[文章编号] 1007-7405(2021)03-0271-09 DOI:10.19715/j.jmuzr.2021.03.13

切换状态下随机 SIQR 模型

田竺艳，张树文，魏春金
（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 研究切换状态下具有饱和发病率的随机 SIQR 流行病模型，得到系统全局正解的存在唯一性和疾病灭绝的充分条件。通过构造合适的 Lyapunov 函数，证明系统解的正常返的存在性。最后，数值模拟验证了理论结果。

[关键词] 传染病模型；随机干扰；灭绝；正常返
[中图分类号] O 175.13

Stochastic SIQR Model Under Regime Switching

TIAN Zhuyan, ZHANG Shuwen, WEI Chunjin
(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, a stochastic SIQR model with saturated incidence was investigated under regime switching. The existence and uniqueness of the positive global solution of the system were proved, and sufficient conditions for extinction of the disease were obtained. By constructing a suitable Lyapunov function, the existence of positive recurrence of the system was proved. Finally, some numerical simulations were introduced to illustrate the theoretical results.

Keywords: epidemic model; random perturbation; extinction; positive recurrence

0 引言

传染病一直以来是威胁人类生命的第一杀手，它是医学界普遍关注的重要问题之一。宏观上，制定高效的控制措施是阻止传染病在人群中传播的首要战略选择。微观上，研制杀死细菌、病毒的药物和对疾病有免疫效果的疫苗是控制传染病的根本手段。近年来，越来越多的学者专注于传染病动力学的研究，而疾病传播模型是理论流行病学里最常用的一种数学模型，其中最经典的是 SIS 模型与 SIR 模型，后来许多学者在此基础上建立了更复杂但也更符合实际的模型[1-4]。通过建模，分析传染病控制措施和各种政策、措施的控制效果，研究其传播规律，为传染病控制提供可靠的控制策略。目前，隔离仍然是人类战胜突发传染病的主流手段[5]。因此，考虑对传染病人进行隔离控制具有重要意义。

文献［6］提出如下有隔离控制的随机 SIQR 流行病模型：

$$\begin{cases} \mathrm{d}S = [A - \mu S(t) - (\beta S(t)I(t))/(1+\alpha S(t))]\mathrm{d}t - (\sigma S(t)I(t))/(1+\alpha S(t))\mathrm{d}B, \\ \mathrm{d}I = [(\beta S(t)I(t))/(1+\alpha S(t)) - (\gamma+\delta+\mu+\mu_1)I(t)]\mathrm{d}t + (\sigma S(t)I(t))/(1+\alpha S(t))\mathrm{d}B, \\ \mathrm{d}Q = [\delta I(t) - (\theta+\mu+\mu_2)Q(t)]\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}R = [\gamma I(t) + \theta Q(t) - \mu R(t)]\mathrm{d}t。\end{cases} \tag{1}$$

[收稿日期] 2019-07-03
[基金项目] 福建省自然科学基金项目（2018J01418）
[作者简介] 田竺艳（1995—），女，硕士生，从事生物数学方向研究。通信作者：魏春金（1973—），女，教授，硕导，从事生物数学方向研究。E-mail:chunjinwei92@163.com

其中：$S(t)$、$I(t)$、$Q(t)$、$R(t)$ 分别表示 t 时刻易感者、感染者、隔离者和恢复者的数量；A 是人口输入率；β 表示单位时间内易感人群接触感染者的平均次数；α 是衡量对易感人群采取适当的防疫措施；μ 是自然死亡率；μ_1、μ_2 分别表示 I 和 Q 的疾病死亡率；γ、θ 分别表示从 I 到 R、从 Q 到 R 的恢复率；δ 表示隔离率；σ 是白噪声强度；$B(t)$ 是定义在完备概率空间上的标准布朗运动，并假设以上所有参数均为正数。当 $\sigma=0$ 时，文献［7］对其进行了详细的讨论，得到系统（1）有一个无病平衡点 $E_0=((A/\mu),0,0,0)$，基本再生数 $R_0=A\beta/[(A\alpha+\mu)(\delta+\gamma+\mu_1+\mu_2)]$。当 $R_0<1$ 时，无病平衡点 E_0 在不变集 $\Gamma=\{(S,I,Q,R)\in\mathbf{R}_+^4:[A/(\mu+\mu_1+\mu_2)]\}<S+I+Q+R<(A/\mu)$ 是全局渐近稳定的。然而当 $R_0>1$ 时，E_0 是不稳定的，并且存在唯一的地方病平衡态 $E^*=(S^*,I^*,Q^*,R^*)$ 是全局渐近稳定的。

事实上，传染病模型除了受到白噪声的影响外，也会受颜色噪声影响。因此，考虑颜色噪声如何影响传染病模型是非常重要的[8]。颜色噪声扰动会导致系统从一个环境状态转换到另一个环境状态，是在两个或两个以上不同环境状态下的转换。两个环境状态的转换通常是无记忆性的，并且对于下一次的等待时间是服从指数分布的，因此，状态切换可以应用连续时间马氏链 $r(t)_t\geqslant 0$ 并且取值于一个有限的状态空间 $\mathbb{S}=\{1,2,\cdots,\tilde{N}\}$ 来进行刻画。对于系统（1），进一步考虑颜色噪声，得到如下状态转换下的系统：

$$\begin{cases}\mathrm{d}S=[A(r(t))-\mu(r(t))S-(\beta(r(t))SI)/(1+\alpha(r(t))S)]\mathrm{d}t-(\sigma(r(t))SI)/(1+\alpha(r(t))S)\mathrm{d}B,\\ \mathrm{d}I=[(\beta(r(t))SI)/(1+\alpha(r(t))S)-(\gamma(r(t))+\delta(r(t))+\mu(r(t))+\mu_1(r(t)))I]\mathrm{d}t+\\ \qquad(\sigma(r(t))SI)/(1+\alpha(r(t))S)\mathrm{d}B,\\ \mathrm{d}Q=[\delta(r(t))I-(\theta(r(t))+\mu(r(t))+\mu_2(r(t)))Q]\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}R=[\gamma(r(t))I+\theta(r(t))Q-\mu(r(t))R]\mathrm{d}t。\end{cases}\tag{2}$$

易得，系统（2）的正不变集 $\Gamma^*=\{(S,I,Q,R)\in\mathbf{R}_+^4:[\hat{A}/(\check{\mu}+\check{\mu}_1+\check{\mu}_2)]<S+I+Q+R<(\check{A}/\mu)$。因此，本文考虑初值在 $(S(0),I(0),Q(0),R(0),r(0))\in\Gamma^*\times\mathbb{S}$，且 $N=S+I+Q+R$。

设 $(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant0},P)$ 为完备的概率空间，其中 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant0}$ 是 Ω 上的一个 $\sigma-$代数，且满足通常条件（右连续，$\mathscr{F}_0$ 包含所有的零测集），$r(t),t\geqslant0$ 是在完备概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant0},P)$ 的右连续马氏链，取值于有限的状态空间 $\mathbb{S}=\{1,2,\cdots,\tilde{N}\}$，对于每一个 $k\in\mathbb{S}$，$A(k)$，$\mu(k)$，$\beta(k)$，$\gamma(k)$，$\delta(k)$，$\theta(k)$，$\mu_1(k)$，$\mu_2(k)$，$\sigma(k)$ 都是正常数。

1 预备知识

记 $\mathbf{R}_+^4=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{R}^4:x_i>0,i=1,2,3,4\}$。对于任意向量 $\boldsymbol{g}=\{g(1),g(2),\cdots,g(\tilde{N})\}$，定义 $\check{g}=\max\limits_{k\in\mathbb{S}}\{g(k)\}$，$\hat{g}=\min\limits_{k\in\mathbb{S}}\{g(k)\}$。

假设有生成矩阵 $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}=(\gamma_{ij})_{\tilde{N}\times\tilde{N}}$ 由 $P\{\xi(t+\Delta)=j|\xi(t)=i\}=\begin{cases}\gamma_{ij}\Delta+o(\Delta), & i\neq j\\ 1+\gamma_{ii}\Delta+o(\Delta), & i=j\end{cases}$ 决定，这里 $\Delta t>0$，当 $i\neq j$ 时，$\gamma_{ij}\geqslant 0$ 是 i 到 j 的转移率。若 $\gamma_{ij}\geqslant0$，当 $i\neq j$ 时，$i,j=1,2,\cdots,\tilde{N}$。这一假设确保了马氏链 $r(t)$ 的不可约性，即马氏链 $r(t)$ 具有唯一的平稳分布 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\cdots,\pi_{\tilde{N}})$，使得

$$\boldsymbol{\pi}\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}=0,\sum_{k=1}^{\tilde{N}}\pi_k=1,\pi_k>0,k\in\mathbb{S}。\tag{3}$$

令 $(x(t),r(t))$ 表示由下列方程所描述的扩散过程

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=f(x(t),r(t))\mathrm{d}t+g(x(t),r(t))\mathrm{d}B(t),\\ x(0)=x_0,r(0)=r,\end{cases}\tag{4}$$

其中 $B(\cdot)$ 和 $r(\cdot)$ 分别表示上述讨论中的 d 维布朗运动和右连续的不可约的马氏链。$f(\cdot,\cdot):\mathbf{R}^n\times\mathbb{S}\to\mathbf{R}^n$，$g(\cdot,\cdot):\mathbf{R}^n\times\mathbb{S}\to\mathbf{R}^{n\times d}$，满足 $\sigma(x,k)\sigma^T(x,k)=(d_{ij}(x,k))$。对每一个 $k\in\mathbb{S}$，$V(\cdot,k)$ 是一

个 C^2 的函数，系统（4）的算子 L 满足：$\mathrm{LV}(x,k) = \sum_{i=1}^{\tilde{N}}\{f_i(x,k)[\partial V(x,k)/\partial x_i]\} + \sum_{i,j=1}^{\tilde{N}}\{d_{ij}(x,k)[\partial^2 V(x,k)/(\partial x_i \partial x_j)]\} + \sum_{l=1}^{\tilde{N}}[\gamma_{kl}V(x,k)]$。

引理 1[9]　设 $M = \{M_t\}_t \geqslant 0$ 是在 $t=0$ 时为零的实值连续局部鞅，则 $\lim_{t\to\infty}\langle M,M\rangle_t = 0$ a. s. $\Rightarrow \lim_{t\to\infty}[M_t/\langle M,M\rangle_t] = 0$ a. s.，以及 $\limsup_{t\to\infty}(\langle M,M\rangle_t/t) < \infty$ a. s. $\Rightarrow \limsup_{t\to\infty}(M_t/t) = 0$ a. s.。

根据广义 Itô 公式，如果 $x(t) \in \mathbf{R}^n$，则 $\mathrm{d}V(x(t),r(t)) = LV(x(t),r(t))\mathrm{d}t + V_x(x(t),r(t))g(t)\mathrm{d}B(t)$。

2　主要结果

定理 1　对任意给定的初值 $(S(0),I(0),Q(0),R(0),r(0)) \in \Gamma^* \times \mathbb{S}$，系统（2）在 $t\geqslant 0$ 中存在唯一解 $(S(t),I(t),Q(t),R(t),r(t)) \in \Gamma^* \times \mathbb{S}$，并且该解以概率 1 存在于 $\Gamma^* \times \mathbb{S}$ 中，即对所有 $t \geqslant 0,(S(t),I(t),Q(t),R(t),r(t)) \in \Gamma^* \times \mathbb{S}$, a. s.。

证明　显然，系统（2）满足局部 Lipschitz 条件，因此，对给定的初值 $(S(0),I(0),Q(0),R(0),r(0)) \in \Gamma^* \times \mathbb{S}$，在 $t \in [0,\tau_e)$ 时，系统存在唯一解 $(S(t),I(t),Q(t),R(t),r(t)) \in \Gamma^* \times \mathbb{S}$，$\tau_e$ 是爆破时间。因此通过 Itô 计算可得，系统（2）的唯一解是正解。

为了证明这个解是全局的，只需证明 $\tau_e = +\infty$。

令 $k_0 \geqslant 1$ 足够大，使得 $S(0),I(0),Q(0),R(0)$ 都在 $[(1/k_0),k_0]$ 区间里。对于任意的正数 $k \geqslant k_0$，定义停时序列 $\tau_k = \inf\{t \in [0,\tau_e) : \min\{S(t),I(t),Q(t),R(t)\} \leqslant (1/k)$ 或 $\max\{S(t),I(t),Q(t),R(t)\} \geqslant k\}$，定义 $\inf \mathbf{\Phi} = +\infty$（$\mathbf{\Phi}$ 代表一个空集）。显然，当 $k\to\infty$ 时，τ_k 是单调递增的，且 $\tau_k < \tau_e$，有 $\tau_\infty = \lim_{k\to+\infty}\tau_k$，其中 $\tau_\infty \leqslant \tau_e$ a. s.。因此，只需证明 $\tau_\infty \to \infty$ a. s.。

若 $\tau_\infty \nrightarrow \infty$，则存在常数 $T \geqslant 0, \varepsilon \in (0,1)$ 和一个整数 $k_1 \geqslant k_0$，有 $P\{\tau_k \leqslant T\} \geqslant \varepsilon, \forall k \geqslant k_1$。

定义一个 C^2－函数 $V:(S(t),I(t),Q(t),R(t),r(t)) \in \Gamma^* \times \mathbb{S} \to \mathbf{R}_+$, $V(S,I,Q,R) = S - 1 - \ln S + I - 1 - \ln I + Q - 1 - \ln Q + R - 1 - \ln R$。由 Itô 公式可得，$\mathrm{d}V(S,I,Q,R,r) = (1-1/S)[(A(r(t)) - \mu(r(t))S - (\beta(r(t))SI)/(1+\alpha(r(t))S))\mathrm{d}t - (\sigma(r(t))SI)/(1+\alpha(r(t))S)\mathrm{d}B(t)] + (\sigma^2(r(t))I^2)/(2(1+\alpha(r(t))S)^2)\mathrm{d}t + (1-1/I)[(\beta(r(t))SI)/(1+\alpha(r(t))S) - (\gamma(r(t)) + \delta(r(t)) + \mu(r(t)) + \mu_1(r(t)))I\mathrm{d}t + (\sigma(r(t))SI)/(1+\alpha(r(t))S)\mathrm{d}B(t)] + (\sigma^2(r(t))S^2)/[2(1+\alpha(r(t))S)^2]\mathrm{d}t + (1-1/Q)[\delta(r(t))I - (\theta(r(t)) + \mu(r(t)) + \mu_2(r(t)))Q]\mathrm{d}t + (1-1/R)[\gamma(r(t))I + \theta(r(t))Q - \mu(r(t))R]\mathrm{d}t = \mathrm{LV}\mathrm{d}t + (\sigma(r(t))I)/(1+\alpha(r(t))S)dB(t) - (\sigma(r(t))S)/(1+\alpha(r(t))S)\mathrm{d}B(t)$，其中 $LV:\Gamma^* \times \mathbb{S} \to \mathbf{R}_+$。定义为：$\mathrm{LV}(S,I,Q,R,k) = A(k) - \mu(k)S - \beta(k)SI/(1+\alpha(k)S) - A(k)/S + \mu(k) + \beta(k)I/(1+\alpha(k)S) + \beta(k)SI/(1+\alpha(k)S) - [\gamma(k) + \delta(k) + \mu(k) + \mu_1(k)]I - \beta(k)S/(1+\alpha(k)S) + \gamma(k) + \delta(k) + \mu(k) + \mu_1(k) + \delta(k)I - [\theta(k) + \mu(k) + \mu_2(k)]Q - \delta(k)I/Q + \theta(k) + \mu(k) + \mu_2(k) + \gamma(k)I + \theta(k)Q - \mu(k)R - \gamma(k)I/R - \theta(k)Q/R + \mu(k) + \sigma^2(k)I^2/[2(1+\alpha(k)S)^2] + \sigma^2(k)S^2/[2(1+\alpha(k)S)^2] \leqslant \check{A} + 4\check{\mu} + \check{\gamma} + \check{\delta} + \check{\theta} + \check{\mu}_1 + \check{\mu}_2 + \check{\sigma}^2\check{A}^2/\hat{\mu}^2 + \check{\sigma}^2/\hat{\alpha}^2 := K$。因此，可得 $\mathrm{d}V(S,I,Q,R,r) = K\mathrm{d}t + [\sigma(r(t))I/(1+\alpha(r(t))S) - (\sigma(r(t))S)/(1+\alpha(r(t))S)]\mathrm{d}B(t)$。将上式两边从 0 到 $\tau_k \wedge T$ 进行积分取期望可得，$E[V(S(\tau_k \wedge T),I(\tau_k \wedge T),Q(\tau_k \wedge T),R(\tau_k \wedge T),r(\tau_k \wedge T))] \leqslant V(S(0),I(0),Q(0),R(0),r(0)) + E\int_0^{\tau_k\wedge T}K\mathrm{d}s + E\int_0^{\tau_k\wedge T}[\sigma(r(t))I/(1+\alpha(r(t))S)]\mathrm{d}B(t) - E\int_0^{\tau_k\wedge T}[\sigma(r(t))S/(1+\alpha(r(t))S)]\mathrm{d}B(t) \leqslant V(S(0),I(0),Q(0),R(0),r(0)) + KT$。

设 $\Omega_k = \{\tau_k \leqslant T\}$。当 $k \geqslant k_1$ 时，由 $P\{\tau_k \leqslant T\} \geqslant \varepsilon, \forall k \geqslant k_1$，有 $P(\Omega_k) \geqslant \varepsilon$。由停时的定义，

把 k 和 $1/k$ 代入 $V(S(t),I(t),Q(t),R(t),r(t))$，易得：$V[S(\tau_k\wedge T),I(\tau_k\wedge T),Q(\tau_k\wedge T),R(\tau_k\wedge T),r(\tau_k\wedge T)]\geqslant\min\{k-1-\ln k,1/k-1+\ln k\}=Q$。则 $V(S(0),I(0),Q(0),R(0),r(0))+KT\geqslant E[V(S(\tau_k\wedge T),I(\tau_k\wedge T),Q(\tau_k\wedge T),R(\tau_k\wedge T),r(\tau_k\wedge T))]\geqslant\varepsilon Q$。当 $k\to\infty$ 时，可得 $\infty>V(S(0),I(0),Q(0),R(0),r(0))+KT=\infty$，与假设矛盾，即 $\tau_\infty=\infty$，a. s.。证毕。

定理 2　设 $(S(t),I(t),Q(t),R(t),r(t))$ 是系统（2）满足初始条件 $(S(0),I(0),Q(0),R(0),r(0))$ 的解，如果下列条件之一满足：ⅰ）$\sigma^2(k)>\max\{\beta^2(k)/[2(\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k))],[\beta^2(k)(\mu(k)+A(k)\alpha(k))]/A(k)\}$；ⅱ）$\sigma^2(k)<\{[\beta(k)(\mu(k)+A(k)\alpha(k))]/A(k)\}$，$R_0^s<1$，则 $\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=0$，a. s.，$\lim\limits_{t\to+\infty}Q(t)=0$，a. s.，以及 $\lim\limits_{t\to+\infty}R(t)=0$，a. s.。其中 $R_0^s=(\sum\limits_{k=1}^{\tilde N}\{\pi_k[A(k)\beta(k)/(\mu(k)+A(k)\alpha(k))]\})/(\sum\limits_{k=1}^{\tilde N}\pi_k[\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k)+(A^2(k)\sigma^2(k))/(2(\mu(k)+A(k)\alpha(k))^2)]\})$。

证明　由 Itô 公式可得，$\mathrm{d}\ln I=[\beta(r(t))S/(1+\alpha(r(t))S)-(\gamma(r(t))+\delta(r(t))+\mu(r(t))+\mu_1(r(t)))-\sigma^2(r(t))S^2/(2(1+\alpha(r(t))S)^2)]\mathrm{d}t+\sigma(r(t))S/[1+\alpha(r(t))S]\mathrm{d}B(t)=\varphi[S/(1+\alpha(r(t))S)]\mathrm{d}t+[\sigma(r(t))S/(1+\alpha(r(t))S)]\mathrm{d}B(t)$，其中 $\varphi(x)=\beta(k)x-(\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k))-(\sigma^2(k)x^2/2)$。

ⅰ）当 $[A(k)/(\mu(k)+A(k)\alpha(k))]>(\beta(k)/\sigma^2(k))$ 即 $\sigma^2(k)>[\beta(k)(\mu(k)+A(k)\alpha(k))/A(k)]$ 时，$\varphi[S/(1+\alpha(k)S)]=\beta(k)S/(1+\alpha(k)S)-(\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k))-\sigma^2(k)S^2/[2(1+\alpha(k)S)^2]=-(\sigma^2(k)/2)[S/(1+\alpha(k)S)-\beta(k)/\sigma^2(k)]^2+\beta^2(k)/(2\sigma^2(k))-(\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k))\leqslant\beta^2(k)/(2\sigma^2(k))-(\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k))$，$\mathrm{d}\ln I\leqslant[\beta^2(r(t))/(2\sigma^2(r(t)))-(\gamma(r(t))+\delta(r(t))+\mu(r(t))+\mu_1(r(t)))]\mathrm{d}t+\sigma(r(t))S/(1+\alpha(r(t))S)\mathrm{d}B(t)$。对上述不等式两边同时从 0 到 t 积分可得：$\ln I(t)-\ln I(0)\leqslant\int_0^t[\beta^2(r(s))/(2\sigma^2(r(s)))-(\gamma(r(s))+\delta(r(s))+\mu(r(s))+\mu_1(r(s)))]\mathrm{d}s+\int_0^t[\sigma(r(s))S/(1+\alpha(r(s))S)]\mathrm{d}B(s)$。两边同时除以 t，根据局部鞅的强大数定律，有 $\lim\limits_{t\to\infty}(1/t)\int_0^t[\sigma(r(s))S/(1+\alpha(r(s))S)]\mathrm{d}B(s)=0$。取上极限得，$\limsup\limits_{t\to\infty}(\ln I(t)/t)\leqslant\lim\limits_{t\to\infty}(1/t)\int_0^t[\beta^2(r(s))/(2\sigma^2(r(s)))]\mathrm{d}s-\lim\limits_{t\to\infty}(1/t)\int_0^t[\gamma(r(s))+\delta(r(s))+\mu(r(s))+\mu_1(r(s))]\mathrm{d}s$。由 $r(t)$ 的遍历性可得，$\limsup\limits_{t\to\infty}(\ln I(t)/t)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\tilde N}\{\pi_k[\beta^2(k)/(2\sigma^2(k))]\}-\sum\limits_{k=1}^{\tilde N}[\pi_k(\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k))]\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\tilde N}\{\pi_k[\beta^2(k)/(2\sigma^2(k))-(\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k))]\}$。由条件ⅰ）可得，$\limsup\limits_{t\to\infty}(\ln I(t)/t)<0$。

ⅱ）当 $\sigma^2(k)<\{[\beta(k)(\mu(k)+A(k)\alpha(k))]/A(k)\}$ 时，由于 $\varphi(x)$ 在 $x\in[0,\beta(k)/\sigma^2(k)]$ 是单调递增的，$\varphi[S/(1+\alpha(k)S)]\leqslant\varphi\{[A(k)/\mu(k)]/[1+\alpha(k)A(k)/\mu(k)]\}$，$\varphi\{[A(k)/\mu(k)]/[1+\alpha(k)A(k)/\mu(k)]\}=[A(k)\beta(k)/\mu(k)]/[1+\alpha(k)A(k)/\mu(k)]-(\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k))-[\sigma^2(k)A^2(k)/\mu^2(k)]/[2(1+\alpha(k)A(k)/\mu(k))^2]=A(k)\beta(k)/(\mu(k)+A(k)\alpha(k))-(\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k))-[A^2(k)\sigma^2(k)]/[2(\mu(k)+A(k)\alpha(k))^2]$。所以，$\mathrm{d}\ln I\leqslant[A(k)\beta(k)/(\mu(k)+A(k)\alpha(k))-(\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k))-[A^2(k)\sigma^2(k)]/[2(\mu(k)+A(k)\alpha(k))^2]]\mathrm{d}t+\sigma(r(t))S/(1+\alpha(r(t))S)\mathrm{d}B(t)$。对上述不等式两边同时从 0 到 t 积分可得，$\ln I(t)-\ln I(0)\leqslant\int_0^t[A(r(s))\beta(r(s))/(\mu(r(s))+A(r(s))\alpha(r(s)))-(\gamma(r(s))+\delta(r(s))+\mu(r(s))+\mu_1(r(s)))-A^2(r(s))\sigma^2(r(s))/(2(\mu(r(s))+A(r(s))\alpha(r(s)))^2)]\mathrm{d}s+\int_0^t[\sigma(r(s))S/(1+\alpha(r(s))S)]\mathrm{d}B(s)$。

两边同时除以 t，根据局部鞅的强大数定律，有 $\lim\limits_{t\to\infty}(1/t)\int_0^t[\sigma(r(s))S/(1+\alpha(r(s))S)]\mathrm{d}B(s)=0$。取上极限得，

$$\limsup_{t\to\infty}(\ln I(t)/t)\leqslant\lim_{t\to+\infty}(1/t)\int_0^t[A(r(s))\beta(r(s))/(\mu(r(s))+A(r(s))\alpha(r(s)))]\mathrm{d}s-\lim_{t\to+\infty}(1/t)\int_0^t[\gamma(r(s))+\delta(r(s))+\mu(r(s))+\mu_1(r(s))+A^2(r(s))\sigma^2(r(s))/(2(\mu(r(s))+A(r(s))\alpha(r(s)))^2)]\mathrm{d}s。\tag{5}$$

由 $r(t)$ 的遍历性，由式（5）可得，$\limsup\limits_{t\to\infty}(\ln I(t)/t)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\tilde N}\{\pi_k[A(k)\beta(k)/(\mu(k)+A(k)\alpha(k))]\}-\sum\limits_{k=1}^{\tilde N}\{\pi_k[(\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k))+A^2(k)\sigma^2(k)/(2(\mu(k)+A(k)\alpha(k))^2)]\}=\sum\limits_{k=1}^{\tilde N}\{\pi_k[(\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k))+A^2(k)\sigma^2(k)/(2(\mu(k)+A(k)\alpha(k))^2)]\}(R_0^s-1)<0,\text{a.s.}$。

由ⅰ）、ⅱ）可得 $\lim\limits_{t\to\infty}I(t)=0,\text{a.s.}$。

下面证明 $\lim\limits_{t\to+\infty}Q(t)=0,\text{a.s.}$，$\lim\limits_{t\to+\infty}R(t)=0,\text{a.s.}$。对于任意小的 $\varepsilon>0$，对 $t\geqslant t_0$ 和 $\Omega_\varepsilon=\{\omega\in\Omega:\lim\limits_{t\to\infty}I(t)=0\}$，存在 t_0 和 Ω_ε，使得 $P(\Omega_\varepsilon)\geqslant1-\varepsilon$ 和 $I\leqslant\varepsilon$。然后根据系统（2）可得：$\mathrm{d}Q\leqslant[\check\delta I-(\hat\theta+\hat\mu+\hat\mu_2)]\mathrm{d}t\leqslant[\check\delta\varepsilon-(\hat\theta+\hat\mu+\hat\mu_2)]\mathrm{d}t$。由 ε 的任意性，得 $\lim\limits_{t\to+\infty}Q(t)=0$。同理可得 $\lim\limits_{t\to+\infty}R(t)=0$。

定义1[8] 若对于 $\forall x\notin D,P(\tau_D<\infty)=1$，则带有初值 $X_0=x$ 的过程 X_t^x 是常返的，其中 τ_D 是对于过程 X_t^x 到达 D 的时间，即 $\tau_D=\inf\{t>0,X_t^x\in D\}$。对于 $\forall x\notin D$，若 $E(\tau_D)<\infty$ 时，则称 X_t^x 是正常返的。

定理3 对任意给定的初值 $(S(0),I(0),Q(0),R(0),r(0))\in\Gamma^*\times\mathbb{S}$，系统（2）在 $t\geqslant0$ 的解是 $(S(t),I(t),Q(t),R(t),r(t))\in\Gamma^*\times\mathbb{S}$，若 $R_0^s>1$，则 $(S(t),I(t),Q(t),R(t),r(t))$ 在 $D_\varepsilon\times\mathbb{S}$ 中是正常返的，其中 $\mathscr{L}=\check A/\hat\mu,L=\check A/(\hat\mu+\hat\mu_1+\hat\mu_2)$。$D_\varepsilon=\{(S,I,Q,R)\in\Gamma^*\times\mathbb{S}:\varepsilon\leqslant S\leqslant\mathscr{L},\varepsilon\leqslant I\leqslant\mathscr{L},\varepsilon^2\leqslant Q\leqslant\mathscr{L},\varepsilon^2\leqslant R\leqslant\mathscr{L},L+\varepsilon^3\leqslant S+I+Q+R\leqslant\mathscr{L}-\varepsilon^3\}$，$\varepsilon>0$ 是一个充分小的数。

证明 定义一个 C^2－函数 $\tilde V:\Gamma^*\times\mathbb{S}\to\mathbf{R}$ 如下：$\tilde V(S,I,Q,R)=M(-\ln I-\mathscr{C}_1\ln S+\mathscr{C}_2S-\mathscr{C}_3\omega(k))-\ln S-\ln Q-\ln R-\ln(S+I+Q+R-L)-\ln(\mathscr{L}-S-I-Q-R)$。很容易检验，由于 $\limsup\limits_{S+I+Q+R\to\mathscr{L}^-\text{or }S+I+Q+R\to L^+}\tilde V(S,I,Q,R,k)=+\infty$，$\tilde V(S,I,Q,R,k)$ 是 (S,I,Q,R) 的连续函数，因此在 $\Gamma^*\times\mathbb{S}$ 中，$\tilde V(S,I,Q,R)$ 存在唯一的最小值 $\tilde V(S_0(k),I_0(k),Q_0(k),R_0(k),k)$。

定义非负 C^2－函数 $V:\Gamma^*\times\mathbb{S}\to\mathbf{R}$ 如下：$V(S,I,Q,R,k)=\tilde V(S,I,Q,R,k)-\tilde V(S_0(k),I_0(k),Q_0(k),R_0(k),k)=M(-\ln I-\mathscr{C}_1\ln S+\mathscr{C}_2S-\mathscr{C}_3\omega(k))-\ln S-\ln Q-\ln R-\ln(S+I+Q+R-L)-\ln(L-S-I-Q-R)-\tilde V(S_0(k),I_0(k),Q_0(k),R_0(k),k)=MV_1+V_2+V_3+V_4+V_5+V_6$，其中：$V_1=-\ln I-\mathscr{C}_1\ln S+\mathscr{C}_2S-\mathscr{C}_3\omega(k)$；$V_2=-\ln S$；$V_3=-\ln Q$；$V_4=-\ln R$；$V_5=-\ln(S+I+Q+R-L)$；$V_6=-\ln(\mathscr{L}-S-I-Q-R)-\tilde V(S_0(k),I_0(k),Q_0(k),R_0(k),k)$；$\mathscr{C}_1=[\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k)+A^2(k)\sigma^2(k)/(2(A(k)\alpha(k)+\mu(k))^2)]/\mu(k)$；$\mathscr{C}_2=[\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k)+A^2(k)\sigma^2(k)/(2(A(k)\alpha(k)+\mu(k))^2)]/[A(k)+\mu(k)/\alpha(k)]$。且 $M>0$ 满足下列条件：$-M\mathscr{C}_3\sum\limits_{k=1}^{\tilde N}\{\pi_k[(\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k))+A^2(k)\sigma^2(k)/(2(A(k)\alpha(k)+\mu(k))^2)]\}(R_0^s-1)+\check\beta\check A/\hat\mu+\check\sigma^2\check A^2/(2\hat\mu^2)+\check\theta+5\check\mu+\check\mu_1+2\check\mu_2<-2$。应用广义Itô公式，$\mathrm{L}V_2=-(A(k)/S)+\beta(k)I/(1+\alpha(k)S)+\mu(k)+\sigma^2(k)I^2/(2(1+\alpha(k))^2)\leqslant-(A(k)/S)+(\beta(k)I/\mu)+\mu(k)+\sigma^2(k)I^2/(2\mu(k)^2)=-(\check A/S)+\check\beta\check A/\hat\mu+\check\mu+\check\sigma^2\check A^2/(2\hat\mu^2)$。

类似地，$\mathrm{L}V_3=-(\delta(k)I/Q)+\theta(k)+\mu(k)+\mu_2(k)\leqslant-(-\hat\delta I/Q)+\check\theta+\check\mu+\check\mu_2$。同样，$\mathrm{L}V_4=$

$-(\gamma(k)I/R)-(\theta(k)Q/R)+\mu(k)\leqslant-(\hat{\gamma}I/R)-(\hat{\theta}Q/R)+\check{\mu}$，那么，$LV_5=-[1/(S+I+Q+R-L)](A(k)-\mu(k)N-\mu_1(k)I-\mu_2(k)Q)=-[(\mu_1(k)(S+Q+R)+\mu_2(k)(S+I+R))/(N-L)]+\mu(k)+\mu_1(k)+\mu_2(k)\leqslant-[(\hat{\mu}_1(S+Q+R)+\hat{\mu}_2(S+I+R))/(N-L)]+\check{\mu}+\check{\mu}_1+\check{\mu}_2$，$LV_6=-\{[A(k)-\mu(k)N-\mu_1(k)I-\mu_2(k)Q]/[(A(k)/\mu(k))-N]\}=-\mu(k)-[(\mu_1(k)I+\mu_2(k)Q)/(A(k)/\mu(k))-N)]\leqslant-\hat{\mu}-[(\hat{\mu}_1I+\hat{\mu}_2Q)/(\mathscr{L}-N)]$。

下面计算 $V_1=-\ln I-\ell_1\ln S+\ell_2S-\ell_3w(k)$。记 $c_k=\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k)+A^2(k)\sigma^2(k)/(2(A(k)\alpha(k)+\mu(k))^2)$，$\ell_3=-3/\{[\beta(k)A(k)/(c_k(A(k)\alpha(k)+\mu(k)))]^{(2/3)}+[\beta(k)A(k)/(c_k(A(k)\alpha(k)+\mu(k)))]^{(1/3)}+1\}$。$LV_1=-[\beta(k)S/(1+\alpha(k)S)]+\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k)+\sigma^2(k)S^2/[2(1+\alpha(k)S)^2]-(\ell_1A(k)/S)+\ell_1\beta(k)I/(1+\alpha(k)S)+\ell_1\mu(k)+\ell_1\sigma^2(k)I^2/[2(1+\alpha(k)S)^2]+\ell_2[A(k)-(\beta(k)SI/(1+\alpha(k)S))-((\mu(k)(1+\alpha(k)S-1))/\alpha(k))]-\ell_3\sum_{k=1}^{\tilde{N}}(\gamma_{kl}\omega(l))=-[\beta(k)S/(1+\alpha(k)S)]+\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k)+\sigma^2(k)S^2/[2(1+\alpha(k)S)^2]-(\ell_1A(k)/S)+\ell_1\beta(k)I/(1+\alpha(k)S)+\ell_1\mu(k)+\ell_1\sigma^2(k)I^2/[2(1+\alpha(k)S)^2]+\ell_2[A(k)-(\beta(k)SI/(1+\alpha(k)S))+(\mu(k)/\alpha(k))]-\ell_2[(\mu(k)(1+\alpha(k)S))/\alpha(k)]-\ell_3\sum_{k=1}^{\tilde{N}}(\gamma_{kl}\omega(l))\leqslant-3\sqrt[3]{[\beta(k)S/(1+\alpha(k)S)](\ell_1A(k)/S)[(\ell_2\mu(k)(1+\alpha(k)S)/\alpha(k)]}+3c_k+\ell_1\beta(k)I+(\ell_1\sigma^2(k)I^2)/2-\ell_3\sum_{k=1}^{\tilde{N}}(\gamma_{kl}\omega(l))=-3\sqrt[3]{[\beta(k)A(k)c_k^2/(A(k)\alpha(k)+\mu(k))]}+3c_k+\ell_1\beta(k)I+(\ell_1\sigma^2(k)I^2)/2-\ell_3\sum_{k=1}^{\tilde{N}}(\gamma_{kl}\omega(l))=-3c_k(\sqrt[3]{[\beta(k)A(k)]/[(A(k)\alpha(k)+\mu(k))c_k]}-1)+\ell_1\beta(k)I+(\ell_1\sigma^2(k)I^2)/2-\ell_3\sum_{k=1}^{\tilde{N}}(\gamma_{kl}\omega(l))=-\ell_3[(\beta(k)A(k)/(A(k)\alpha(k)+\mu(k))-c_k)+\sum_{k=1}^{\tilde{N}}(\gamma_{kl}\omega(l))]+\ell_1\beta(k)I+(\ell_1\sigma^2(k)I^2)/2=-\ell_3\sum_{k=1}^{\tilde{N}}(\pi_kR_0(k))+\ell_1\beta(k)I+(\ell_1\sigma^2(k)I^2)/2$，这里 $\bar{R}_0(k)=\beta(k)A(k)/(A(k)\alpha(k)+\mu(k))-\gamma(k)-\delta(k)-\mu(k)-\mu_1(k)-[A^2(k)\sigma^2(k)/(2(A(k)\alpha(k)+\mu(k))^2)]$。

因为生成矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是不可约的，因而对 $\bar{\boldsymbol{R}}_0=(\bar{R}_0(1),\bar{R}_0(2)...\bar{R}_0(\tilde{N}))^{\mathrm{T}}$，满足下列泊松方程 $\boldsymbol{\Gamma}\omega=\sum_{h=1}^{\tilde{N}}(\pi_h\bar{R}_0(h)(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}})-\bar{R}_0$，其中 $\omega=(\omega(1),\omega(2),\cdots,\omega(\tilde{N}))$。则 $\sum_{k=1}^{\tilde{N}}(\gamma_{kl}\omega(l))-\bar{\boldsymbol{R}}_0(k)=\sum_{k=1}^{\tilde{N}}(\pi_k\bar{R}_0(k))$，所以 $LV_1\leqslant-\ell_3\sum_{k=1}^{\tilde{N}}\{\pi_k[\beta(k)A(k)/(A(k)\alpha(k)+\mu(k))-(\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k)+A^2(k)\sigma^2(k)/(2(A(k)\alpha(k)+\mu(k))^2))]\}+\ell_1\beta(k)I+\ell_1\sigma^2(k)I^2/2=-\ell_3\sum_{k=1}^{\tilde{N}}\{\pi_k(\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k)+A^2(k)\sigma^2(k)/(2(A(k)\alpha(k)+\mu(k))^2))\}(R_0^s-1)+\ell_1\beta(k)I+\ell_1\sigma^2(k)I^2/2$。

综上，$LV<-M\ell_3\sum_{k=1}^{\tilde{N}}\{\pi_k[\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k)+A^2(k)\sigma^2(k)/(2(A(k)\alpha(k)+\mu(k))^2)]\}(R_0^s-1)+M\ell_1\check{\beta}I+M(\ell_1\check{\sigma}^2I^2/2)-(\check{A}/S)+(\check{\beta}\check{A}/\hat{\mu})+\check{\mu}+\check{\sigma}^2\check{A}^2/(2\hat{\mu}^2)-(\hat{\delta}I/Q)+\check{\theta}+\check{\mu}+\check{\mu}_2-(\hat{\gamma}I/R)-(\hat{\theta}Q/R)+\check{\mu}-(\hat{\mu}_1(S+Q+R)+\hat{\mu}_2(S+I+R))/(N-L)+\check{\mu}+\check{\mu}_1+\check{\mu}_2+\check{\mu}-(\hat{\mu}_1I+\hat{\mu}_2Q)/(\mathscr{L}-N)$。

定义有界闭集：$D_\varepsilon=\{(S,I,Q,R)\in\Gamma^*\times\mathbb{S}:\varepsilon\leqslant S\leqslant\mathscr{L},\varepsilon\leqslant I\leqslant\mathscr{L},\varepsilon^2\leqslant Q\leqslant\mathscr{L},\varepsilon^2\leqslant R\leqslant\mathscr{L},L+\varepsilon^3\leqslant S+I+Q+R\leqslant\mathscr{L}-\varepsilon^3\}$，其中 $\varepsilon>0$ 是一个充分小的数。在 $\Gamma^*\setminus D_\varepsilon$ 集合中，选择充分小的 ε，使得下面条件成立：$-2+\ell_1M\check{\beta}\mathscr{L}+(M\ell_1\check{\sigma}^2\mathscr{L}^2/2)-(\check{A}/\hat{\varepsilon})\leqslant-1$，$\ell_1M\check{\beta}\varepsilon+(M\ell_1\check{\sigma}^2\varepsilon^2/2)-2\leqslant-1$，$\ell_1\check{M}\beta\mathscr{L}+(M\ell_1\check{\sigma}^2\mathscr{L}^2/2)-(\hat{\delta}/\varepsilon)-2\leqslant-1$，$\ell_1\check{M}\beta\mathscr{L}+(M\ell_1\check{\sigma}^2\mathscr{L}^2/2)-(\hat{\gamma}/\varepsilon)-2\leqslant-1$，$\ell_1\check{M}\beta\mathscr{L}+$

$(M\ell_1\check{\sigma}^2\mathscr{L}^2/2) - [\hat{\mu}_1(\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^2)+\hat{\mu}^2(\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^2)]/\varepsilon^3-2\leqslant -1$, $\ell_1\check{M}\beta\mathscr{L}+(M\ell_1\check{\sigma}^2\mathscr{L}^2/2)-(\hat{\mu}_1\varepsilon+\hat{\mu}_2\varepsilon^2)/\varepsilon^3-2\leqslant -1$。为了方便起见，将 $\Gamma^*\setminus D_\varepsilon$ 划分为 6 个区域：$D_1=\{(S,I,Q,R)\in\Gamma^*:0<S<\varepsilon\}$，$D_2=\{(S,I,Q,R)\in\Gamma^*:0<I<\varepsilon\}$，$D_3=\{(S,I,Q,R)\in\Gamma^*:0<Q<\varepsilon^2,I\geqslant\varepsilon\}$，$D_4=\{(S,I,Q,R)\in\Gamma^*:0<R<\varepsilon^2,I\geqslant\varepsilon\}$，$D_5=\{(S,I,Q,R)\in\Gamma^*:L<S+I+Q+R<L+\varepsilon^3,S\geqslant\varepsilon,I\geqslant\varepsilon,Q\geqslant\varepsilon^2,R\geqslant\varepsilon^2\}$，$D_6=\{(S,I,Q,R)\in\Gamma^*:\mathscr{L}-\varepsilon^3<S+I+Q+R<\mathscr{L},S\geqslant\varepsilon,I\geqslant\varepsilon,Q\geqslant\varepsilon^2,R\geqslant\varepsilon^2\}$。

下面将证明对任何 $\Gamma^*\setminus D_\varepsilon, LV(S,I,Q,R)\leqslant -1$，即验证在这 6 个区域中，$\mathrm{LV}(S,I,Q,R)\leqslant -1$。

在 D_1 中，$\mathrm{LV}\leqslant M\ell_1\check{\beta}I+M(\ell_1\check{\sigma}^2I^2/2)-(\check{A}/S)-(\hat{\delta}I/Q)-(\hat{\gamma}I/R)-(\hat{\theta}Q/R)-(\hat{\mu}_1(S+Q+R)+\hat{\mu}_2(S+I+R))/(N-L)-(\hat{\mu}_1I+\hat{\mu}_2Q)/(\mathscr{L}-N)-2\leqslant -2+\ell_1M\check{\beta}\mathscr{L}+(M\ell_1\check{\sigma}^2\mathscr{L}^2/2)-(\check{A}/\hat{\varepsilon})\leqslant -1$。在 D_2 中，$\mathrm{LV}\leqslant M\ell_1\check{\beta}I+M(\ell_1\check{\sigma}^2I^2/2)-(\check{A}/S)-(\hat{\delta}I/Q)-(\hat{\gamma}I/R)-(\hat{\theta}Q/R)-(\hat{\mu}_1(S+Q+R)+\hat{\mu}_2(S+I+R))/(N-L)-(\hat{\mu}_1I+\hat{\mu}_2Q)/(\mathscr{L}-N)-2\leqslant \ell_1M\check{\beta}\varepsilon+(M\ell_1\check{\sigma}^2\varepsilon^2/2)-2\leqslant -1$。在 D_3 中，$\mathrm{LV}\leqslant M\ell_1\check{\beta}I+M(\ell_1\check{\sigma}^2I^2/2)-(\check{A}/S)-(\hat{\delta}I/Q)-(\hat{\gamma}I/R)-(\hat{\theta}Q/R)-(\hat{\mu}_1(S+Q+R)+\hat{\mu}_2(S+I+R))/(N-L)-(\hat{\mu}_1I+\hat{\mu}_2Q)/(\mathscr{L}-N)-2\leqslant \ell_1M\check{\beta}\mathscr{L}+(M\ell_1\check{\sigma}^2\mathscr{L}^2/2)-(\hat{\delta}/\varepsilon)-2\leqslant -1$。在 D_4 中，$\mathrm{LV}\leqslant M\ell_1\check{\beta}I+M(\ell_1\check{\sigma}^2I^2/2)-(\check{A}/S)-(\hat{\delta}I/Q)-(\hat{\gamma}I/R)-(\hat{\theta}Q/R)-(\hat{\mu}_1(S+Q+R)+\hat{\mu}_2(S+I+R))/(N-L)-(\hat{\mu}_1I+\hat{\mu}_2Q)/(\mathscr{L}-N)-2\leqslant \ell_1M\check{\beta}L+(M\ell_1\check{\sigma}^2\mathscr{L}^2/2)-(\hat{\gamma}/\varepsilon)-2\leqslant -1$。在 D_5 中，$\mathrm{LV}\leqslant M\ell_1\check{\beta}I+M(\ell_1\check{\sigma}^2I^2/2)-(\check{A}/S)-(\hat{\delta}I/Q)-(\hat{\gamma}I/R)-(\hat{\theta}Q/R)-(\hat{\mu}_1(S+Q+R)+\hat{\mu}_2(S+I+R))/(N-L)-(\hat{\mu}_1I+\hat{\mu}_2Q)/(\mathscr{L}-N)-2\leqslant \ell_1M\check{\beta}\mathscr{L}+(M\ell_1\check{\sigma}^2\mathscr{L}^2/2)-[\hat{\mu}_1(\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^2)+\hat{\mu}_2(\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^2)]/\varepsilon^3-2\leqslant -1$。在 D_6 中，$\mathrm{LV}\leqslant M\ell_1\check{\beta}I+M(\ell_1\check{\sigma}^2I^2/2)-(\check{A}/S)-(\hat{\delta}I/Q)-(\hat{\gamma}I/R)-(\hat{\theta}Q/R)-(\hat{\mu}_1(S+Q+R)+\hat{\mu}_2(S+I+R))/(N-\boldsymbol{L})-(\hat{\mu}_1I+\hat{\mu}_2Q)/(\mathscr{L}-N)-2\leqslant \ell_1M\check{\beta}\mathscr{L}+(M\ell_1\check{\sigma}^2\mathscr{L}^2/2)-(\hat{\mu}_1\varepsilon+\hat{\mu}_2\varepsilon^2)/\varepsilon^3-2\leqslant -1$。因此，综上 6 种情况可得，对于一个充分小的 $\varepsilon>0$，且对所有的 $(S,I,Q,R,k)\in\Gamma^*\setminus D_\varepsilon\times\mathbb{S}$，$\mathrm{LV}(S,I,Q,R)\leqslant -1$。于是得到 $E[V(S(\tau_D),I(\tau_D),Q(\tau_D),R(\tau_D),r(\tau_D))]-V(S(0),I(0),Q(0),R(0),r(0))=E\int_0^{\tau_D}\mathrm{LV}(S(t),I(t),Q(t),R(t),r(t))\mathrm{d}t\leqslant E(-\tau_D)$。因为 V 是正定的，可得 $E(\tau_D)\leqslant V(S(0),I(0),Q(0),R(0),r(0))$。证毕。

3 数值模拟

为了验证结果的正确性，采用 Milstein 高阶方法[10]对随机系统（2）进行数值模拟。

例 1 考虑 $\tilde{N}=2$。马氏链的生成矩阵如下：$\boldsymbol{\Gamma}=\begin{pmatrix}-5 & 5\\ 5 & -5\end{pmatrix}$，其中 $r(t)$ 是从 $\mathbb{S}=\{1,2\}$ 中取值的右连续的马氏链。通过解线性方程（3），可以得到唯一的概率分布 $\pi=(\pi_1,\pi_2)=(0.5,0.5)$。

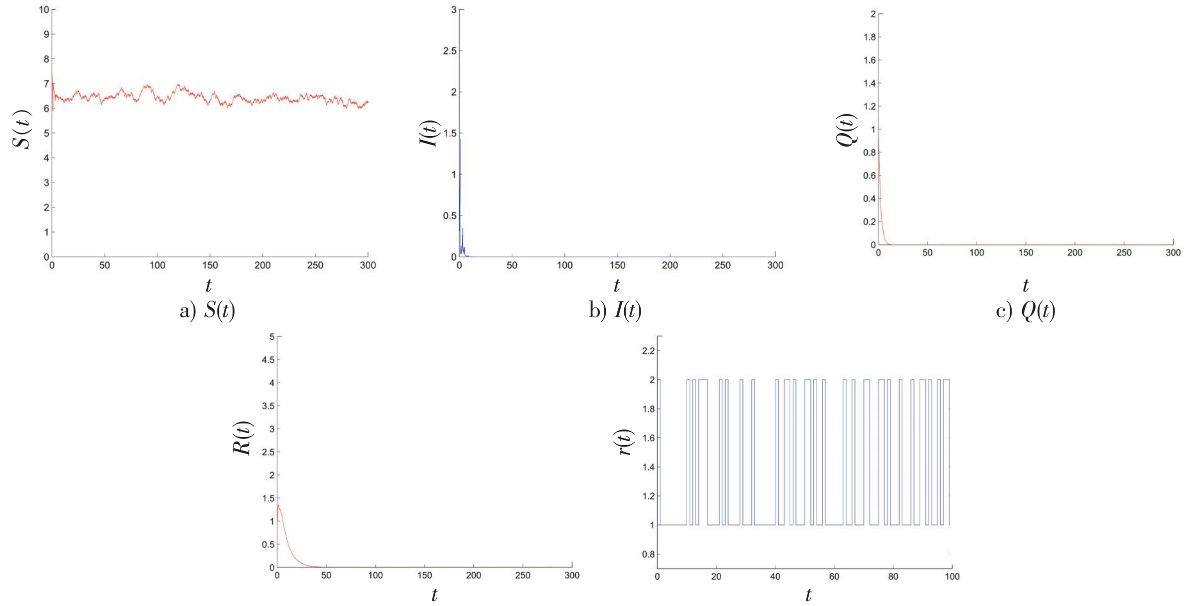
选择两组参数：$A(1)=0.8,\beta(1)=0.6,\alpha(1)=0.5,\gamma(1)=0.3,\theta(1)=0.3,\delta(1)=0.3,\mu(1)=0.1,\mu_1(1)=0.2,\mu_2(1)=0.15$；$A(2)=0.9,\beta(2)=0.9,\alpha(2)=0.4,\gamma(2)=0.2,\theta(2)=0.2,\delta(2)=0.2,\mu(2)=0.2,\mu_1(2)=0.3,\mu_2(1)=0.25$。

1）取 $\sigma(1)=0.8$，$\sigma(2)=1.2$，通过简单地计算可得定理 2 中的第ⅰ)个条件，即 $\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=0$ a. s. 以及 $\lim\limits_{t\to+\infty}Q(t)=0$, a. s.，$\lim\limits_{t\to+\infty}R(t)=0$, a. s.，见图 1。

2）取 $\sigma(1)=0.45$，$\sigma(2)=0.9$，直接计算可以得到 $R_0^s=[\sum_{k=1}^{\tilde{N}}\pi_k(\beta^2(k)/2\sigma^2(k))]/[\sum_{k=1}^{\tilde{N}}\pi_k(\gamma(k)+\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k))]=0.669<1$，定理 2 中的第ⅱ)个要求符合，即 $\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=0$, a. s.，$\lim\limits_{t\to+\infty}Q(t)=0$, a. s.，$\lim\limits_{t\to+\infty}R(t)=0$, a. s.，见图 2。

3）取 $\sigma(1)=0.12$，$\sigma(2)=0.2$，容易得到 $R_0^s=[\sum_{k=1}^{\tilde{N}}\pi_k(\beta^2(k)/2\sigma^2(k))]/[\sum_{k=1}^{\tilde{N}}\pi_k(\gamma(k)+$

$\delta(k)+\mu(k)+\mu_1(k))]=1.3679>1$，定理3 成立，即系统（2）的解 $(S(t),I(t),Q(t),R(t),r(t))$ 是正常返的，见图 3。显然可以看出疾病 I 是平均持续生存的。

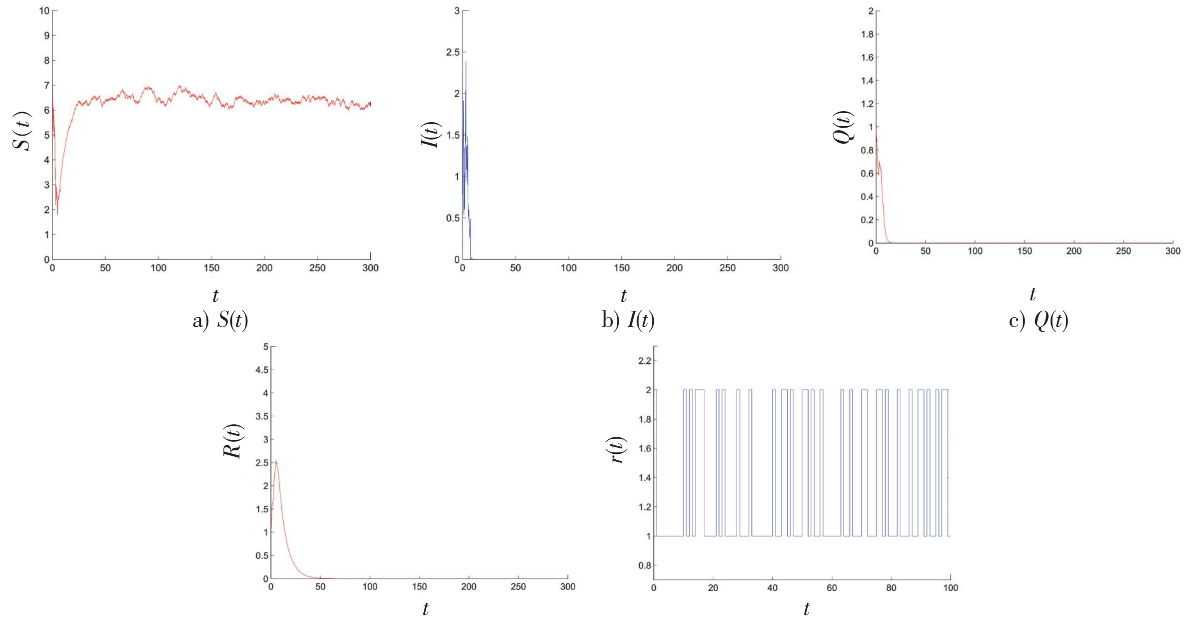


a) $S(t)$　b) $I(t)$　c) $Q(t)$

d) $R(t)$　e) $r(t)$

图 1　系统(2)的解（$\sigma(1)$=0.8,$\sigma(2)$=1.2）

Fig.1　The solution of system (2)（$\sigma(1)$=0.8,$\sigma(2)$=1.2）



a) $S(t)$　b) $I(t)$　c) $Q(t)$

d) $R(t)$　e) $r(t)$

图 2　系统(2)的解（$\sigma(1)$=0.45,$\sigma(2)$=0.9）

Fig.2　The solution of system (2)（$\sigma(1)$=0.45,$\sigma(2)$=0.9）

图 1 ~ 图 3 给出了不同随机扰动强度下系统（2）的动力学行为。由图 1 和图 2 可知，随着噪声强度 $\sigma(1)$、$\sigma(2)$ 的减小，系统（2）的平均灭绝时间在变长，噪声越强，疾病的灭绝时间越短；而从图 1 ~ 图 3 可知，当 $\sigma(1)$、$\sigma(2)$ 强度减小时，疾病从灭绝到平均持久。

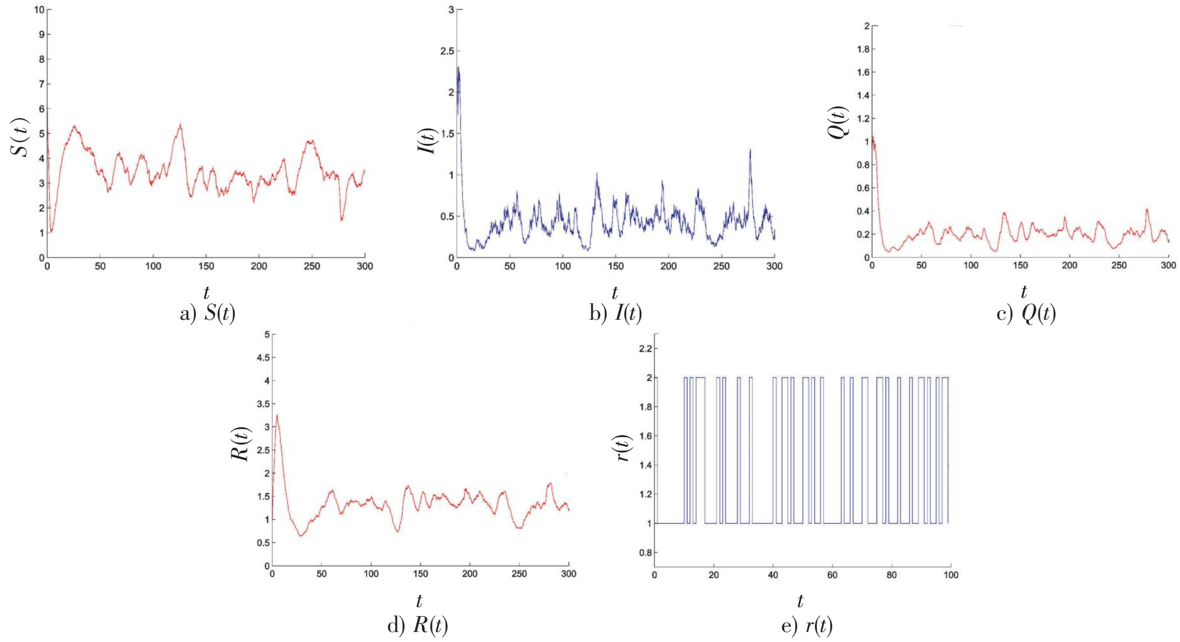


图 3　系统(2)的解($\sigma(1)=0.12,\sigma(2)=0.2$)

Fig.3　The solution of system (2) ($\sigma(1)=0.12,\sigma(2)=0.2$)

4　结论

本文研究了白噪声和颜色噪声扰动下具有饱和发病率的随机 SIQR 流行病模型，建立了疾病灭绝的充分条件。通过构造合适的 Lyapunov 函数证明了解的正常返，同时得到了疾病是否灭绝的阈值 R_0^s：当 $R_0^s>1$，系统（2）的解 $(S(t),I(t),Q(t),R(t),r(t))\in\Gamma^*\times\mathbb{S}$ 是正常返的，即疾病是平均持续生存的；当 $R_0^s<1$ 且 $\sigma^2(k)<\{[\beta(k)(\mu(k)+A(k)\alpha(k))]/A(k)\}$ 时，疾病是灭绝的。由此可知，噪声强度过大时，疾病趋于灭绝，也就是大噪声会抑制疾病的流行；当噪声强度较小时，疾病可以平均持续生存。因此，噪声对疾病传播控制是有利的。

[参考文献]

[1] 张利凤. 传染病传播的确定模型与随机模型的比较及参数估计［D］. 成都：西南交通大学，2010.

[2] LIU Q. The threshold of a stochastic susceptible-infective epidemic model under regime switching［J］. Nonlinear Analysis，2016，21：49-58. DOI:10.1016/j.nahs.2016.01.002.

[3] LAN G J，HUANG Y L，WEI C J，et al. A stochastic SIS epidemic model with saturating contact rate［J］. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，2019，529：121504. DOI:10.1016/j.physa.2019.121504.

[4] 刘群，陈清梅. 具有疫苗接种和暂时性免疫随机延迟的 SIR 传染病模型［J］. 中国科学：数学，2016，46(11)：1745-1756.

[5] 张小兵. 具有随机因素及媒体宣传的 SIQS 传染病模型的动力学研究［D］. 兰州：兰州理工大学，2018.

[6] HIMANSHU J，RADHIKA S，DHAVAL G P. Global dynamics of an SIQR epidemic model with staurated incidence rate［J］. Asian J Math Comput Res，2017，21(4)：156-166.

[7] LAN G J，CHEN Z W，WEI C J，et al. Stationary distribution of a stochastic SIQR epidemic model with saturated incidence and degenerate diffusion［J］. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，2018，511：61-77.

[8] LIU Q，JIANG D Q，SHI N Z. Threshold behavior in a stochastic SIQR epidemic model with standard incidence and regime switching［J］. Appl Math Comput，2018，316：310-325. DOI:10.1016/j.amc.2017.08.042.

[9] 王克. 随机生物数学模型［M］. 北京：科学出版社，2010.

[10] HIHJAM D. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations［J］. SIAM Review，2001，43(3)：525-546. DOI:10.1137/s0036144500378302.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）