第 26 卷 第 2 期 集美大学学报(自然科学版) Vol. 26 No. 2
2021 年 3 月 Journal of Jimei University(Natural Science) Mar. 2021

[文章编号] 1007 - 7405(2021)02 - 0125 - 04 DOI:10.19715/j.jmuzr.2021.02.06

随机单种群 Gompertz 增长模型的稳定性

王凤筵

(集美大学理学院,福建 厦门 361021)

[摘要] 研究一个随机单种群 Gompertz 增长模型,证明方程的每个从正初始值出发的解都是一个全局正解,得到这个解及其均值的解析表达式。引入随机变量依均值吸引和依均方吸引的概念,研究随机 Gompertz 方程,证明随机 Gompertz 方程的解是依均值吸引和依均值平方全局吸引,并存在唯一依均值的平方全局稳定的随机解。最后,证明随机 Gompertz 方程的解是最终随机有界的。

[关键词] Gompertz 模型;稳定性;依均值平方;最终随机有界

[中图分类号] O 175.13

Stability for a Stochastic Single Species Gompertz Growth Model

WANG Fengyan

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: A stochastic single species Gompertz growth model was considered. It was shown that the equation had a global positive solution starting from the positive initial value and obtain its explicit expression. The expectation of the solution was also obtained. It was obtained that the equation was globally attractive in the mean square, and it was shown that there existed a unique solution of the model which was globally stable in the mean square. Finally, it was established that the solution of the equation was stochastically ultimately bounded.

Keywords: Gompertz model; stability; in the mean square; stochastical ultimate boundedness

0 引言

单种群增长的 Logistic 模型、Gompertz 模型是生物数学和经济学中的两个重要的数学模型。种群的生存环境总是受到各种随机不确定因素的影响,因此,很多学者研究了随机 Logistic 模型[1-9]:$\mathrm{d}x(t) = rx(t)(1 - x(t)/K)\mathrm{d}t + \sigma x(t)\mathrm{d}B_t$,其中,$x(t)$ 表示 t 时刻的种群密度,$r > 0$ 表示种群内禀增长率,$K > 0$ 表示种群的环境容纳量,σ 表示白噪声强度,B_t 是标准布朗运动。文献[2]研究了非自治的随机 Logistic 方程的依时间平均的持久性和灭绝性;文献[4]研究了非自治的随机 Logistic 方程的依时间平均的全局稳定性、持久性和灭绝性;文献[5]研究了基于随机 Logistic 方程建立的捕食 - 食饵的分支问题;文献[6]研究了带有脉冲扰动的非自治的随机 Logistic 方程的依时间平均的持久性、灭绝性、全局吸引性和随机持久性。但是,当用依时间平均的概念研究随机单种群增长的 Gompertz 模型时,就遇到无法克服的困难。因此,研究 Gompertz 模型稳定性甚至何种意义下的稳定性,可以参考的文献很少。

[收稿日期] 2020 - 09 - 01
[作者简介] 王凤筵(1968—),男,副教授,从事生物数学方向研究,E-mail:wangfy68@163.com。

本文引入依均值平方吸引和随机有界性概念，研究下面的随机单种群增长的 Gompertz 模型[9]：

$$\mathrm{d}x(t) = rx(t)(\mu - \ln x(t))\mathrm{d}t + \sigma x(t)\mathrm{d}B_t, \tag{1}$$

其中：e^{μ} 表示种群的环境容纳量；σ 表示白噪声强度；B_t 是标准布朗运动。关于模型（1）的研究结果是比较少的，而关于确定性单种群 Gompertz 模型

$$\mathrm{d}x(t) = rx(t)(\mu - \ln x(t))\mathrm{d}t \tag{2}$$

的研究是很多的。方程（2）所描述的种群数量 $x(t)$ 渐进稳定到环境容纳量，种群没有灭绝平衡态。本文引入依均值吸引和依均值平方吸引的概念，研究了随机 Gompertz 方程渐进的行为。

1 预备知识和随机全局正解

文中，设 $(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0},P)$ 是一个完备概率空间，它带有滤子 $\mathscr{F}_t$ 并且满足通常条件（即 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是右连续单调递增，且 $\mathscr{F}_0$ 包含所有零测集）。设 B_t 是定义在该完备概率空间上的标准布朗运动。记 $R_+^n = \{(a_1,a_2,\cdots,a_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_i > 0, i = 1,2,\cdots,n\}$，本文需要下面的定理 1 和定理 2。

定理 1[9] （Itô 公式）设 $x(t)(t \geqslant 0)$ 是 Itô 过程，其随机微分为 $\mathrm{d}x(t) = f(t)\mathrm{d}t + g(t)\mathrm{d}B_t$，其中：$f \in \mathscr{L}^1(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^n)$；$g \in \mathscr{L}^2(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^{n\times m})$。若 $V(x(t),t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+;\mathbf{R})$，则 $V(x(t),t)$ 仍然是 Itô 过程，具有如下随机微分：$\mathrm{d}V(x(t),t) = V_t(x(t),t)\mathrm{d}t + V_x(x(t),t)\mathrm{d}x(t) + 0.5\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)V_{xx}(x(t),t)\mathrm{d}x(t)$。

定理 2 对任意给定的初值 $x(0) = x_0 > 0$，系统（1）存在唯一全局正解 $x(t)$，并且有如下表达式：

$$x(t) = \exp\{\mathrm{e}^{-rt}\ln x_0 + (\mu - \sigma^2/(2r))(1 - \mathrm{e}^{-rt}) + \sigma\mathrm{e}^{-rt}\int_0^t \mathrm{e}^{rs}\mathrm{d}B_s\}。 \tag{3}$$

证明 在方程 $\mathrm{d}x(t) = rx(t)(\mu - \ln x(t))\mathrm{d}t + \sigma x(t)\mathrm{d}B_t$ 作代换 $u(t) = \ln x(t)$。应用 Itô 公式可得：

$$\mathrm{d}u(t) = \mathrm{d}\ln x(t) = \mathrm{d}x(t)/x(t) - (\mathrm{d}x(t))^2/(2x^2(t)) =$$
$$(r\mu - \sigma^2/2 - r\ln x(t))\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}B_t = (r\mu - \sigma^2/2 - ru(t))\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}B_t。$$

因此，得到：$u(t) = \mathrm{e}^{-rt}\ln x_0 + (\mu - \sigma^2/(2r))(1 - \mathrm{e}^{-rt}) + \sigma\mathrm{e}^{-}rt\int_0^t \mathrm{e}^{rs}\mathrm{d}B_s$。由 $u(t) = \ln x(t)$ 可以得到表达式 $x(t) = \mathrm{e}^{u(t)}$。这个解 $x(t) = \mathrm{e}^{u(t)}$ 在 $t \in (0, +\infty)$ 都有意义且有 $x(t) > 0$。证毕。

为了研究随机解的均值，需要下列引理 1。

引理 1 对于随机过程 $\exp\{\sigma\exp(-rt\int_0^t \mathrm{e}^{rs}\mathrm{d}B_s)\}$，则有 $E\exp\{\sigma\exp(-rt\int_0^t \mathrm{e}^{rs}\mathrm{d}B_s)\} = \exp\{\sigma^2(1 - \mathrm{e}^{-2rt})/(4r)\}$。

证明 设随机变量 $z_t = \int_0^t \mathrm{e}^{rs}\mathrm{d}B_s$，那么 $\mathrm{d}z_t = \mathrm{e}^{rt}\mathrm{d}B_t$。由 Itô 公式，有以下计算：$\mathrm{d}z_t^n = nz_t^{n-1}\mathrm{d}z_t + n(n-1)z_t^{n-2}\mathrm{e}^{2rt}\mathrm{d}t/2 = n\mathrm{e}^{rt}z_t^{n-1}\mathrm{d}B_t + n(n-1)z_t^{n-2}\mathrm{e}^{2rt}\mathrm{d}t/2$。对上面的随机微分等式取积分并取均值可得：

$$Ez_t^n - Ez_0^n = E(\int_0^t n\mathrm{e}^{rs}z_s^{n-1}\mathrm{d}B_s) + n(n-1)\int_0^t Ez_s^{n-2}\mathrm{e}^{2rs}\mathrm{d}s\Big/2。 \tag{4}$$

因为 $Ez_0^n = 0, E(\int_0^t n\mathrm{e}^{rs}z_s^{n-1}\mathrm{d}B_s) = 0$，代入式（4）可得：$Ez_t^n = n(n-1)\int_0^t Ez_s^{n-2}\mathrm{e}^{2rs}\mathrm{d}s\Big/2$。在上式中设随机变量均值函数列 $\boldsymbol{A}_n(t) = Ez_t^n(n = 1,2,\cdots)$ 并代入其中，有：

$$\boldsymbol{A}_n(t) = n(n-1)\int_0^t \boldsymbol{A}_{n-2}(s)\mathrm{e}^{2rs}\mathrm{d}s/2(n \geqslant 3),$$

其中：$\boldsymbol{A}_1(t) = E\int_0^t \exp^{rs}\mathrm{d}B_s = 0$；$\boldsymbol{A}_2(t) = E(\int_0^t \mathrm{e}^{rs}\mathrm{d}B_s)^2 = \int_0^t \mathrm{e}^{2rs}\mathrm{d}s = (\mathrm{e}^{2rt} - 1)/(2r)$。经过运算，可以得到：当 $n = 2k - 1$ 时，$\boldsymbol{A}_{2k-1}(t) = 0$；当 $n = 2k$ 时，$\boldsymbol{A}_{2k}(t) = (2k)!(\mathrm{e}^{2rt} - 1)^k/(2^k(2r)^k k!)$，$k = 1, 2,\cdots$。

应用上面的结果，经过如下运算可以得到：

$$E\exp\{\sigma\exp(-rt\int_0^t e^{rs}dB_s)\} = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sigma^n/n!\ e^{-nrt}Ez_t^n) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\sigma^{2k}e^{-2krt}\boldsymbol{A}_{2k}(t))/(2k)! =$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}[\sigma^{2k}(1-e^{-2rt})^k/(k!(2r)^k2^k)] = \exp\{\sigma^2(1-e^{-2rt})/(4r)\}。\quad (5)$$

证毕。

应用引理 1 和定理 2 可得定理 3。

定理 3　对任意给定的初值 $x(0)=x_0>0$，系统（1）有正解 $x(t)$，$Ex(t)$ 和 $Ex^2(t)$，并有如下表达式：

$$Ex(t) = \exp\{e^{-rt}\ln x_0 + (\mu-\sigma^2/(2r))(1-e^{-rt}) + \sigma^2(1-e^{-2rt})/(4r)\},$$

$$Ex^2(t) = \exp\{2e^{-rt}\ln x_0 + 2(\mu-\sigma^2/(2r))(1-e^{-rt}) + \sigma^2(1-e^{-2rt})/r\}。$$

2　依均值平方的稳定性和随机最终有界性

定义 1　设任意给定系统（1）的两个解 $x(t),y(t)$ 对应的初值为 $x(0)=x_0>0,y(0)=y_0>0$，如果成立：$\lim\limits_{t\to+\infty}E[x(t)-y(t)]^2=0$，则称系统是依均值的平方全局吸引的。

定理 4　方程（1）是依均值的平方全局吸引的，且对于任意给定系统（1）的两个解 $x(t),y(t)$ 对应的初值为 $x(0)=x_0>0,y(0)=y_0>0$，有如下的估计：

$$E[x(t)-y(t)]^2 = [\ln x_0-\ln y_0]^2\exp\{2(\mu-\sigma^2/(2r))+\sigma^2/r\}e^{-2rt}+o(e^{-2rt}),t\to+\infty。$$

证明　任意给定系统（1）的两个解 $x(t),y(t)$ 对应的初值为 $x(0)=x_0>0$，$y(0)=y_0>0$，那么，由表达式

$$E[x(t)-y(t)]^2 = [\exp\{e^{-rt}\ln x_0\}-\exp\{e^{-rt}\ln y_0\}]^2\exp\{2(\mu-\sigma^2/(2r))(1-e^{-rt})+\sigma^2(1-e^{-2r}t)/r\}$$

可以得到定理 4 的结论。

定义 2　如果存在方程（1）的解 $\hat{x}(t)$，对于任意方程（1）的解 $x(t)$ 都成立，$\lim\limits_{t\to+\infty}E[x(t)-\hat{x}(t)]^2=0$，则称系统（1）的解 $\hat{x}(t)$ 是依均值的平方全局吸引的。

定理 5　方程（1）的解 $x^*(t)$ 是依均值的平方全局吸引的，其中，$x^*(t)$ 表达如下：

$$x^*(t) = \exp\{\mu-\sigma^2/(2r)+\sigma^2e^{-rt}/(4r)+\sigma e^{-rt\int_0^t e^{rs}dB_s}\},x_0^* = \exp\{(\mu-\sigma^2/(4r))\},$$

随机解 $x^*(t)$ 有以下的性质：

$$Ex^*(t) = \exp\{e^{-rt}(\mu-\sigma^2/(4r))+(\mu-\sigma^2/(2r))(1-e^{-rt})+\sigma^2(1-e^{-2rt})/(4r)\},$$

$$\mathrm{Var}\,x^*(t) = \exp\{2e^{-rt}(\mu-\sigma^2/(4r))+2(\mu-\sigma^2/(2r))(1-e^{-rt})\}$$

$$\{\exp\{\sigma^2(1-e^{-2rt})/r\}-\exp\{\sigma^2(1-e^{-2rt})/(2r)\}\}。$$

证明　任意给定系统（1）的两个解 $x(t),y(t)$ 对应的初值为 $x(0)=x_0>0,y(0)=y_0>0$，那么，经过运算可得：

$$E|x(t)-y(t)| = |\exp\{e^{rt}\ln x_0\}-\exp\{e^{-rt}\ln y_0\}|\exp\{(\mu-\sigma^2/(2r))(1-e^{-rt})+$$

$$\sigma^2(1-e^{-2rt})/(4r)\} = |\ln x_0-\ln y_0|\exp\{\mu-\sigma^2/(4r)\}e^{-rt}+o(e^{-rt}),t\to+\infty。$$

任意两个解依均值相互吸引。容易得到，任意的解 $x(t)$，成立 $\lim\limits_{t\to+\infty}Ex(t)=\exp\{(\mu-\sigma^2/(4r))\}=Ex(+\infty)$。所以，对于解 $x^*(t)$，有以下的性质：$x_0^*=E(x_0^*)=Ex^*(+\infty)=Ex(+\infty)$。应用定理 4 可知，$x^*(t)$ 是依均值的平方全局稳定的。

定义 3[6]　对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，存在 $M_\varepsilon>0$，使得对于任意方程（1）的解 $x(t)$ 都成立 $\limsup\limits_{t\to+\infty}P\{|x(t)|\geqslant M_\varepsilon\}<\varepsilon$，则称方程（1）是随机最终有界的。

定理 6　方程（1）是随机最终有界的。

证明 任意给定系统（1）的解 $x(t)$，设随机变量 $x(t)$ 对应的概率密度函数为 $g(x)$。给定的 $\varepsilon \in (0,1)$。由极限 $Ex^2(t) \to e^{2\mu}, t \to +\infty$，都存在 $T_\varepsilon > 0$，任意的 $t > T_\varepsilon$ 时，$Ex^2(t) < e^{2\mu} + 1$ 成立。取定 $M_\varepsilon = \sqrt{(e^{2\mu} + 1)/\varepsilon}$，应用 Chebyshev 不等式，有如下的估算：

$$P\{|x(t)| \geqslant M_\varepsilon\} = \int_{|x(t)|^2 \geqslant M_\varepsilon^2} g(x)\mathrm{d}x < \int_{|x(t)|^2 \geqslant M_\varepsilon^2} (|x(t)|^2 g(x) g(x)/M_\varepsilon^2)\mathrm{d}x < E|x(t)|^2/M_\varepsilon^2 < \varepsilon, t > T_\varepsilon。$$

所以，得到 $\lim\limits_{t \to +\infty} \sup P\{|x(t)| \geqslant M_\varepsilon\} < \varepsilon$。定理证毕。

［参考文献］

［1］ARNOLD L. Stochastic differential equations: theory and applications［M］. New York: Wiley, 1972.

［2］LIU M, WANG K. Persistence and extinction in stochastic non-autonomous logistic systems［J］. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2011, 375(2): 443-457. DOI:10.1016/j.jmaa.2010.09.058.

［3］JIANG D Q, SHI N Z. A note on non-autonomous logistic equation with random perturbation［J］. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2005, 303: 164-172. DOI:10.1016/j.jmaa.2004.08.027.

［4］JIANG D Q, SHI N Z, LI X Y. Global stability and stochastic permanence of a non-autonomous logistic equation with random perturbation［J］. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2008, 340(1): 588-597. DOI:10.1016/j.jmaa.2007.8.014.

［5］LIU C, YU L F, ZHANG Q L, et al, Dynamic analysis of a hybrid bioeconomic plankton system with double time delays and stochastic fluctuations［J］. Applied Mathematics and Computation, 2018, 316: 115-137. DOI:10.1016/j.amc.2017.08.019.

［6］MAO X R, LI X Y. Population dynamical behavior of non-autonomous Lotka-Volterra competitive system with random perturbation［J］. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2009, 24(2): 523-545. DOI:10.3934/dcds.2009.24.523.

［7］LIU M, WANG K. On a stochastic logistic equation with impulsive perturbations［J］. Computers and Mathematics with Applications, 2012, 63(5): 871-886. DOI:10.1016/j.camwa.2011.11.003.

［8］LIU M, WANG K. Persistence, extinction and global asymptotical stability of a non-autonomous predator-prey model with random perturbation［J］. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(11): 5344-5353. DOI:10.1016/j.apm.2011.12.057.

［9］王克. 随机生物数学模型［M］. 北京：科学出版社，2010：166.

（责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤）