 320-336, DOI:10.1016/j.cam.2017.06.006.
- [20] BRUGNANO L G, ZHANG C J, LI D F. A class of energy-conserving Hamiltonian boundary value methods for nonlinear Schrödinger equation with wave operator [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018, 60: 33-49, DOI:10.1016/j.cnsns.2017.12.018.
- [21] LI X, ZHANG L M, ZHANG T. A new numerical scheme for the nonlinear Schrödinger equation with wave operator [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2017, 54(1/2): 109-125, DOI:10.1007/s12190-016-1000-4.
- [22] CHENG X J, WU F Y. Several conservative compact schemes for a class of nonlinear Schrödinger equations with wave operator [J]. Boundary Value Problems, 2018(1): 1-17. DOI:10.1186/s13661-018-0956-4.
- [23] ZHANG R P, YU X J, LI M J, et al. A conservative local discontinuous Galerkin method for the solution of nonlinear Schrödinger equation in two dimensions [J]. Science China (Mathematics), 2017, 60(12): 2515-2530.
- [24] DU R L, YAN Y B, LIANG Z Q. A high-order scheme to approximate the Caputo fractional derivative and its application to solve the fractional diffusion wave equation [J]. Journal of Computational Physics, 2018, 376(2019): 1312-1330, DOI:10.1016/j.jcp.2018.10.011.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)