

# 基于开关周期性耦合的混沌系统量化同步

陈 跃, 黄振坤, 宾红华, 陈 娟

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 应用比较定理和 Lyapunov 稳定性理论, 通过设计开关周期性静态对数量化控制器以及平均时间耦合强度, 实现混沌系统的完全同步。给出的充分条件推广和补充已有文献的结果, 同时揭示量化效应及平均时间耦合强度与系统同步的内在规律。最后, 仿真实例验证了分析结果的可行性。

[关键词] 混沌系统; 开关周期性耦合; 量化同步; 耦合强度

[中图分类号] O 193

## Quantized Synchronization of Chaotic Systems Based on On-off Periodic Coupling

CHEN Yue, HUANG Zhenkun, BIN Honghua, CHEN Juan

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** Based on the comparison theorem and Lyapunov stability theory, the complete synchronization of two chaotic systems was investigated by designing the on-off periodic coupling and static logarithmic controller. The obtained sufficient conditions extend and complement existing results in the literature. Meanwhile, inherent law between synchronization, quantized effects and average time coupling strength was revealed. Finally, the feasibility of the analysis results was verified by numerical simulations.

**Keywords:** chaotic system; on-off periodic coupling; quantized synchronization; average time coupling strength

## 0 引言

基于文献 [1] 的工作, 混沌系统的同步被广泛应用到各个领域, 如生态系统、信息处理、信息安全等领域<sup>[2-4]</sup>。混沌系统控制是一个具有挑战性的课题, 近几年来学者们对其提出了很多富有成效的控制方法, 比如最优控制<sup>[5]</sup>、自适应控制<sup>[6]</sup>、有限时间控制<sup>[7]</sup>、滑模控制<sup>[8]</sup>等。

目前大多数研究都是考虑两个相同或者相似连续耦合混沌系统的同步现象<sup>[9]</sup>。基于 Lyapunov 稳定性理论, 文献 [10] 提出了一种新的滑模方案来控制受到不确定因素和外部干扰的非线性混沌系统。在实际应用中, 系统之间的耦合连接有时会断开<sup>[11]</sup>, 系统之间的耦合可能是间歇性的, 这在一定程度上可以描述为间歇性耦合。因此将研究范围由连续耦合的混沌系统扩展到不连续耦合的混沌系统是有必要的。对控制系统的量化研究一直受到人们的重视, 并产生了很多有意义的成果<sup>[12]</sup>。一些学者发现量化作用对混沌控制系统的影响要比对传统的控制系统的影响大得多。然而到目前为止, 这

[收稿日期] 2018-09-20

[基金项目] 国家自然科学基金项目 (61573005); 福建省自然科学基金项目 (2018J01417)

[作者简介] 陈跃 (1992—), 男, 硕士生, 从事复杂网络分析与控制研究。通信作者: 黄振坤 (1977—), 男, 教授, 硕导, 从事复杂网络分析与控制研究。E-mail: hzk974226@jmu.edu.cn

<http://xuebaobangong.jmu.edu.cn/zkb>

方面的研究还没有引起足够的重视。

从最近的研究来看, Lyapunov 稳定性理论是讨论两个不连续耦合的混沌系统最常用的工具<sup>[13]</sup>。根据这个理论给一些充分条件可以实现两个耦合混沌系统的同步。但是那些条件对于不连续耦合的混沌系统却是无效的。文献 [14] 研究了两个不连续耦合混沌系统的同步问题, 具有量化效应的两个不连续耦合混沌系统的同步课题值得进一步探索。基于常微分的稳定性理论和比较定理, 本文建立一些新的充分条件, 揭示具有量化效应控制器与系统同步及平均时间耦合强度的依赖性, 表明在耦合强度较小的情况下也能实现系统的完全同步。

## 1 预备知识

设混沌系统为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$  是系统的状态向量;  $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  是连续可微的非线性向量函数。

要实现系统的同步, 含开关周期性静态对数量化控制器的响应系统为:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) + \mathbf{u}(t), \quad (2)$$

其中  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$  是响应系统的状态向量。

控制器  $\mathbf{u}(t)$  设计为:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{q}(\mathbf{v}(t)), \quad (3)$$

$$\mathbf{v}(t) = -\mathbf{k}(t)\mathbf{e}(t). \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)$  是驱动混沌系统与响应系统之间的同步误差;  $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ 。量化函数<sup>[15]</sup>  $\mathbf{q}(\cdot): \mathbf{R}^n \rightarrow D$  是分段常值向量函数,  $D$  是  $\mathbf{R}^n$  中的有限子集, 即把  $\mathbf{R}^n$  划分成有限个形如  $\{z \in \mathbf{R}^n: \mathbf{q}(z) = i, i \in D\}$  的量化区域, 这里采用静态对数量化器:

$$\mathbf{q}(v) = \begin{cases} w_i, w_i/(1+\eta) < v < w_i/(1-\eta), v > 0, \\ 0, v = 0, \\ -\mathbf{q}(-v), v < 0, \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $\eta = (1-\rho)/(1+\rho)$ ,  $w_i$  构成  $\mathbf{q}$  量化水平集  $S = \{\pm w_i, w_i = \rho^i w_0, i = 0, \pm 1, \dots\} \cup \{\pm w_0\} \cup \{0\}$ ,  $0 < \rho < 1, w_0 > 0$ 。

在文献 [15] 中, 定义  $\eta_q = \limsup(\#g[\epsilon])/(-\ln \epsilon)$  为量化器  $\mathbf{q}(\cdot)$  的量化密度, 其中  $\#g[\epsilon]$  为上式中的量化级数在区间  $[\epsilon, 1/\epsilon]$  内的数量。量化密度  $\eta_q$  随着区间  $[\epsilon, 1/\epsilon]$  的增长呈对数形式增长。当量化级数有限时, 从  $\eta_q$  的定义可以得到  $\eta_q = 0$ 。当  $\eta_q$  比较小时, 量化级数也比较少, 此时量化器也比较“粗糙”。因此在下面的讨论中, 称  $\rho$  为量化器  $\mathbf{q}(\cdot)$  的量化密度。

对此类量化器, 显然有  $\mathbf{q}(v) = (\mathbf{I} + \Delta)\mathbf{v}$ , 其中  $\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 量化同步误差  $\Delta_i \in [-\eta, \eta] (i = 1, 2, \dots, n)$  且

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta_n \end{bmatrix}. \quad (6)$$

选取一个开关周期性的耦合强度  $\mathbf{k}(t)$  <sup>[16]</sup>:

$$\mathbf{k}(t) = \begin{cases} \mathbf{k}, & nT \leq t < (n+\theta)T, \\ 0, & (n+\theta)T \leq t < (n+1)T. \end{cases} \quad (7)$$

其中:  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\mathbf{k}$  是正常数;  $T$  是开关周期;  $\theta (0 < \theta < 1)$  是开关率。显然, 当  $0 < \theta < 1$  时, 式 (3) 是不连续耦合; 当  $\theta = 1$  时, 式 (3) 是连续耦合的。

下面给出混沌系统同步所用到的假设。

**假设 1** 对于函数  $f(x)$ , 存在一个正常数  $l$ , 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq l|x - y|, \forall x, y \in \mathbf{R}^n. \quad (8)$$

注 1 条件 (8) 通常被称为全局 Lipschitz 条件,  $l$  是 Lipschitz 常数。容易知道一些著名的混沌系统都能满足假设 1, 例如 Chua's circuit<sup>[17]</sup>、Rossler-like system<sup>[18]</sup>、Genesio system<sup>[19]</sup> 等。

定义 1 对于混沌系统 (1) 和 (2) 的初始值  $x(0), y(0)$ , 如果下面的条件成立,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0, \quad (9)$$

则这两个系统能够实现完全同步。

引理 1 (比较定理)<sup>[20]</sup> 设  $E$  是  $\mathbf{R}^2$  上开集,  $g \in C[E, \mathbf{R}]$ , 假设以下初值问题的解存在, 且解的最大存在区间为  $[t_0, t_0 + h]$ ,

$$dx/dt = g(t, x), x(t_0) = x_0. \quad (10)$$

设  $u(t) \in C[(t_0, t_0 + h), \mathbf{R}]$ ,  $t \in [t_0, t_0 + h]$  时, 有  $(t, u(t)) \in E$ ,  $u(t_0) \leq x_0$ , 且

$$Du(t) \leq g(t, u(t)), t \in [t_0, t_0 + h]. \quad (11)$$

其中  $Du(t)$  为固定的 Dini 导数, 则

$$u(t) \leq x(t), t \in [t_0, t_0 + h]. \quad (12)$$

## 2 主要结果

定理 1 系统 (1) 和 (2) 在控制器 (3) 的作用下能够实现同步, 如果假设 1 成立且设计控制器耦合强度  $k(\cdot)$  和量化信号误差范围  $\Delta$  满足

$$\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)\bar{k}(t) > l, \quad (13)$$

其中平均时间耦合强度  $\bar{k}(t) = (1/T) \int_0^T k(s) ds$ 。

证明 对误差系统求导

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\mathbf{y}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) = f(y(t)) - f(x(t)) + u(t) = f(y(t)) - f(x(t)) + q(v(t)) = \\ &= f(y(t)) - f(x(t)) - (\mathbf{I} + \Delta)k(t)\mathbf{e}(t). \end{aligned} \quad (14)$$

满足假设 1 的情况下, 对于任意的初值  $\mathbf{e}(0) = y(0) - x(0)$ , 方程 (14) 有唯一全局渐进稳定解  $\mathbf{e}(t, \mathbf{e}(0))$ ,  $\mathbf{e}(t, 0) \equiv 0$  是系统 (14) 的常数解。如果这个初始解是全局渐进稳定的, 那么对于每一个初始值, 系统 (1) 和 (2) 能够实现完全同步。

构造 Lyapunov 函数  $V(t) = \mathbf{e}^T(t)\mathbf{e}(t)/2$ 。两边求导, 结合式 (14) 和假设 1 得

$$\begin{aligned} dV(t)/dt &= \mathbf{e}^T(t)\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{e}^T(t)[f(y(t)) - f(x(t))] - \mathbf{e}^T(t)(\mathbf{I} + \Delta)k(t)\mathbf{e}(t) \leq \\ &= \mathbf{e}^T(t)l|y(t) - x(t)| - \mathbf{e}^T(t)(\mathbf{I} + \Delta)k(t)\mathbf{e}(t) = l\mathbf{e}^T(t)|\mathbf{e}(t)| - \mathbf{e}^T(t)(\mathbf{I} + \Delta)k(t)\mathbf{e}(t) \leq \\ &= l|\mathbf{e}^T(t)\mathbf{e}(t)| - \lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k(t)|\mathbf{e}^T(t)\mathbf{e}(t)| = -2[\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k(t) - l]V(t), \end{aligned} \quad (15)$$

由于  $k(t)$  是间歇性的, 按区间  $[nT, (n + \theta)T)$  和  $[(n + \theta)T, (n + 1)T)$  依次分段应用引理 1, 有

$$V(t) \leq \Gamma(t), \quad (16)$$

其中  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\Gamma(t)$  是

$$d\Gamma(t)/dt = -2[\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k(t) - l]\Gamma(t) \quad (17)$$

满足初始值  $\Gamma(0) = V(0)$  的解, 可以证明  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(t) = 0$ , 则能得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ , 进而能达到  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0$ 。接下来, 将证明方程 (17) 的零解是全局指数稳定的。

由式 (17) 得

$$\Gamma(t) = \Gamma(0) \exp \left\{ -2 \int_0^t [\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k(s) - l] ds \right\}, \quad (18)$$

显然,  $t$  在  $[0, \infty)$  上存在正整数  $m$ , 使得  $t \in [mT, (m + 1)T)$ 。设  $t = mT + t_1$  ( $0 \leq t_1 < T$ ), 则有

$$\Gamma(t) = \Gamma(0) \exp \left\{ -2 \int_0^{mT} [\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k(s) - l] ds \right\} \times \exp \left\{ -2 \int_{mT}^t [\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k(s) - l] ds \right\} =$$

$$\Gamma(0) \exp\left\{-2 \int_0^{mT} [\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k(s) - l] ds\right\} \times \exp\left\{-2 \int_{mT}^{mT+t_1} [\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k(s) - l] ds\right\}, \quad (19)$$

根据  $k(t)$  的定义, 得

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \Gamma(0) \exp\left\{-2m \int_0^T [\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k(s) - l] ds\right\} \times \exp\left\{-2 \int_{mT}^{mT+t_1} [\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k(s) - l] ds\right\} = \\ &\Gamma(0) \exp\left\{-2m \left[\int_0^{\theta T} [\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k(s) - l] ds\right] + \int_{\theta T}^T (-l) ds\right\} \times \exp\left\{-2 \int_0^{t_1} [\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k(s) - l] ds\right\}, \quad (20) \end{aligned}$$

由式 (20), 有

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &\leq \Gamma(0) \exp\left\{-2m \left[\int_0^{\theta T} [\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k(s) - l] ds\right] - l(1 - \theta)T\right\} \times \exp\left[-2 \int_0^{t_1} (-l) ds\right] = \\ &\Gamma(0) \exp\left\{-2mT[(\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k - l)\theta - l(1 - \theta)] + 2lt_1\right\} = \\ &\Gamma(0) \exp[-2mT(\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k\theta - l) + 2lt_1], \quad (21) \end{aligned}$$

注意到  $mT = t - t_1$ , 那么

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &\leq \Gamma(0) \exp[-2(t - t_1)(\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k\theta - l) + 2lt_1] = \\ &\Gamma(0) \exp[-2t(\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k\theta - l)] \exp(2\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k\theta t_1), \quad (22) \end{aligned}$$

故

$$\|\Gamma(t)\| \leq M \exp[-2t(\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k\theta - l)], \quad (23)$$

其中  $M = \Gamma(0) \exp(2\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k\theta t_1)$ 。由  $k(t)$  的定义, 有  $\bar{k}(t) = \int_0^T k(s) ds / T = \int_0^{\theta T} k ds / T = k\theta$ 。最终得到

$$\|\Gamma(t)\| \leq M \exp[-2t(\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)\bar{k}(t) - l)]. \quad (24)$$

因此, 如果满足式 (13), 则方程 (17) 的零解是全局指数稳定的, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(t) = 0$ , 则能得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ , 进而能达到  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 。这就意味着对于每个已知的初值, 系统 (1) 和系统 (2) 是完全同步的, 证毕。

**注2** 文献 [14] 研究误差系统 (14) 的稳定性, 得到稳定条件是  $\bar{k}(t) > l$ 。本文引入量化控制, 满足新的条件  $\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)\bar{k}(t) > l$  情况下系统完全同步, 该研究是对已有文献的推广和改进, 同时研究结果揭示, 定理 1 中的充分条件相相比于任意的  $t \in [t_0, \infty)$  都要满足  $\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)k(t) > l$  的条件而言放松了所受的限制。

### 3 仿真实例

考虑 Rössler-like 系统作为例子, 它是一个三维的常微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha\vartheta x_1 - \alpha\beta x_2 - \alpha\lambda x_3, \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + \alpha\gamma x_2, \\ \dot{x}_3 = -\alpha\mu x_3 + \alpha\mu\psi(x_1), \end{cases} \quad (25)$$

它的响应系统是:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\alpha\vartheta y_1 - \alpha\beta y_2 - \alpha\lambda y_3 + u_1(t), \\ \dot{y}_2 = \alpha y_1 + \alpha\gamma y_2 + u_2(t), \\ \dot{y}_3 = -\alpha\mu y_3 + \alpha\mu\psi(y_1) + u_3(t), \end{cases} \quad (26)$$

由式 (6) 和方程 (14) 知

$$\mathbf{I} + \Delta = \begin{bmatrix} 1 + \Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \Delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \Delta_3 \end{bmatrix},$$

即  $u_1(t) = -(1 + \Delta_1)k(t)e_1(t)$ ,  $u_2(t) = -(1 + \Delta_2)k(t)e_2(t)$ ,  $u_3(t) = -(1 + \Delta_3)k(t)e_3(t)$ ,

$$\psi(s) = \begin{cases} 0, & s < 2.56, \\ \xi(s - 2.56), & s \geq 2.56. \end{cases} \quad (27)$$

当  $\alpha = 0.03$ ,  $\beta = 1.5$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $\mu = 1.5$ ,  $\lambda = 0.75$ ,  $\xi = 21.43$ ,  $\vartheta = 0.075$  时, Rössler-like 系统 (25) 有混沌吸引子, 如图 1。

显然, 当  $l = 0.4926$  时, Rössler-like 系统满足 Lipschitz 条件。

在本例中, 令控制周期  $T = 0.04$ ,  $k = 3$ ,  $\theta = 0.2$ , 则有  $\bar{k}(t) = 0.6$ 。设计量化器 (5) 使得量化密度  $\rho = 9/11$ ,  $\eta = 0.1$ , 则有  $\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta) \in [0.9, 1.1]$ 。验证定理 1, 容易计算满足条件  $\lambda_{\min}(\mathbf{I} + \Delta)\bar{k}(t) > l$ , 由定理 1 可知, 两个混沌系统能够达到完全同步。为了观察仿真效果, 进行数值模拟, 图 2 是同步误差  $e_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 的仿真结果, 图 3 是整体同步误差  $E(t) = \|e(t)\|$  的仿真结果。

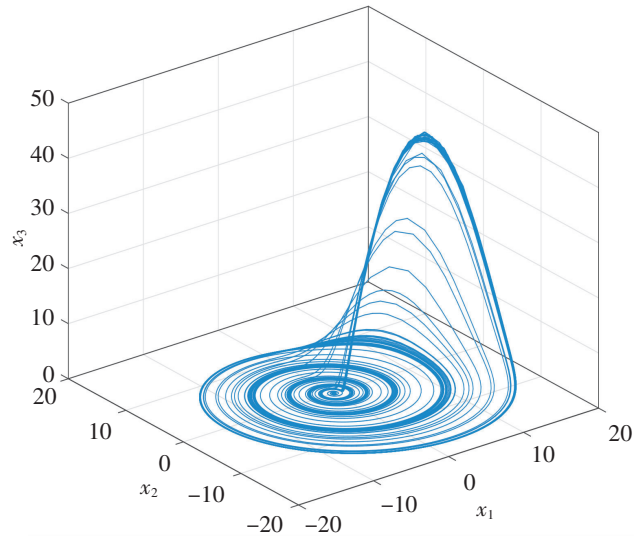


图 1 Rössler-like 系统 (25) 有混沌吸引子

Fig.1 Chaotic attractor generated by the Rössler-like system (25)

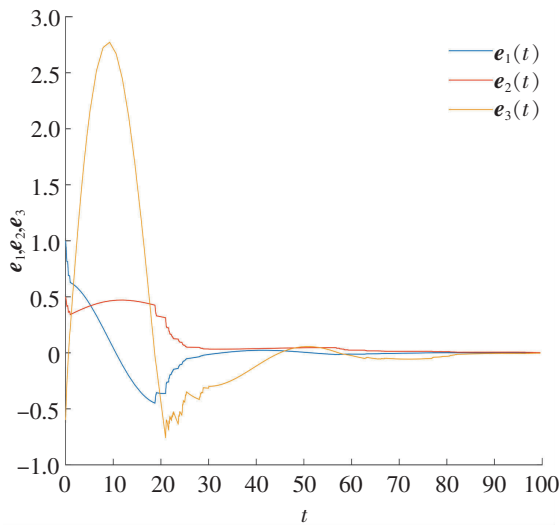


图 2 同步误差  $e_i(t)$  ( $i=1,2,3$ )

Fig.2 Synchronization error  $e_i(t)$  ( $i=1,2,3$ )

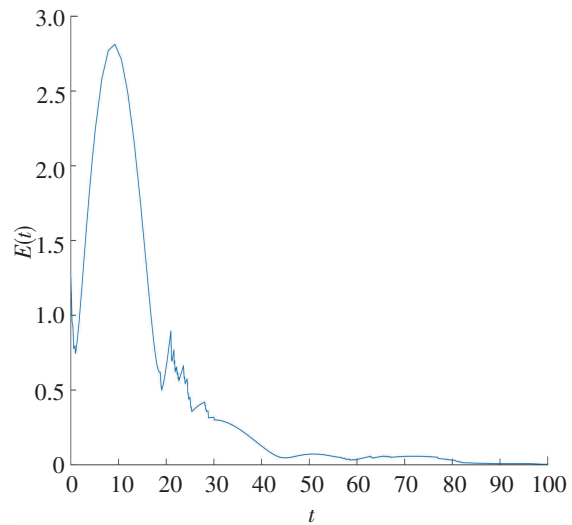


图 3 整体同步误差  $E(t)$

Fig.3 Global synchronization error  $E(t)$

## 4 结论

本文利用 Lyapunov 稳定性理论和比较定理, 分析了基于量化控制的开关周期性耦合混沌系统的同步动力学, 给出了不含时滞下混沌系统同步化准则, 揭示具有量化效应控制器与系统同步、平均时间耦合强度的依赖性, 表明在耦合强度较小的情况下也能实现系统的完全同步, 本文的结果是对现有文献 [14] 结果的拓展, 仿真例子验证了结果的可行性。

## [ 参考文献 ]

- [1] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems [J]. Physical Review Letters, 1996, 64(8): 821-824. DOI:10.1103/PhysRevLett.64.821.

- [2] WEI G W, ZHAN M, LAI C H. Tailoring wavelets for chaos control [J]. *Physical Review Letters*, 2002, 89(28): 284103(1-4). DOI:10.1103/PhysRevLett.89.284103.
- [3] BOCCALETTI S, GREBOGI C, LAI Y, et al. The control of chaos: theory and applications [J]. *Physics Reports*, 2000, 329(3): 103-197. DOI:10.1016/S0370-1573(99)00096-4.
- [4] BOCCALETTI S, KURTHS J, OSIPOV G V, et al. The synchronization of chaotic systems [J]. *Physics Reports*, 2002, 366(1/2): 1-101. DOI:10.1016/S0370-1573(02)00137-0.
- [5] CHENG S, JI J, ZHOU J. Fast synchronization of directionally coupled chaotic systems [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37(1/2): 127-136. DOI:10.1016/j.apm.2012.02.018.
- [6] LIN J S, YAN J J. Adaptive synchronization for two identical generalized Lorenz chaotic systems via a single controller [J]. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, 2009, 10(2): 1151-1159. DOI:10.1016/j.nonrwa.2007.12.005.
- [7] AGHABABA M P, KHANMOHAMMADI S, ALIZADEH G. Finite time synchronization of two different chaotic systems with unknown parameters via sliding mode technique [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, 35(6): 3080-3091. DOI:10.1016/j.apm.2010.12.020.
- [8] CHEN D Y, ZHANG R F, MA X Y, et al. Chaotic synchronization and anti-synchronization for a novel class of multiple chaotic systems via a sliding mode control scheme [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2011, 69(1/2): 35-55. DOI:10.1007/s11071-011-0244-7.
- [9] SUN Y Z, RUAN J. Synchronization in coupled time-delayed systems with parameter mismatch and noise perturbation [J]. *Chaos An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2009, 19(4): 821. DOI:10.1063/1.3262488.
- [10] ROOPAEI M, SAHRAEI B R, LIN T. Adaptive sliding mode control in a novel class of chaotic systems [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15(12): 4158-4170. DOI:10.1016/j.cnsns.2010.02.017.
- [11] SUN Y Z, WANG L, ZHAO D H. Outer synchronization between two complex dynamical networks with discontinuous coupling [J]. *Chaos An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2012, 22(4): 043125. DOI:10.1063/1.4768661.
- [12] MONTESTRUQUE L A, ANTSAKLIS P J. Static and dynamic quantization in model-based networked control systems [J]. *International Journal of Control*, 2007, 80(1): 87-101. DOI:10.1080/00207170600931663.
- [13] SHI X R, WANG Z L. The alternating between complete synchronization and hybrid synchronization of hyperchaotic Lorenz system with time delay [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69(3): 1177-1190. DOI:10.1007/s11071-012-0339-9.
- [14] SHI H J, SUN Y Z, ZHAO D H. Synchronization of chaotic systems with on-off periodic coupling [J]. *Physica Scripta*, 2013, 88(4): 045003. DOI:10.1088/0031-8949/88/04/045003.
- [15] FU M Y, XIE L H. The sector bound approach to quantized feedback control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1698-1711. DOI:10.1109/TAC.2005.858689.
- [16] CHEN L, QIU C, HUANG H B, et al. Facilitated synchronization of complex networks through a discontinuous coupling strategy [J]. *The European Physical Journal B*, 2010, 76(4): 625-635. DOI:10.1140/epjb/e2010-00211-6.
- [17] CHUA L O, WU C W, HUANG A S, et al. A universal circuit for studying and generating chaos I: routes to chaos [J]. *IEEE Transactions on Circuits Systems I Fundamental Theory Applications*, 1993, 40(10): 745-761. DOI:10.1109/81.246149.
- [18] HEISLER I A, BRAUN T, ZHANG Y, et al. Experimental investigation of partial synchronization in coupled chaotic oscillators [J]. *Chaos An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2003, 13(1): 185. DOI:10.1063/1.1505811.
- [19] GENESIO R, TESI A. Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems [J]. *Automatica*, 1992, 28(3): 531-548. DOI:10.1016/0005-1098(92)90177-H.
- [20] WALTER R N W. *Differential and integral inequalities* [M]. Berlin Heidelberg: Springer, 1970.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)