

# Riesz 空间分布阶的分数阶扩散方程的数值模拟

陈景华<sup>1,2</sup>, 陈雪娟<sup>1,2</sup>

(1. 集美大学理学院, 福建 厦门 361021; 2. 集美大学理学院数字福建大数据建模与智能计算研究所, 福建 厦门 361021)

**[摘要]** 提出一种求解 Riesz 空间分布阶的分数阶扩散方程的数值方法。利用辛普森数值求积公式, 将分布阶微分方程离散为一个多项分数阶导数的微分方程; 利用四阶差分格式求解此具有多项分数阶导数的微分方程, 并运用能量法分析数值格式的稳定性及收敛性。同时, 给出数值例子, 说明所建立的数值离散格式的有效性。

**[关键词]** 空间分布阶; 分数阶微分方程; 稳定性; 收敛性; 数值离散

**[中图分类号]** O 241.82

## Numerical Method for the Distributed-Order Riesz Space Fractional Diffusion Equation

CHEN Jinghua<sup>1,2</sup>, CHEN Xuejuan<sup>1,2</sup>

(1. School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China; 2. Digital Fujian Big Data Modeling and Intelligent Computing Institute, School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** A numerical method for solving the fractional diffusion equation of the distributed-order Riesz space fractional diffusion equation was proposed. The distributed-order differential equation was discretized into a differential equation with a multi-term equation by Simpson quadrature formula. The fourth-order difference approximation was derived to solve the resulting multi-term equation. The stability and convergence of the numerical scheme were analyzed by energy method, and a numerical example was given to illustrate the validity of the established numerical discrete scheme.

**Keywords:** space distributed-order; fractional differential equation; stability; convergence; numerical discretization

## 0 引言

分数阶微分方程是广义的非整数阶的微分方程。由于分数阶算子的非局部性, 分数阶微分方程非常适合用来描述现实世界中具有记忆及遗传性质的材料<sup>[1-3]</sup>。然而, 还有很多问题不能采用分数阶系统来解决, 如非均质多孔和裂隙介质中的溶质迁移试验<sup>[4-5]</sup>。由于复杂流体流动的力学性质会随时空尺度而发生一定的变化, 因此污染物等溶质扩散将产生所谓的多尺度效应。近年来, 研究者们<sup>[6-9]</sup>采用 Riesz 分布阶的分数阶扩散方程(其中分布阶导数在数学上可以看成是对分数阶导数在给定范围内关于其阶数的一个积分, 即分数阶导数是在一个单位区间上的积分)来描述这种反常扩散。Diethelm

**[收稿日期]** 2020-01-11

**[基金项目]** 福建省自然科学基金项目(2019J01329, 2020J01703); 集美大学科研基金项目(ZP2020054); 集美大学数字福建大数据建模与智能计算研究所开放基金

**[作者简介]** 陈景华(1977—), 女, 副教授, 从事分数阶偏微分方程数值解的研究, cjhdzdz@163.com。

<http://xuebaobangong.jmu.edu.cn/zkb>

等<sup>[10]</sup>研究了 Caputo 分布阶常微分方程的数值解并进行了收敛性分析; Atanackovic 等<sup>[11]</sup>证明了时间分布阶柯西问题解存在性, 并求出解析解; Luchko 等<sup>[12]</sup>考虑了一个开区间上的分布阶时间分数阶扩散方程, 并证明了这个问题的解的唯一性和存在性; Jiao 等<sup>[9]</sup>给出了分布阶导数在信号处理中的分布阶的滤波器和控制系统中的最优分布阶阻尼两个应用。Podlubny 等<sup>[13]</sup>用矩阵方法离散分布阶导数和积分, 给出数值例子验证算法的精确性, 但是没有具体的数值理论分析; Gorenflo 等<sup>[14]</sup>研究了一种分布阶时间分数阶扩散波动方程, 并利用傅里叶变换和拉普拉斯变换技术得到了此问题的基本解。现有文献关于分布阶微分方程数值方法的研究还比较少。2014 年, Katsikadelis<sup>[15]</sup>研究了 Caputo 分布阶线性与非线性常微分方程的数值解, 但没有进行理论分析。2018 年, Semarya 等<sup>[16]</sup>运用移位的分数阶积分切比雪夫算子矩阵与修正的 Picard 数值方法求解分布阶线性分数阶常微分方程, 但没有进行理论分析。分布阶微分算子作为分数阶微分算子的发展形式, 已经越来越受到研究人员的重视。相对于固定阶导数, 这类算子的应用领域更为广阔, 但由于算子定义的复杂性, 相应的数值算法更为复杂, 并不能简单照搬分数阶的数值算法。本文考虑用有效的数值方法求解空间分布阶的分数阶扩散方程。

考虑以下 Riesz 空间分布阶的分数阶扩散方程<sup>[17-18]</sup>:

$$\partial u / \partial t = K \int_1^2 P(\alpha) \partial^\alpha u / \partial |x|^\alpha d\alpha + f(x, t), x \in [x_L, x_R], t \in (0, T], \quad (1)$$

边界条件:

$$u(x_L, t) = 0, u(x_R, t) = 0, t \in (0, T], \quad (2)$$

初始条件:

$$u(x, 0) = \varphi(x), x \in [x_L, x_R], \quad (3)$$

这里  $P(\alpha)$  是非负加权函数<sup>[10]</sup>, 满足:

$$0 \leq P(\alpha), P(\alpha) \neq 0, \alpha \in [1, 2], 0 < \int_1^2 P(\alpha) d\alpha < \infty. \quad (4)$$

扩散系数  $K$  为非负常数。有限区间  $[x_L, x_R]$  上的空间 Riesz 分数算子  $\partial^\alpha u / \partial |x|^\alpha$  定义为:

$$\partial^\alpha u(x, t) / \partial |x|^\alpha = c_\alpha [ {}_{x_L} D_x^\alpha u + {}_x D_{x_R}^\alpha u ], \quad (5)$$

这里  $c_\alpha = -1/(2\cos(\pi\alpha/2))$ , 且

$${}_{x_L} D_x^\alpha u = (1/\Gamma(2-\alpha)) \partial^2 / \partial x^2 \int_{x_L}^x u(\xi, t) / (x-\xi)^{\alpha-1} d\xi, \quad (6)$$

$${}_x D_{x_R}^\alpha u = ((-1)^2 / (\Gamma(2-\alpha))) \partial^2 / \partial x^2 \int_x^{x_R} u(\xi, t) / (\xi-x)^{\alpha-1} d\xi. \quad (7)$$

特别地, 当  $\alpha = 2$  时,  $\partial^2 u / \partial |x|^2 = \partial^2 u / \partial x^2$ 。

## 1 积分项的离散

首先, 把积分区间划分成若干个子区间:  $1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_S = 2, S \in \mathbf{N}$ , 并记

$$\Delta\alpha_i = \alpha_i - \alpha_{i-1} = 1/S = \sigma, \alpha_{i-1/2} = (\alpha_{i-1} + \alpha_i)/2, i = 1, 2, \cdots, S. \quad (8)$$

利用辛普森数值求积公式, 方程 (1) 中的积分可以化为:  $\int_1^2 P(\alpha) \partial^\alpha u / \partial |x|^\alpha d\alpha =$

$\sigma \sum_{i=1}^S [P(\alpha_{i-1}) \partial^{\alpha_{i-1}} u / \partial |x|^{\alpha_{i-1}} + 4P(\alpha_{i-1/2}) \partial^{\alpha_{i-1/2}} u / \partial |x|^{\alpha_{i-1/2}} + P(\alpha_i) \partial^{\alpha_i} u / \partial |x|^{\alpha_i}] / 6 + O(\sigma^4)$ 。为简单起见, 记:

$$D_x^{\alpha_i} u = (K\sigma/6) P(\alpha_i) \partial^{\alpha_i} u / \partial |x|^{\alpha_i}, i = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \cdots, S. \quad (9)$$

$$D_x u = \sum_{i=1}^S (D_x^{\alpha_{i-1}} u + 4D_x^{\alpha_{i-1/2}} u + D_x^{\alpha_i} u), \quad (10)$$

则 Riesz 空间分布阶的分数阶扩散方程可以离散成具有多项分数阶导数的微分方程:

$$\partial u(x, t) / \partial t = D_x u + f(x, t) + O(\sigma^4) \quad (11)$$

具有边界和初始条件 (2) ~ (3)。

## 2 数值离散格式

首先对空间和时间进行离散。取正整数  $N$ , 设时间步长  $\tau = T/N, t_n = n\tau, 0 \leq n \leq N$ 。记时间区域  $\Omega_\tau = \{t_n | 0 \leq n \leq N\}$ 。取正整数  $M$ , 并设空间步长  $h = (x_R - x_L)/M, x_i = x_L + ih, 0 \leq i \leq M$ 。空间区域  $\Omega_h = \{x_i | 0 \leq i \leq M\}$ 。空间平均差分算子  $A^\alpha$  定义为:  $A^\alpha u(x, t) = d_2^\alpha u(x - h, t) + (1 - 2d_2^\alpha)u(x, t) + d_2^\alpha u(x + h, t), d_2^\alpha = (-\alpha^2 + \alpha + 4)/24$ 。

平均算子  $A$  定义为:

$$Au = \sigma \sum_{i=1}^S (A^{\alpha_{i-1}}u + 4A^{\alpha_{i-1/2}}u + A^{\alpha_i}u)/6, \quad (12)$$

$$A(D_x u) = \sum_{i=1}^S (A^{\alpha_{i-1}}D_x^{\alpha_{i-1}}u + 4A^{\alpha_{i-1/2}}D_x^{\alpha_{i-1/2}}u + A^{\alpha_i}D_x^{\alpha_i}u)。 \quad (13)$$

定义网格函数  $U_i^n = u(x_i, t_n), 0 \leq i \leq M, 0 \leq n \leq N$ 。因此在点  $U_i^n$  处的算子  $A$  可写为:

$$AU_i^n = Q_1 U_{i-1}^n + Q_2 U_i^n + Q_1 U_{i+1}^n, \quad (14)$$

其中:  $Q_1 = \sigma \sum_{l=1}^S (d_2^{\alpha_{l-1}} + 4d_2^{\alpha_{l-1/2}} + d_2^{\alpha_l})/6; Q_2 = \sigma \sum_{l=1}^S [(1 - 2d_2^{\alpha_{l-1}}) + 4(1 - 2d_2^{\alpha_{l-1/2}}) + (1 - 2d_2^{\alpha_l})]/6$ 。由文献 [18], 有以下结论成立:

$$A^\alpha({}_{x_L}D_x^\alpha u(x_i, t)) = \delta_{x,+}^\alpha u(x_i, t) + O(h^4), \quad (15)$$

$$A^\alpha({}_xD_x^\alpha u(x_i, t)) = \delta_{x,-}^\alpha u(x_i, t) + O(h^4), \quad (16)$$

其中,

$$\delta_{x,+}^\alpha u(x_i, t) = \sum_{k=0}^i [w_k^{(\alpha)} u(x_i - (k-1)h, t)]/h^\alpha, \quad (17)$$

$$\delta_{x,-}^\alpha u(x_i, t) = \sum_{k=0}^{M-i} [w_k^{(\alpha)} u(x_i + (k-1)h, t)]/h^\alpha, \quad (18)$$

且

$$\begin{aligned} w_0^{(\alpha)} &= (\alpha^2 + 3\alpha + 2)g_0^{(\alpha)}/12, \\ w_1^{(\alpha)} &= (\alpha^2 + 3\alpha + 2)g_1^{(\alpha)}/12 + (4 - \alpha^2)g_0^{(\alpha)}/6, \\ w_k^{(\alpha)} &= (\alpha^2 + 3\alpha + 2)g_k^{(\alpha)}/12 + (4 - \alpha^2)g_{k-1}^{(\alpha)}/6 + (\alpha^2 - 3\alpha + 2)g_{k-2}^{(\alpha)}/12, k \geq 2. \end{aligned} \quad (19)$$

权重系数  $g_0^{(\alpha)} = 1, g_k^{(\alpha)} = (1 - (\alpha + 1)/k)g_{k-1}^{(\alpha)}, k = 1, 2, \dots$ 。

引入以下差分算子  $\delta_x^{\alpha_i}$ :

$$\delta_x^{\alpha_i} u = K\sigma P(\alpha_i) c_{\alpha_i} [\delta_{x,+}^{\alpha_i} u + \delta_{x,-}^{\alpha_i} u]/6, i = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots, S, \quad (20)$$

及差分算子  $\delta_x u$ :

$$\delta_x u = \sum_{i=1}^{S_x} (\delta_x^{\alpha_{i-1}} u + 4\delta_x^{\alpha_{i-1/2}} u + \delta_x^{\alpha_i} u)。 \quad (21)$$

因此, 在点  $U_i^n$  处的算子  $\delta_x$  可改写为:

$$\delta_x U_i^n = \sum_{l=1}^{i+1} (W_{i-l+1} U_l^n) + \sum_{l=i+1}^{M-1} (W_{l-i+1} U_l^n), \quad (22)$$

其中,

$$W_k = K\sigma \sum_{l=1}^S [P(\alpha_{l-1}) c_{\alpha_{l-1}} w_k^{\alpha_{l-1}} + 4P(\alpha_{l-1/2}) c_{\alpha_{l-1/2}} w_k^{\alpha_{l-1/2}} + P(\alpha_l) c_{\alpha_l} w_k^{\alpha_l}]/6, k = 0, 1, 2, \dots。 \quad (23)$$

由方程 (9) ~ (16) 得到:

$$A(D_x u(x_i, t)) = \delta_x u(x_i, t) + O(h^4). \quad (24)$$

考虑方程 (1) 在点  $(x_i, t)$  处的方程为:

$$u_t(x_i, t) = D_x u(x_i, t) + f(x_i, t) + O(\sigma^4), \quad (25)$$

在方程 (25) 两端取平均算子  $A$ , 则有:

$$Au_t(x_i, t) = AD_x u(x_i, t) + Af(x_i, t) + O(\sigma^4), x_i \in \Omega_h. \quad (26)$$

由式 (24) 可得:

$$Au_t(x_i, t) = \delta_x u(x_i, t) + Af(x_i, t) + O(\sigma^4 + h^4), x_i \in \Omega_h. \quad (27)$$

下面对时间离散。对于方程 (27), 在  $t = t_n$  和  $t = t_{n+1}$  处取平均, 且利用泰勒展开, 可得到:

$$A\delta_t U_i^{n+1/2} - \delta_x U_i^{n+1/2} = Af_i^{n+1/2} + R_i^n, 0 \leq i \leq M, 0 \leq n \leq N-1. \quad (28)$$

其中:  $\delta_t U_i^{n+1/2} = (U_i^{n+1} - U_i^n)/\tau$ ;  $U_i^{n+1/2} = (U_i^{n+1} + U_i^n)/2$  且  $f_i^{n+1/2} = f(x_i, (t_n + t_{n+1})/2)$ 。则截断误差  $R_i^n$  满足:

$$R_i^n = O(\tau^2 + \sigma^4 + h^4), 0 \leq i \leq M, 0 \leq n \leq N-1. \quad (29)$$

在方程 (28) 中略去截断误差, 将精确解  $U_i^n$  用数值解  $u_i^n$  替代, 并利用初始和边界条件:

$$U_0^n = 0, U_M^n = 0, 1 \leq n \leq N, U_i^0 = \varphi(x_i), 0 \leq i \leq M, \quad (30)$$

得到以下四阶拟紧差分格式:

$$A\delta_t u_i^{n+1/2} - \delta_x u_i^{n+1/2} = Af_i^{n+1/2}, 0 \leq i \leq M, 0 \leq n \leq N-1. \quad (31)$$

$$u_0^n = u_M^n = 0, 1 \leq n \leq N, u_i^0 = \varphi(x_i), 0 \leq i \leq M. \quad (32)$$

为了逼近 Riesz 空间分布阶的分数阶扩散方程, 将方程 (31) 改成:

$$(A - \tau\delta_x/2)u_i^{n+1} = (A + \tau\delta_x/2)u_i^n + \tau Af_i^{n+1/2}, 0 \leq i \leq M, 0 \leq n \leq N-1. \quad (33)$$

线性系统 (33) 的系数矩阵  $A = (a_{s,t})$  写成下式:

$$a_{s,t} = \begin{cases} -\tau W_{s-t+1}/2, & t < s-1, \\ Q_1 - \tau(W_0 + W_2)/2, & t = s \pm 1, \\ Q_2 - \tau W_1, & t = s, \\ -\tau W_{t-s+1}/2, & t > s+1, \end{cases} \quad (34)$$

则有以下定理 1。

**定理 1** 差分格式 (31) ~ (32) 是唯一可解的。

**证明** 因为  $d_2^\alpha = (-\alpha^2 + \alpha + 4)/24, 1 < \alpha \leq 2$ , 所以  $4d_2^\alpha = (-\alpha^2 + \alpha + 4)/6 \leq 1$ , 则有  $2d_2^\alpha < 1 - 2d_2^\alpha$ 。由  $Q_1, Q_2$  的定义, 可得  $2Q_1 < Q_2$ 。再由式 (34) 可知, 对于很小的值  $\tau$ , 方程 (33) 的系数矩阵是严格对角占优的, 定理 1 得证。

### 3 稳定性和收敛性的证明

与文献 [19] 讨论相似, 本节提供隐式格式的数值分析。首先, 定义离散的内积和范数, 设  $V_h = \{v | v = (v_0, \dots, v_M) \text{ 是定义在 } \Omega_h \text{ 上的网格函数且 } v_0 = v_M = 0\}$ 。对任意的网格函数  $u, v \in V_h$ , 定义内积  $(u, v) = h \sum_{i=1}^{M-1} (u_i v_i)$ , 并且对应的离散范数为  $L^2$  范数:  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ 。

为了证明差分格式的稳定性和收敛性, 有以下引理。

**引理 1**  $A$  是自相似的, 即对任意的  $u, v \in V_h$ , 成立  $(Au, v) = (u, Av)$ 。

**证明**

$$\begin{aligned} (Au, v) &= \sigma \sum_{i=1}^S [(A^{\alpha_{i-1}} u, v) + 4(A^{\alpha_{i-1/2}} u, v) + (A^{\alpha_i} u, v)]/6 = \\ &= \sigma \sum_{i=1}^S [(u, A^{\alpha_{i-1}} v) + 4(u, A^{\alpha_{i-1/2}} v) + (u, A^{\alpha_i} v)]/6 = (u, Av), \end{aligned} \quad (35)$$

即证得。

**引理 2** 对任意的  $v \in V_h$ , 成立  $\|v\|^2/3 \leq (Av, v) \leq \|v\|^2$ 。

**证明**

$$(Av, v) = \sigma \sum_{i=1}^S [(A^{\alpha_{i-1}}v, v) + 4(A^{\alpha_{i-1/2}}v, v) + (A^{\alpha_i}v, v)]/6, \quad (36)$$

且

$$\|v\|^2/3 \leq (A^\alpha v, v) \leq \|v\|^2, \quad (37)$$

可得

$$(Av, v) \leq \sigma \sum_{i=1}^S (6\|v\|^2)/6 = \|v\|^2, (Av, v) \geq \sigma \sum_{i=1}^S (2\|v\|^2)/6 = \|v\|^2/3. \quad (38)$$

即证得。

**引理 3** 对任意的  $v \in V_h$ , 成立  $(\delta_x v, v) \leq 0$ 。

**证明**

$$(\delta_x v, v) = \sum_{i=1}^{S_x} [(\delta_x^{\alpha_{i-1}}v, v) + 4(\delta_x^{\alpha_{i-1/2}}v, v) + (\delta_x^{\alpha_i}v, v)], \quad (39)$$

且有  $(\delta_x^\alpha v, v) \leq 0$ , 可得  $(\delta_x v, v) \leq 0$ 。

使用引理 3, 容易得到以下定理 2, 其证明类似文献 [18] 的定理 2。

**定理 2** 设  $\{v_i^n\}$  是以下差分格式的解:

$$A\delta_t v_i^{n+1/2} - \delta_x v_i^{n+1/2} = f_i^n, 0 \leq i \leq M, 0 \leq n \leq N-1. \quad (40)$$

$$v_0^n = v_M^n = 0, 1 \leq n \leq N, v_i^0 = \varphi(x_i), 0 \leq i \leq M, \quad (41)$$

则有

$$\|v^n\| \leq \sqrt{3}(\|v^0\| + \sqrt{3}\tau \sum_{l=0}^{n-1} \|f^l\|), 1 \leq n \leq N. \quad (42)$$

其中:  $v_0(x_0) = v_0(x_n) = 0$ ;  $\|f^l\| = \sqrt{h \sum_{i=1}^{M-1} (f_i^l)^2}$ 。

由定理 2 可以直接推出如下定理 3。

**定理 3** 差分格式 (31) ~ (32) 按初值和右端项  $f$  是无条件稳定的。

现在考虑差分格式 (31) ~ (32) 的收敛性。

**定理 4** 差分格式 (31) ~ (32) 是收敛的, 且收敛阶为  $O(\tau^2 + \sigma^4 + h^4)$ 。

**证明** 设  $\{u_i^n\}$  ( $0 \leq i \leq M, 0 \leq n \leq N$ ) 是差分格式 (31) ~ (32) 的解, 且

$$e_i^n = U_i^n - u_i^n, 0 \leq i \leq M, 0 \leq n \leq N. \quad (43)$$

将式 (28) 和式 (29) 分别减去式 (31) 和式 (32), 可得到误差方程

$$A\delta_t e_i^{n+1/2} - \delta_x e_i^{n+1/2} = R_i^n, 0 \leq i \leq M, 0 \leq n \leq N-1. \quad (44)$$

$$e_0^n = e_M^n = 0, 1 \leq n \leq N, e_i^0 = 0, 0 \leq i \leq M. \quad (45)$$

根据定理 2 得到:

$$\|e^n\| \leq 3\tau \sum_{l=0}^{n-1} \|R^l\| \leq 3T \sqrt{(x_R - x_L)} O(\tau^2 + \sigma^4 + h^4), 1 \leq n \leq N. \quad (46)$$

证毕。

## 4 数值例子

**例 1** 考虑以下 Riesz 空间分布阶扩散方程:

$$\partial u / \partial t = \int_1^2 P(\alpha) (\partial^\alpha u / \partial |x|^\alpha) d\alpha + f(x, t), x \in [0, 1], t \in (0, 1], \quad (47)$$

边界条件:

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, t \in (0, 1], \quad (48)$$

初始条件:

$$u(x, 0) = x^4(1-x)^4, x \in [0, 1]. \quad (49)$$

这里,

$$P(\alpha) = -2\Gamma(9-\alpha)\cos(\pi\alpha/2), \quad (50)$$

且

$$f(x, t) = -e^{-t}[x^4(1-x)^4 + \int_1^2 p(\alpha) \partial^\alpha u(x, 0) / \partial |x|^\alpha d\alpha]. \quad (51)$$

方程 (47) ~ (49) 的精确解为  $u(x, t) = e^{-t}x^4(1-x)^4$ 。

取参数  $\sigma = 1/1\,000$ ,  $\tau = h^2 = 1/400$ ,  $T = 1.0$ ,

记最大误差  $E_\infty(h, \tau) = \max_{\substack{0 \leq i \leq M \\ 0 \leq k \leq N}} |u(x_i, t_k) - u_i^k|$ ,

误差率定义为:  $R_\varepsilon = \log(\varepsilon(h_1)/\varepsilon(h_2))/\log 2$ 。

图 1 显示了  $T = 1.0$  时刻数值解与精确解的比较, 取  $\sigma = 1/1\,000$ 、 $\tau = h^2 = 1/400$  二者非常吻合。表 1 显示  $\sigma = 1/1\,000$ 、 $\tau = h^2$ 、 $T = 1.0$  时数值解与精确解的最大误差及收敛。误差率接近:  $R_\varepsilon = \lg(\varepsilon(h_1)/\varepsilon(h_2))/\lg 2 \approx 4$ , 这与定理 4 中差分格式的收敛阶是  $O(\tau^2 + \sigma^4 + h^4)$  是一致的。从图 1 和表 1 可以看出, 数值结果与理论分析结果是一致的。

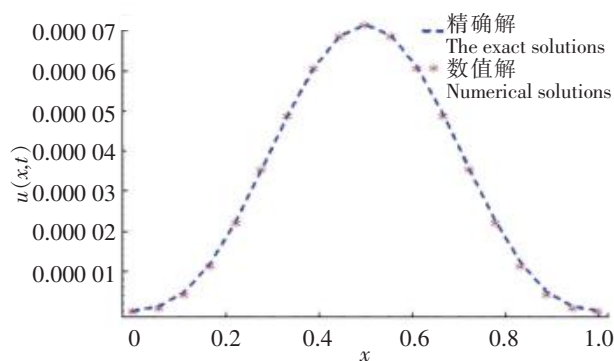


图 1 数值解与精确解比较( $\sigma=1/1\,000$ ,  $\tau=h^2=1/400$ ,  $T=1.0$ )

Fig.1 Comparison of numerical solutions and exact solutions( $\sigma=1/1\,000$ ,  $\tau=h^2=1/400$ ,  $T=1.0$ )

表 1  $T = 1.0$  时刻数值方法的最大误差和收敛阶 ( $\sigma = 1/1\,000$ ,  $\tau = h^2$ )

Tab.1 The maximum errors for the numerical method and the convergence orders ( $\sigma = 1/1\,000$ ,  $\tau = h^2$ ) at time  $T = 1.0$

$h$	$\tau$	$E_\infty(h, \tau)$	$R_\varepsilon$
1/5	1/25	$1.181 \times 10^{-4}$	—
1/10	1/100	$7.904 \times 10^{-6}$	3.901
1/20	1/400	$3.343 \times 10^{-7}$	4.564
1/40	1/1600	$1.522 \times 10^{-8}$	4.457

## 5 结论

本文发展了一个 Riesz 空间分布阶的分数阶扩散方程的数值方法。将分布阶方程离散为含有多项分数阶导数的微分方程, 利用有限差分法对得到的微分方程进行数值求解。证明差分格式是稳定的和无条件收敛的。此外, 本文的数值方法的收敛阶为  $O(\tau^2 + \sigma^4 + h^4)$ 。最后, 给出了数值例子来证明本文数值方法与理论结果是一致的。这种方法和分析技术可用于求解和分析其他类型的分数阶偏微分方程。

## [ 参 考 文 献 ]

- [1] HILFER R. Applications of fractional calculus in physics [M]. Singapore: World Scientific, 2000.
- [2] PODLUBNY I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications [M]. New York: Academic Press, 1999.
- [3] LIU F, BURRAGE K. Novel techniques in parameter estimation for fractional dynamical models arising from biological

- systems [J]. Computer & Mathematics with Application, 2011, 62: 822-833. DOI:10.1016/j.camwa.2011.03.002.
- [4] PLATANI M, GOLDBERG I, LAMOND A I, et al. Cajal body dynamics and association with chromatin are ATP-dependent [J]. Nat Cell Biol, 2002, 4(7): 502-509. DOI:10.1038/ncb809.
- [5] MURASE K, FUJIWARAT, UMEMURAY, et al. Ultrafine membrane compartments for molecular diffusion as revealed by single molecule techniques [J]. Biophys J, 2014, 86: 4075-4093. DOI:10.1529/biophysj.103.035717.
- [6] MEERSCHAERT M M, NANE E, VELLAISAMY P. Distributed-order fractional diffusions on bounded domains [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 379: 216-228. DOI:10.1016/j.jmaa.2010.12.056.
- [7] SOKOLOV I M, CHECHKIN A V, KLAFTER J. Distributed-order fractional kinetics [J]. Acta Phys Polon Series B, 2004, 35: 1323-1341. DOI:10.1103/PhysRevLett.92.133204.
- [8] EAB C H, LIM S C. Fractional Langevin equations of distributed order [J]. Physical Review, 2011, 83:1-10. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.031136.
- [9] JIAO Z, CHEN Y Q, PODLUBNY I. Distributed-order dynamic systems: stability, simulation, applications and perspectives [M]. London: Springer-Verlag, 2012. DOI:10.1007/978-1-4471-2852-6.
- [10] DIETHELM K, FORD N J. Numerical analysis for distributed-order differential equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 225: 96-104. DOI:10.1016/j.cam.2008.07.018.
- [11] ATANACKOVIC T M, PILIPOVIC S, ZORICA D. Existence and calculation of the solution to the time distributed order diffusion equation [J]. Phys Scr, 2009, 136: 1-6. DOI:10.1088/0031-8949/2009/T136/014012.
- [12] LUCHKO Y. Boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order [J]. Fract Calc Appl Anal, 2009, 12(4): 409-422.
- [13] PODLUBNY I, SKOVRANEK T, JARA B M V, et al. Matrix approach to discrete fractional calculus III: non-equidistant grids, variable step length and distributed orders [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2013, 371: 20120153. DOI:10.1098/rsta.2012.0153.
- [14] GORENFLO R, LUCHKO Y, STOJANOVIC M. Fundamental solution of a distributed order time-fractional diffusion-wave equation as probability density [J]. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2013, 16: 297-316. DOI:10.2478/s13540-013-0019-6.
- [15] KATSIKADILIS J T. Numerical solution of distributed order fractional differential equations [J]. Journal of Computational Physics, 2014, 259(1): 11-22. DOI:10.1016/j.jcp.2013.11.013.
- [16] SEMARYA M S, HASSANA H N, RADWANI A G. Modified methods for solving two classes of distributed order linear fractional differential equations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 323: 106-119. DOI:10.1016/j.amc.2017.11.047.
- [17] 郭柏灵, 蒲学科, 黄凤辉. 分数阶偏微分方程及其数值解 [M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [18] 刘发旺, 庄平辉, 刘青霞. 分数阶偏微分方程数值方法及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [19] HAO Z P, SUN Z Z, CAO W R. A fourth-order approximation of fractional derivatives with its applications [J]. Journal of Computational Physics, 2015, 281: 787-805. DOI:10.1016/j.jcp.2014.10.053.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)