第26卷 第2期 集美大学学报（自然科学版） Vol.26 No.2
2021年3月 Journal of Jimei University(Natural Science) Mar. 2021

[文章编号] 1007－7405(2021)02－0119－06 DOI:10.19715/j.jmuzr.2021.02.05

一类发展的 $p(x)$-Laplace 方程解的存在唯一性

曾羽群

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

［摘要］讨论一类发展的 $p(x)$-Laplace 方程 $u_t = \mathrm{div}(a(x,t)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + f(u,x,t)$ 解的存在唯一性。不同于此前的研究，文中假设 $a(x,t) \geqslant 0$，且当 $x \in \Omega$ 时，$a(x,t) > 0$，解的稳定性是建立在一个合理的部分边界条件 $u(x,t) = 0, (x,t) \in \Sigma_1$ 上，其中 $\Sigma_1 \subseteq \partial\Omega \times (0,T)$ 仅仅是一个子流形。

［关键词］发展的 $p(x)$-Laplace 方程；存在唯一性；稳定性；部分边界条件；子流形

［中图分类号］O 175.29

Existence and Uniqueness of Solutions to an Evolutionary $p(x)$-Laplace Equation

ZENG Yuqun

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The following evolutionary $p(x)$-Laplace equations $u_t = \mathrm{div}(a(x,t)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + f(u,x,t)$ were discussed, and the existence and the uniqueness of weak solutions were proved. Different from the previous works, it was assumed $a(x,t) \geqslant 0$ and $a(x,t)|_{x\in\Omega} > 0$ in this paper. The stability of weak solutions was based on a reasonable partial boundary value condition $u(x,t) = 0, (x,t) \in \Sigma_1$, where $\Sigma_1 \subseteq \partial\Omega \times (0,T)$ was just a submanifold.

Keywords: evolutionary $p(x)$-Laplace equation; existence and uniqueness; stability; partial boundary value condition; submanifold

0 引言

21世纪以来，发展的 $p(x)$-Laplace 方程

$$u_t = \mathrm{div}(a(x,t)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + f(u,x,t), (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T) \tag{1}$$

引起许多偏微分方程研究者的兴趣。从形式上看，方程（1）不仅是传统的发展 p-Laplace 方程的推广，该方程还有着自身的物理应用背景，比如它来自于21世纪新兴的电磁变流体理论[1－2]、非标准的图像处理[3－4]等。其中：$\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域；$p(x)$ 是一个可测函数。如果 $a(x,t) = 1$，方程（1）的初边值问题解的存在唯一性问题、正则性问题、大时间渐近行为和爆破问题等已经被广泛研究[5－7]。如果 $a(x,t) = d(x)^\alpha$，其中 $d = \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$ 是距离函数，文献［8－11］研究了方程

$$u_t = \mathrm{div}(d(x)^\alpha|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(x,t,u,\nabla u), (x,t) \in Q_T \tag{2}$$

解的存在唯一性，文献［12］研究了解的内部正则性。如果 $f(x,u,t) = 0$，并假设 $a(x,t) = a(x)$ 满足

［收稿日期］2020－05－13
［作者简介］曾羽群（1967—），女，副教授，从事偏微分方程理论研究，1198075286@qq.com。

$$\begin{cases} a(x) > 0, & x \in \Omega, \\ a(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

文献[13－14]研究了解的存在性和稳定性。实际上,如果 $a(x,t)|_{x\in\partial\Omega}=0$，并假设方程（1）有解 $u\in L^1(0,T;W^{p(x)}(\Omega))$，那么对于方程（1）的两个解 $u(x,t)$、$v(x,t)$，只要

$$|f(u,x,t)-f(v,x,t)|\leqslant c|u-v|。 \tag{4}$$

由于 $a(x,t)$ 在边界 $\partial\Omega$ 的退化性，可以不用 Dirichlet 边界条件

$$u(x,t)=v(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{5}$$

就可以证明

$$\int_\Omega |u(x,t)-v(x,t)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega |u_0(x)-v_0(x)|^2\mathrm{d}x。 \tag{6}$$

问题的关键在于,正是 $a(x,t)|_{x\in\partial\Omega}=0$，一般没有 $u\in L^1(0,T;W^{p(x)}(\Omega))$。实际上，只能得到 $u\in L^1(0,T;W^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(\Omega))$。文献［13－16］在没有条件 $u\in L^1(0,T;W^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(\Omega))$ 下证明了解的唯一性。

本文将借鉴文献［13－15］的方法，研究方程（1）具有如下初边值条件

$$u|_{t=0}=u_0(x),x\in\Omega, \tag{7}$$

$$u(x,t)=0,(x,t)\in\Sigma_1, \tag{8}$$

解的存在唯一性。与文献［13－15］的主要不同在于，本文需要部分边界条件（8），其中 $\Sigma_1\subseteq\partial\Omega\times(0,T)$ 仅仅是一个子流形。

1 基本函数空间及其弱解的定义

先回顾一下带权的变指数空间 $L^{p(x)}(b,\Omega)$[12]和带权的变指数 Sobolev 空间 $W^{1,p(x)}(b,\Omega)$[17]。记 $C_+(\overline{\Omega})=\{h\in C(\overline{\Omega}):\min\limits_{x\in\Omega}h(x)>1\}$。对任意的 $h\in C_+(\overline{\Omega})$，记 $h_+=\sup\limits_{x\in\Omega}h(x)$，$h_-=\inf\limits_{x\in\Omega}h(x)$。对任意的 $p\in C_+(\overline{\Omega})$，$b(x)$ 非负，带权的变指数空间 $L^{p(x)}(b,\Omega)$ 代表所有的可测实函数 u，满足 $\int_\Omega b(x)|u(x)|^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty$，其范数以 Luxemburg 形式来定义 $\|u\|_{L^{p(x)}(b,\Omega)}=\inf\{\lambda>0:\int_\Omega b(x)|u(x)/\lambda|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant 1\}$。带权的变指数 Sobolev 空间 $W^{1,p(x)}(b,\Omega)$ 定义为 $W^{1,p(x)}(b,\Omega)=\{u\in L^{p(x)}(\Omega):|\nabla u|\in L^{p(x)}(b,\Omega)\}$，其范数定义为 $\|u\|_{W^{1,p(x)}(b,\Omega)}=\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}+\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(b,\Omega)}$。易知 $|\|u\||=\inf\{\mu>0:\int_\Omega(|u(x)/\mu|^{p(x)}+b(x)|\nabla u/\mu|^{p(x)})\mathrm{d}x\leqslant 1\}$ 是与 $\|u\|_{W^{1,p(x)}(b,\Omega)}$ 等价的范数。

如果记 $\rho(u)=\int_\Omega b(x)|u(x)|^{p(x)}\mathrm{d}x$，对任意的 $u\in L^{p(x)}(b,\Omega)$，则熟知有以下引理。

引理 1[14] $\rho(u)$ 满足以下性质：1) $\rho(u)>1$（$=1$；<1），当且仅当 $\|u\|_{L^{p(x)}(b,\Omega)}>1$（$=1$；$<1$）；2）若 $\|u\|_{L^{p(x)}(b,\Omega)}>1$，则 $\|u\|^{p_-}_{L^{p(x)}(b,\Omega)}\leqslant\rho(u)\leqslant\|u\|^{p_+}_{L^{p(x)}(b,\Omega)}$；3）若 $\|u\|_{L^{p(x)}(b,\Omega)}<1$，则 $\|u\|^{p_+}_{L^{p(x)}(b,\Omega)}\leqslant\rho(u)\leqslant\|u\|^{p_-}_{L^{p(x)}(b,\Omega)}$。

引理 2[17] 设 $1<p_0\leqslant p(x)\leqslant p_1<\infty$，$[L^{p(x)}(b,\Omega)]^*$ 为带权的变指数空间 $L^{p(x)}(b,\Omega)$ 的共轭空间［$L^{p(x)}(b,\Omega)]^*=L^{p'(x)}([b(x)]^{1/(1-p(x))},\Omega)$，$1/p(x)+1/p'(x)=1$，则有 Hölder 不等式 $\left|\int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant k\|u\|_{L^{p'(x)}([b(x)]^{1/(1-p(x))},\Omega)}\|v\|_{L^{p(x)}(b,\Omega)}$。

引理 3[12] 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 为开集，$p\in C_+(\overline{\Omega})$，$\Omega_0$ 是 Ω 的紧子集。若 $b(x)\geqslant 0$ 满足（w1）$b\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且 $b^{-1/(p(x)-1)}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，则 $L^{p(x)}(b,\Omega)\to L^1(\Omega_0)$，其中→代表连续嵌入。

引理 4[12] 设 $p,s\in C_+(\overline{\Omega})$，$b(x)\geqslant 0$ 满足（w1）及（w2）$b^{-s(x)}\in L^1(\Omega)$，$s(x)\in(N/p(x),$

$\infty) \cap [1/(p(x)-1),\infty)$。则有紧嵌入 $W^{1,p(x)}(b,\Omega) \to\to L^{r(x)}(\Omega)$，其中 $r \in C_+(\overline{\Omega})$，对任意的 $x \in \Omega$，$1 \leqslant r(x) < p_s^*(x)$。同时，

$$p_s(x) = p(x)s(x)/(1+s(x)),$$

$$p_s^*(x) = \begin{cases} p(x)s(x)N/[(s(x)+1)N - p(x)s(x)], & p_s(x) < N, \\ +\infty, & p_s(x) \geqslant N。\end{cases}$$

变指数空间的其他一些基本性质还可以参考文献［18－20］，例如当 $p(x)$ 满足对数 Hölder 连续性时，$C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ 中稠密。在本文中也都假设 $p(x)$ 满足对数 Hölder 连续性，以下不再重复这一条件。

定义 1　若函数 $u(x,t)$ 满足

$$u \in L^\infty(Q_T), u_t \in L^2(Q_T), u \in L^\infty(0,T;W^{1,p(x)}(a,\Omega)), \tag{9}$$

且对于 $\varphi \in C_0^1(Q_T)$，有

$$\iint_{Q_T}(u_t\varphi + a(x,t)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iint_{Q_T} f(u,x,t)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{10}$$

则称函数 $u(x,t)$ 为方程（1）的弱解。其中初值条件（7）在如下意义下成立

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega |u(x,t) - u_0(x)|\varphi(x)\mathrm{d}x = 0, \forall\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega), \tag{11}$$

部分边界条件（8）是在迹的意义下成立。

文中，假设 $a(x,t) \geqslant 0$ 且对于任意固定的 $t \in [0,T)$，

$$a(x,t) > 0, x \in \Omega。 \tag{12}$$

定理 1　设对于任意固定的 $t \in [0,T)$、$a(x,t)$ 满足式（12）、$a_t(x,t) \leqslant 0$ 及条件（w1）（w2），

$$u_0 \in L^\infty(\Omega), u_0 \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \tag{13}$$

$f(u,x,t)$ 是连续函数且满足式（4），那么方程（1）有一解 $u(x,t)$ 满足初值条件（7）。并且当

$$\int_\Omega a(x,t)^{-1/(p(x)-1)}\mathrm{d}x < \infty, \tag{14}$$

$u(x,t)$ 在迹的意义下满足部分边界条件（8）。

注 1　$u_0 \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ 这一条件可以更弱，比如减弱到 $a(x,0)|\nabla u_0|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$，只不过处理起来会比较麻烦一些。

定理 2　设 $a(x,t)$ 满足式（12）及条件（w1）（w2），同时对于充分大的 n，

$$n^{1-1/p_+}\left(\int_{\Omega_{1/n}\setminus\Omega_{2t/n}} |\nabla a|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{1/p_+} \leqslant c, \tag{15}$$

其中，对任意 $t \in [0,T)$，$\Omega_{t/n} = \{x \in \Omega: a(x,t) > 1/n\}$，若 $u(x,t)$、$v(x,t)$ 是方程（1）的弱解，具有不同的初值 $u_0(x)$、$v_0(x)$，并具有相同的部分边界条件

$$u(x,t) = v(x,t) = 0, (x,t) \in \Sigma_1, \tag{16}$$

则有

$$\int_\Omega |u(x,t) - v(x,t)|\mathrm{d}x \leqslant c\int_\Omega |u(x,0) - v(x,0)|\mathrm{d}x, \tag{17}$$

其中 $\Sigma_1 = \{(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T): a(x,t) > 0\}$。

稳定性（17）隐含解的唯一性成立，只不过需要条件（15），如果没有这一条件，那么解的唯一性还需要将来另外论证。

2　定理 1 和定理 2 的证明

2.1　定理 1 的证明

本节用抛物正则化证明定理 1。

考虑正则化问题

$$u_t = \operatorname{div}((a(x,t)+\varepsilon)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + f(u,x,t),(x,t)\in Q_T, \tag{18}$$

具初边值条件

$$u(x,0) = u_{0\varepsilon}(x), x\in\Omega, \tag{19}$$

$$u(x,t) = 0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)。 \tag{20}$$

其中，$u_{0\varepsilon}(x)\in C_0^\infty(\Omega)$，$u_{0\varepsilon}(x)\to u_0$ 于 $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ 中。根据发展的 $p(x)$-Laplace 方程理论[6]，初边值问题（18）~（20）具有解 $u_\varepsilon\in L^1(0,T;W_0^{1,p(x)}(\Omega))$，且存在独立于 ε 的常数 c，使得

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(Q_T)}\leqslant c。 \tag{21}$$

在方程（18）的两边同乘以 u_ε，有

$$\int_\Omega u_\varepsilon{}^2\mathrm{d}x/2 + \iint_{Q_T}(a(x,t)+\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega u_0^2\mathrm{d}x\Big/2 + \iint_{Q_T}f(u_\varepsilon,x,t)u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{22}$$

由式（21），有

$$\int_\Omega u_\varepsilon^2\mathrm{d}x\Big/2 + \iint_{Q_T}(a(x,t)+\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant c。 \tag{23}$$

特别地，

$$\iint_{Q_T}a(x,t)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\iint_{Q_T}(a(x,t)+\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant c。 \tag{24}$$

同时，在方程（18）的两边同乘以 $u_{\varepsilon t}$，对任意的 $t\in[0,T)$，在 $Q_t=\Omega\times(0,t)$ 上积分，有

$$\iint_{Q_t}|u_{\varepsilon t}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iint_{Q_t}\operatorname{div}(a(x,t)+\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon u_{\varepsilon t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{Q_t}u_{\varepsilon t}f(u_\varepsilon,x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t。 \tag{25}$$

注意到 $|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla u_{\varepsilon t} = (1/2)\mathrm{d}\int_0^{|\nabla u_\varepsilon|^2}s^{(p(x)-2)/2}\mathrm{d}s\Big/\mathrm{d}t$，那么，由于 $a_t(x,t)\leqslant 0$，利用 $u_0\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$，$u_{0\varepsilon}\to u_0$ 在 $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$，有

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_t}\operatorname{div}(a(x,t)+\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon u_{\varepsilon t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\iint_{Q_t}(a(x,t)+\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon\nabla u_{\varepsilon t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \\ &-(1/2)\iint_{Q_t}(a(x,t)+\varepsilon)\mathrm{d}\int_0^{|\nabla u_\varepsilon|^2}s^{(p(x)-2)/2}\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big/\mathrm{d}t = -\int_\Omega(a(x,t)+\varepsilon)\int_0^{|\nabla u_\varepsilon|^2}s^{(p(x)-2)/2}\mathrm{d}s\mathrm{d}x\Big|_0^t\Big/2 + \\ &\iint_{Q_t}a_t(x,t)\int_0^{|\nabla u_\varepsilon|^2}s^{(p(x)-2)/2}\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big/2\leqslant\int_\Omega(a(x,0)+\varepsilon)\int_0^{|\nabla u_{0\varepsilon}|^2}s^{(p(x)-2)/2}\mathrm{d}s\mathrm{d}x\Big/2\leqslant \\ &\int_\Omega|\nabla u_{0\varepsilon}|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|\nabla u_{0\varepsilon}|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant c。\end{aligned} \tag{26}$$

由式（21），应用 Young 不等式，有

$$\iint_{Q_T}u_{\varepsilon t}f(u_\varepsilon,x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\iint_{Q_T}|u_{\varepsilon t}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big/2 + c。 \tag{27}$$

于是，由式（21）、（24）和（27），存在一个函数 u 和一个 $N-$ 维向量值函数 $\boldsymbol{\zeta}=(\zeta_1,\cdots,\zeta_N)$，$u\in L^\infty(Q_T)$，$u_t\in L^2(Q_T)$，$|\boldsymbol{\zeta}|\in L^1(0,T;L^{p(x)/(P(x)-1)}(a^{1/(1-p(x))},\Omega))$，使得：$u_\varepsilon\rightharpoonup u$，在 $L^\infty(Q_T)$ 弱星收敛，$u_\varepsilon\to u$，在 $L^2(0,T;L^{p(x)}(a,\Omega))$ 弱收敛，$u_{\varepsilon t}\rightharpoonup u_t$，在 $L^2(Q_T)$ 弱收敛，$|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon\rightharpoonup\boldsymbol{\zeta}$ 在 $L^1(0,T;L^{p(x)/(P(x)-1)}(a^{1/(1-p(x))},\Omega))$ 弱收敛。并且由引理 3 知，$u_\varepsilon\to u$ 几乎处处于 Q_T。于是 $f(u_\varepsilon,x,t)\to f(u,x,t)$，a. e. $(x,t)\in Q_T$。另外，通过类似于发展的 p-Laplace 方程理论[21]，可以证明对 $\varphi\in C_0^1(Q_T)$，有

$$\iint_{Q_T}a(x,t)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iint_{Q_T}\boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t。 \tag{28}$$

特别地，当 $a(x,t)=a(x)$，式（28）的证明可见文献［22］。尽管本文考虑的是 $a(x,t)$ 的情况，但完全可以类似证明，故在此不再重复其证明。

初值条件（11）不难按文献［6］的方法证明。同时在 $a(x,t)$ 满足式（14）条件下，通过类似于文献［8］的方法，可以证明 $\int_\Omega |\nabla u|\mathrm{d}x < \infty$ 。于是可以定义 $u(x,t)$ 在 $\partial\Omega\times(0,T)$ 上的迹，故部分边界条件（8）在迹的意义下成立。定理 1 得证。

2.2　定理 2 的证明

设 $u(x,t)$ 、$v(x,t)$ 为方程（1）的弱解，具有不同的初值条件 $u(x,0)$ 、$v(x,0)$ ，具有相同的部分边界条件（16），其中，$\Sigma_1 = \{(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T):a(x,t)>0\}$ 。

对任意正整数 n，设 $g_n(s)$ 是一个奇函数，当 $s>0$ 时，定义为 $g_n(s) = \begin{cases}1, & s>1/n\\ n^2s^2\mathrm{e}^{1-n^2s^2}, & 0\leqslant s\leqslant 1/n\end{cases}$ 。易知，$\lim\limits_{n\to\infty} g_n(s) = \mathrm{sgn}(s), s\in(-\infty,+\infty)$ 。

任意固定的 $t\in[0,T)$ ，定义

$$\Omega_{\lambda\ t} = \{x\in\Omega:a(x,t)>\lambda\}, \varphi_{nt}(x) = \begin{cases}1, & x\in\Omega_{2t/n},\\ n(a(x,t)-1/n), & x\in\Omega_{t/n}\setminus\Omega_{2t/n},\\ 0, & x\in\Omega\setminus\Omega_{t/n}。\end{cases}$$

由于 $u(x,t)$ 、$v(x,t)\in L^\infty(0,T;W^{1,p(x)}(a,\Omega))$ ，故 $g_n(u-v)\in L^\infty(0,T;W^{1,p(x)}(a,\Omega))$ 。因为 $u(x,t)$ 、$v(x,t)$ 具有相同的部分边界条件（16），在边界 $\partial\Omega$ 上，当 $a(x,t)>0$ 时，$u(x,t)=v(x,t)=0$，通过一个极限过程，可以选取 $\varphi_{nt}g_n(u-v)$ 作为检验函数，于是，

$$\int_0^t\int_\Omega \varphi_{nt}(x)g_n(u-v)(u-v)_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^t\int_\Omega a(x,t)(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v)\nabla(u-v)g'_n(u-v)\varphi_{nt}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^t\int_\Omega a(x,t)(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v)\nabla(u-v)g_n(u-v)\nabla\varphi_{nt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^t\int_\Omega[f(u,x,t)-f(v,x,t)]\varphi_{nt}g_n(u-v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\tag{29}$$

首先，由算子 $|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u$ 的单调性，有

$$\int_0^t\int_\Omega a(x,t)(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v)\nabla(u-v)g'_n(u-v)\varphi_{nt}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant 0。\tag{30}$$

其次来讨论式（29）的其他项。因为对任意的 $t\in[0,T)$ ，$n\|g_n(u-v)\nabla a\|_{L^{p(x)}(a,\Omega_{t/n}\setminus\Omega_{2t/n})}\leqslant n\|\nabla a\|_{L^{p(x)}(a,\Omega_{t/n}\setminus\Omega_{2t/n})}\leqslant n(\int_{\Omega_{t/n}\setminus\Omega_{2t/n}} a(x,t)|\nabla a|^{p(x)}\mathrm{d}x)^{1/p_+}\leqslant cn^{1-1/p_+}(\int_{\Omega_{t/n}\setminus\Omega_{2t/n}}|\nabla a|^{p(x)}\mathrm{d}x)^{1/p_+}\leqslant c$ 。注意到 $x\in\Omega_{t/n}\setminus\Omega_{2t/n}$ ，$|\nabla\varphi_{nt}| = \nabla a/\lambda$ ，而在 Ω 的其他地方，$|\nabla\varphi_{nt}|=0$ ，于是由引理 2，有

$$\left|\int_\Omega a(x,t)(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v)\cdot\nabla\varphi_{nt}g_n(u-v)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{\Omega_{t/n}\setminus\Omega_{2t/n}} a(x,t)(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v)\cdot\nabla\varphi_{nt}g_n(u-v)\mathrm{d}x\right|\leqslant n\int_{\Omega_{t/n}\setminus\Omega_{2t/n}} a(x,t)(|\nabla u|^{p(x)-1}+|\nabla v|^{p(x)-1})\cdot|\nabla a g_n(u-v)|\mathrm{d}x\leqslant cn\|(|\nabla u|^{p(x)-1}+|\nabla v|^{p(x)-1})\|_{L^{q(x)}(a^{1/(1-p(x))},\Omega_{t/n\setminus 2t/n})}\cdot\|\nabla a g_n(u-v)\|_{L^{p(x)}(a,\Omega_{t/n\setminus 2t/n})}\leqslant c[(\int_{\Omega_{t/n}\setminus\Omega_{2t/n}} a(x,t)|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x)^{1/q_1} + (\int_{\Omega_{t/n}\setminus\Omega_{2t/n}} a(x,t)|\nabla v|^{p(x)}\mathrm{d}x)^{1/q_1}]。\tag{31}$$

当 $n\to\infty$ 时，式（31）的右边趋于 0。这里，$q(x) = p(x)/(p(x)-1)$ ，$q_1 = q_+$ 或 $q_1 = q_+$ 具体是哪个，根据引理 1 要看 $\||\nabla u|^{p(x)-1}\|_{L^{q(x)(a^{1/(1-p(x))}},\Omega_{t/n\setminus(2t)/n})}>1$ 还是 $\leqslant 1$ 。

同时又有：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^t\int_\Omega[f(u,x,t)-f(v,x,t)]\varphi_{nt}g_n(u-v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant c\int_0^t\int_\Omega|u-v|\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\tag{32}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t\int_\Omega \varphi_{nt} g_n(u-v)(u-v)_t \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega |u(x,t)-v(x,t)|\mathrm{d}x - \int_\Omega |u_0(x)-v_0(x)|\mathrm{d}x。\quad (33)$$

最后，在式（29）中取 $n\to\infty$ 的极限，由式（29）~式（33），有 $\int_\Omega |u(x,t)-v(x,t)|\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |u_0(x)-v_0(x)|\mathrm{d}x + c\int_0^t\int_\Omega |u(x,s)-v(x,s)|\mathrm{d}x\mathrm{d}s$。由 Gronwall 不等式，就可以得到 $\int_\Omega |u(x,t)-v(x,t)|\mathrm{d}x \leqslant c\int_\Omega |u_0(x)-v_0(x)|\mathrm{d}x$，$\forall t\in[0,T)$，定理2得证。

［参考文献］

［1］RUZICKA M. Electrorheological fluids：modeling and mathematical theory［M］. Berlin：Springer-Verlag，2000.

［2］ACERBI E，MINGIONE G. Regularity results for stationary electrorheological fluids［J］. Arch Ration Mech Anal，2002，164：213-259.

［3］ABOULAICH R，MESKINE D，SOUISSI A. New diffusion models in image processing［J］. Computers & Mathematics with Applications，2008，56：874-882. DOI:10.1016/j.camwa.2008.01.017.

［4］LEVINE S，CHEN Y，STANICH J. Image restoration via nonstandard diffusion［D］. Pittsburgh：Duquesne University，2004.

［5］ANTONTSEV S，SHMAREV S. Anisotropic parabolic equations with variable non-linearity［J］. Publ Mat，2009，53：355-399. DOI:10.5565/PUBLMAT_53209_04.

［6］ANTONTSEV S，SHMAREV S. Parabolic equations with double variable nonlinearlities［J］. Math and Compu in Simulation，2011，81：2018-2032.

［7］LIAN S Z，GAO W J，YUAN H J，et al. Existence of solutions to an initial Dirichlet problem of evolutional $p(x)$-Laplace equations［J］. Annales del Institut Henri Poincare（C）Nonlinear Analysis，2012，29：377-399. DOI:10.1016/j.anihpc.2012.01.001.

［8］YIN J，WANG C. Properties of the boundary flux of a singular diffusion process［J］. Chinese Annal Math Ser B，2004，25：175-182.

［9］詹华税，袁洪君. 边界退化的对流扩散方程［J］. 吉林大学学报（理学版），2015，53(3)：353-358.

［10］詹华税，袁洪君. 边界退化的多孔介质方程［J］. 吉林大学学报（理学版），2015，53(5)：829-834.

［11］詹华税，袁洪君. 强退化抛物方程的解［J］. 吉林大学学报（理学版），2016，54(4)：671-676.

［12］ZHAN H S，XIE Q M. The boundary degeneracy of a singular diffusion equation［J］. Journal of Inequalities and Applications，2014(1)：284. DOI:10.1186/1029-242X-2014-284.

［13］ZHAN H S，WEN J. Evolutionary $p(x)$-Laplacian equation free from the limitation of the boundary value［J］. Eltronic J Differential Equations，2016，143：1-13.

［14］ZHAN H S. The boundary value condition of an evolutionary $p(x)$-Laplacian equation［J］. Boundary Value Problems，2015，112：377-382. DOI:10.1186/s13661-015-0377-6.

［15］HO K，SIM I. On degenerate $p(x)$-Laplacian equations involving critical growth with two parameters［J］. Nonlinear Analysis，2016，132：95-114.

［16］ZHAN H S，FENG Z S. The well-posedness problem of an anisotropic parabolic equation［J］. Journal of Differential Equations，2020，268：389-413. DOI:10.1016/j.jde.2019.08.014.

［17］ZHAN H S. The stability of evolutionary $p(x)$-Laplacian equation［J］. Boundary Value Problems，2017(1)：13. DOI:10.1186/s13661-016-0742-0.

［18］ZHIKOV V V. On the density of smooth functions in Sobolev-Orlicz spaces［J］. Otdel Mat Inst Steklov（POMI），2004，310：67-81.

［19］FAN X L，ZHAO D. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}$［J］. J Math Anal Appl，2001，263：424-446.

［20］KOVÁCIK O，RÁKOSNÍK J. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$［J］. Czechoslovak Math J，1991，41：592-618.

［21］WU Z Q，ZHAO J N，YIN J X，et al. Nonlinear diffusion equations［M］. Singapore：World Scientific Publishing，2001.

［22］ZHAN H S. On anisotropic parabolic equations with a nonlinear convection term depending on the spatial variable［J］. Advances in Difference Equations，2019(1)：1-27. DOI:10.1186/s13662-019-1969-8.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）