[文章编号] 1007－7405(2020)05－0376－03　　DOI:10.19715/j.jmuzr.2020.05.09

ε－变分不等式及其对偶性

黄龙光

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 利用 ε－次微分和凸函数的共轭函数，讨论 Banach 空间带集值映射的 ε－变分不等式及其对偶性，给出无约束条件下凸优化问题的 ε－最优解、ε－变分不等式及其对偶问题解之间的若干特征刻画。

[关键词] ε－变分不等式；ε－次微分；对偶问题；ε－最优解

[中图分类号] O 221.2

ε-Variational Inequality and Its Duality

HUANG Longguang

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The ε-variational inequality with set-valued mapping and its duality were discussed by the ε-subdifferential and conjugate function of convex function in Banach space. Some characteristic relationships for solutions of problems discussing among ε-optimal solutions of convex optimization problems with non-constraint condition, ε-variational inequality and its duality were presented.

Keywords: ε-variational inequality; ε-subdifferential; dual problem; ε-optimal solution

0　引言

从计算和算法的角度看，许多实际问题中的非线性最优化问题难以求其精确的最优解。为此，人们通常寻求一种近似的方法，通过迭代逼近等方法求其最优解的近似解[1-3]，于是自然地激发起人们寻找有关 ε－最优解问题的兴趣。同样地，工程技术等实际领域中的许多问题也无需寻求精确解的必要，它们仅需寻求满足一定精度要求的近似解即可。在理论和应用方面，尽管许多的精确解难以获得或给出，但有时往往可通过研究近似的 ε－最优解或对偶问题的某种性质及其收敛性而获得精确的最优解的许多特征。因此，研究 ε－变分不等式问题及其对偶问题解的有关性质在理论和实际应用中都有重要的意义。几种常规的多目标向量优化问题的 ε－最优解的存在性、ε－最优性条件和 ε－对偶性等问题得到了广泛研究[4-5]。本文利用 ε－次微分和凸函数的共轭函数讨论 Banach 空间带集值映射的 ε－变分不等式及其对偶性，给出无约束条件下凸优化问题的 ε－最优解、ε－变分不等式及其对偶问题解之间的若干特征关系。

1　基本概念与性质

以下总设 X 与 Y 是实自反 Banach 空间，X^* 与 Y^* 分别是 X 与 Y 的共轭空间，$F:X\to 2^{X^*}$ 是集值映

[收稿日期] 2019－07－03
[基金项目] 国家自然科学基金项目（11461044，11961047）
[作者简介] 黄龙光（1961—），男，教授，博士，从事非线性分析与最优化理论研究，E-mail:hlgsj@163.com。

射，$f: Y \to R \cup \{+\infty\}$ 与 $g: X \to R \cup \{+\infty\}$ 都是真下半连续的凸函数，$A: X \to Y$ 是连续线性算子。

设 $x \in y$，对 $\varepsilon \geqslant 0$，称 $\partial_\varepsilon f(x) = \{v \in Y^*: f(y) - f(x) \geqslant \langle v, y - x \rangle - \varepsilon, \forall y \in Y\}$ 为 f 在点 x 处的 ε – 次微分（其中 $\langle v, y - x \rangle$ 表示连续线性泛函 v 在点 $y - x$ 的值）。

若存在 $z \in X$，使 $Az \in \mathrm{ridom}(f)$（其中 $\mathrm{ridom}(f)$ 是 $\mathrm{dom}(f)$ 的相对内部[6]），由文献［6－7］有：$\partial_\varepsilon(f \circ A)(x) = A^* \partial_\varepsilon f(Ax)$，$\forall x \in X, Ax \in \mathrm{dom}(f)$，$\bar{x} \in \partial_\varepsilon f(y) \Leftrightarrow y \in \partial_\varepsilon f^*(\bar{x})$，$\forall y \in \mathrm{dom}(f)$，$\forall \bar{x} \in \mathrm{dom}(f^*)$，其中 A^* 为 A 的共轭算子，f^* 是 f 的共轭函数。

$\forall \varepsilon \geqslant 0$，本文考虑如下 ε – 变分不等式问题：

$(\mathrm{VI})_\varepsilon$ 找 $x_0 \in X$，使得存在 $v \in F(x_0)$ 满足

$$\langle v, x - x_0 \rangle \geqslant f(Ax_0) - f(Ax) - \varepsilon, \forall x \in X \tag{1}$$

及其 $(\mathrm{VI})_\varepsilon$ 的对偶变分不等式。

$(\mathrm{DVI})_\varepsilon$ 找 $y_0 \in Y$，使得存在 $u \in AF^{-1}(-A^* y_0)$ 满足

$$\langle u, y - y_0 \rangle \geqslant f^*(y) - f^*(y_0) + \varepsilon, \forall y \in Y。 \tag{2}$$

由 f 的下半连续性、集值映射的有界性和闭性，可得定理 1。

定理 1　设 x_n 是问题 $(\mathrm{VI})_{\varepsilon_n}$（$\forall n \in N^+$）的解（即存在 $v_n \in F(x_n)$，使得 $\langle v_n, x - x_n \rangle \geqslant f(Ax_n) - f(Ax_n) - \varepsilon_n, \forall x \in X$）且 $\varepsilon_n \downarrow 0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，若集值映射 F 在 x_0 是闭的和有界的，则 x_0 是下列变分不等式问题 (VI) 的解，即：(VI) 找 $x_0 \in X$，使得存在 $v \in F(x_0)$ 满足 $\langle v, x - x_0 \rangle \geqslant f(Ax_0) - f(Ax)$，$\forall x \in X$。

证明　由条件，存在 $v_n \in F(x_n)$，使

$$\langle v_n, x - x_n \rangle \geqslant f(Ax_n) - f(Ax) - \varepsilon_n, \forall x \in X, n \in N^+。 \tag{3}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$、$F$ 在 x_0 的闭性和有界性知 $\{v_n\}$ 含有有界的子列，而自反 Banach 空间的有界闭集是弱 * 紧的，因此 $\{v_n\}$ 含有弱 * 收敛的子列，不妨设（弱 *）$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$。于是由 A 的线性连续性和 f 的下半连续凸性，在式（3）中令 $n \to \infty$，得 $\langle v, x - x_0 \rangle \geqslant f(Ax_0) - f(Ax), \forall x \in X$。

2　ε – 变分不等式及其对偶性的特征

定理 2　设 $z \in X$ 使 $Az \in \mathrm{ridom}(f)$，则下列命题成立：ⅰ）若 x_0 是 $(\mathrm{VI})_\varepsilon$ 的解且 $v \in F(x_0)$ 满足式（1），那么 $\forall u \in \partial_\varepsilon f(Ax_0) \cap (A^*)^{-1}(-v)$，$u$ 是 $(\mathrm{DVI})_\varepsilon$ 的解且 $Ax_0 \in AF^{-1}(-A^* u)$ 并有 Ax_0 满足式（2）；ⅱ）若 $y_0 \in Y$ 是 $(\mathrm{DVI})_\varepsilon$ 的解且 $w \in AF^{-1}(-A^* y_0)$ 满足式（2），那么 $\forall \alpha \in F^{-1}(-A^* y_0) \cap A^{-1}(w)$，$\alpha$ 是 $(\mathrm{VI})_\varepsilon$ 的解且 $-A^* y_0 \in F(\alpha)$，并有 $-A^* y_0$ 满足式（1）。

证明　ⅰ）若 x_0 是 $(\mathrm{VI})_\varepsilon$ 的解且 $v \in F(x_0)$ 满足式（1），则 $-v \in A^* \partial_\varepsilon f(Ax_0)$。设 $u \in \partial_\varepsilon f(Ax_0) \cap (A^*)^{-1}(-v)$，则 $-v = A^* u$，$-Ax_0 \in (\partial_\varepsilon f)^{-1}(u) = \partial_\varepsilon f^*(u)$。因为 $v \in F(x_0)$，故 $x_0 \in F^{-1}(v)$，$Ax_0 \in AF^{-1}(v) = AF^{-1}(-A^* u)$。即 u 是 $(\mathrm{DVI})_\varepsilon$ 的解，且 Ax_0 满足式(2)。

ⅱ）若 $y_0 \in Y$ 是 $(\mathrm{DVI})_\varepsilon$ 的解且 $w \in AF^{-1}(-A^* y_0)$ 满足式(2)，则 $w \in \partial_\varepsilon f^*(y_0)$。设 $\alpha \in AF^{-1}(-A^* y_0) \cap A^{-1}(w)$，则 $w \in A\alpha$，$-A^* y_0 \in F(\alpha)$。因 $w \in \partial_\varepsilon f^*(y_0)$，故 $y_0 \in (\partial_\varepsilon f^*)^{-1}(w) = (\partial_\varepsilon f)(w) = (\partial_\varepsilon f)(A\alpha)$，$A^* y_0 \in A^* \partial_\varepsilon f(A\alpha) = \partial_\varepsilon(f \circ A)(\alpha)$。于是 α 是 $(\mathrm{VI})_\varepsilon$，$-A^* y_0 \in F(\alpha)$ 且 $-A^* y_0$ 满足式（1）。

下设存在 $z \in X$，使 $Az \in \mathrm{ridom}(f)$，$\mathrm{ridom}(f \circ A) \cap \mathrm{ridom}(g) \neq \varphi$，于是 $\forall y \in \mathrm{ridom}(f \circ A) \cap \mathrm{ridom}(g)$，$0 \in \partial_\varepsilon(g + f \circ A)(y_0)$ 当且仅当存在 $r \in [0, \varepsilon]$，使 $0 \in \partial_r g(y_0) + \partial_{\varepsilon - r}(f \circ A)(y_0)$。

考虑凸优化问题（P）$\min\{g(x) + f(Ax): x \in X\}$。若对任何 $x \in X$ 有 $g(x) + f(Ax) \geqslant g(x_0) + f(Ax_0) - \varepsilon$，则称 x_0 是（P）的 ε – 最优解。

（P）的 Fenchel 对偶问题（D）$\max\{-g^*(-A^* y) - f^*(y): y \in Y\}$。

若对任何 $y \in Y$，有 $-g^*(-A^* y)-f^*(y) \leqslant -g^*(-A^* y_0)-f^*(y_0)+\varepsilon$，则称 y_0 是（D）的 ε - 最优解。

由 Fenchel 不等式知，若 $x_0 \in X$ 与 $y_0 \in Y$ 分别是（P）与（D）的 ε - 最优解，则 $0 \leqslant g(x_0)+f(Ax_0)-[-g^*(-A^* y_0)-f^*(y_0)] \leqslant 2\varepsilon$。

定理 3 设存在 $z \in X$，使 $Az \in \mathrm{ridom}(f)$，且存在 $y_0 \in Y$，使 $-A^* y_0 \in \mathrm{ridom}(g^*)$，$\mathrm{ridom}(f \circ A) \cap \mathrm{ridom}(g) \neq \varnothing$，$\mathrm{ridom}(g^* \circ (-A^*)) \cap \mathrm{ridom}(f^*) \neq \varnothing$，那么下列结论成立：ⅰ）若 $x_0 \in X$ 是（P）的 ε - 最优解，则存在 $r \in [0,\varepsilon]$，$v \in X^*$，使 $v \in \partial_r g(x_0)$，$-v \in \partial_{\varepsilon-r}(f \circ A)(x_0)$，且任意 $y_0 \in \partial_{\varepsilon-r} f(Ax_0) \cap (A^*)^{-1}(-v)$，$y_0$ 是（D）的 ε - 最优解；ⅱ）若 y_0 是（D）的 ε - 最优解，则存在 $r \in [0,\varepsilon]$，$w \in Y$，使 $w \in -\partial_r(g^* \circ (-A^*))(y_0) = A(\partial_r g^*)(-A^* y_0)$，$w \in \partial_{\varepsilon-r} f^*(y_0)$，且任意 $x_0 \in -\partial_r g^*(-A^* y_0) \cap A^{-1}(w)$，$x_0$ 是（P）的 ε - 最优解；ⅲ）$x_0 \in X$ 是（P）的 ε - 最优解当且仅当存在 $r \in [0,\varepsilon]$，$y_0 \in Y$，使 $-A^* y_0 \in \partial_r g(x_0)$，$Ax_0 \in \partial_{\varepsilon-r} f^*(y_0)$；ⅳ）$y_0$ 是（D）的 ε - 最优解当且仅当存在 $r \in [0,\varepsilon]$，$x_0 \in X$，使 $-A^* y_0 \in \partial_r g(x_0)$，$Ax_0 \in \partial_{\varepsilon-r} f^*(y_0)$。

证明 ⅰ）若 $x_0 \in X$ 是（P）的 ε - 最优解，则 $0 \in \partial_\varepsilon(g+f \circ A)(x_0)$，即存在 $r \in [0,\varepsilon]$，使 $0 \in \partial_r g(x_0)+\partial_{\varepsilon-r}(f \circ A)(x_0)$，因此，存在 $r \in [0,\varepsilon]$，$v \in \partial_r g(x_0)$，使 $\langle v, x-x_0 \rangle \geqslant f(Ax_0)-f(Ax)-(\varepsilon-r)$，$\forall x \in X$。由定理 2，$\forall y_0 \in \partial_{\varepsilon-r} f(Ax_0) \cap (A^*)^{-1}(-v)$，$Ax_0 \in A(\partial_r g)^{-1}(-A^* y_0) = A(\partial_r g^*)(-A^* y_0) = -\partial_r(g^* \circ (-A^*))(y_0)$，$\langle -Ax_0, y-y_0 \rangle \geqslant -f^*(y)+f^*(y_0)-(\varepsilon-r)$，$\forall y \in Y$。从而 $-g^*(-A^* y)-f^*(y)-r \leqslant -g^*(-A^* y_0)-f^*(y_0)+(\varepsilon-r)$，$\forall y \in Y$，即 y_0 是（D）的 ε - 最优解。

ⅱ）若 y_0 是（D）的 ε - 最优解，则 $0 \in \partial_\varepsilon(g^* \circ (-A^*)+f^*)(y_0)$，于是存在 $r \in [0,\varepsilon]$，使 $0 \in \partial_r(g^* \circ (-A^*))(y_0)+\partial_{\varepsilon-r} f^*(y_0)$，从而存在 $r \in [0,\varepsilon]$，$w \in -\partial_r(g^* \circ (-A^*))(y_0) = A(\partial_r g^*)(-A^* y_0)$，使 $\langle w, y-y_0 \rangle \leqslant f^*(y)-f^*(y_0)+(\varepsilon-r)$，$\forall y \in Y$。由定理 2，$\forall x_0 \in \partial_r g^*(-A^* y_0) \cap A^{-1} w$，$-A^* y_0 \in \partial_r g(x_0)$，有 $\langle -A^* y_0, x-x_0 \rangle \geqslant -f(Ax_0)-f(Ax)-(\varepsilon-r)$，$\forall y \in Y$，从而 $g(x)-g(x_0)+r \geqslant f(Ax_0)-f(Ax)-(\varepsilon-r)$，$\forall y \in Y$，即 $x_0 \in X$ 是（P）的 ε - 最优解。

ⅲ）$x_0 \in X$ 是（P）的 ε - 最优解当且仅当存在 $r \in [0,\varepsilon]$，使 $0 \in \partial_r g(x_0)+\partial_{\varepsilon-r}(f \circ A)(x_0)$，即：当且仅当 $r \in [0,\varepsilon]$，$y_0 \in Y$，使 $-A^* y_0 \in \partial_r g(x_0)$，$Ax_0 \in \partial_{\varepsilon-r} f^*(y_0)$。

ⅳ）y_0 是（D）的 ε - 最优解，当且仅当存在 $r \in [0,\varepsilon]$，使 $0 \in \partial_r(g^* \circ (-A^*))(y_0)+\partial_{\varepsilon-r} f^*(y_0)$，即：当且仅当 $r \in [0,\varepsilon]$，$x_0 \in X$，使 $-A^* y_0 \in \partial_r g(x_0)$，$Ax_0 \in \partial_{\varepsilon-r} f^*(y_0)$。

[参考文献]

[1] XU M H. Proximal alternating directions method for structured variational inequalities [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2007, 134(1): 107-117. DOI:10.1007/s10957-007-9192-2.

[2] SON T Q, STRODIOT J J, NGUYEN V H. ε-optimality and ε-lagrangian duality for a nonconvex programming problem with an infinite number of constraints [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2009, 141: 389-409.

[3] RUBINOV A M, WU Z Y. Optimization conditions in global optimization and their applications [J]. Mathematical Programming, 2009, 120B: 101-123.

[4] GOVILM G, MEHRA A. ε-optimality for multiobjective programming on a Banach space [J]. European Journal of Operations Research, 2004, 157: 106-112.

[5] KAZMI K R. Existence of ε-minima for vector optimization problem [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 109: 667-674.

[6] 史树中. 凸分析 [M]. 上海：上海科学技术出版社，1990.

[7] HIRIART U J B, LEMARECHAL C. Convex analysis and minimization algorithms Ⅱ [M]. Berlin: Springer, 1993.

（责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤）