[文章编号] 1007－7405(2021)04－0374－05 DOI:10.19715/j.jmuzr.2021.04.11

一类含有扰动项的 Kirchhoff 型方程解的多重性

汤碧云，蓝永艺

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 考虑含有扰动项的非线性 Kirchhoff 型问题 $-(a+b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x)\Delta u=f(x,u)+h(x)$。在非线性项 f 适当的假设条件下，利用 Nehari 流形、临界点理论和一些分析技巧，研究一类含有扰动项的 Kirchhoff 型方程解的多重性。

[关键词] Kirchhoff 型方程；Nehari 流形；扰动项；临界点理论

[中图分类号] O 177.91

Multiplicity of Solutions to a Class of Kirchhoff Type Equation with Perturbation Terms

TANG Biyun, LAN Yongyi

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: This paper is dedicated to study the nonlinear Kirchhoff type problem with perturbation terms $-(a+b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x)\Delta u=f(x,u)+h(x)$. Under suitable assumptions on the nonlinear term f, it was shown that the Kirchhoff type equation with perturbation terms had multiplicity of solutions by Nehari manifold, critical point theory and some analysis techniques.

Keywords: Kirchhoff type equation; Nehari manifold; perturbation terms; critical point theory

0 引言

考虑如下 Kirchhoff 型方程的 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases}-(a+b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x)\Delta u=f(x,u)+h(x),x\in\Omega,\\ u=0,x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

其中：Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的非空有界开集；$a,b>0$；$f(x,t)\in C(\Omega\times\mathbf{R})$；Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)\triangleq X$ 中的范数 $\|u\|=(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^{1/2}$。

问题（1）的解等价于其对应的能量泛函 $I(u)=a\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x/2+b(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^2/4-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x$ 的临界点，其中 $F(x,u)=\int_0^u f(x,s)\mathrm{d}s$。

[收稿日期] 2019－07－10
[基金项目] 福建省自然科学基金项目（2020J01708）
[作者简介] 汤碧云（1993—），女，硕士生，从事非线性泛函分析方向研究。通信作者：蓝永艺（1977—），男，副教授，博士，从事非线性泛函分析方向研究。E-mail：lanyongyi@jmu.edu.cn

易知 $I \in C^1(X,R)$，且对 $\forall u,v \in X$，$\langle I'(u),v\rangle = (a+b\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x,u)v\,\mathrm{d}x - \int_\Omega h(x)v\mathrm{d}x$。

问题（1）中的 $\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x$ 使得（1）不再是点态恒等式，而是非局部的，这种现象在生物系统中得到了广泛应用，也激发了很多学者对这类问题进行相关研究，其中对不含扰动项的研究比较多，如：文献［1］用变分法理论得到了方程有正解；文献［2］运用 Yang 指标和临界群的相关知识得到方程有非平凡解；文献［3］使用极大极小值定理以及构造恰当的不变集得到了具有变号解；文献［4－5］由局部极大极小方法以及山路引理等理论，得到方程具有多个非平凡解；文献［6－7］通过假设 f 的单调性探讨方程解的情况；文献［8］通过弱化非线性项 $f(x,u)$ 研究了一类 Kirchhoff 型方程的解存在性问题；文献［9］运用单调性技巧研究了一类 Kirchhoff 型方程的基态解的稳定性；文献［10］通过弱化非线性项 $f(x,u)$ 的条件得到方程的基态解。

受文献［11］的启发，本文在一般的 Kirchhoff 型方程中加入干扰项，形成问题（1），而且将一般的次临界条件以及 AR 条件弱化为条件 F_1）和 F_2），再结合 Nehari 流形，可以得到方程具有多重解。本文考虑一类非线性项 $f(x,u)$ 具有更一般的增长性条件，假设：

F_1）$\lim\limits_{|u|\mapsto\infty}[f(x,u)/(u|u|^{2^*-2})] = \lim\limits_{|u|\mapsto\infty}[f(x,u)/u^5] = 0$ 关于 $x \in \Omega$ 一致成立，其中 $2^* = 2N/(N-2) = 6$ 为 Sobolev 临界指数；F_2）$\lim\limits_{|u|\mapsto 0}(f(x,u)/u^3) = 0$ 关于 $x\in\Omega$ 一致成立；F_3）$\mathrm{d}f(x,u)/\mathrm{d}u|_{u=0}=0$，$\forall x\in\Omega$ 一致成立；F_4）存在常数 $r>0$ 和 $C>0$，使得当 $|t|\geqslant r$ 时，$uf(x,u)-4F(x,u)\geqslant -Cu^2$ 关于 $x\in\Omega$ 一致成立；F_5）$\lim\limits_{u\to+\infty}(F(x,u)/u^4) = +\infty$ 关于 $x\in\Omega$ 一致成立。

1　预备知识

$\forall q\geqslant 1$，定义 $\|u\|_q = (\int_\Omega |u|^q\,\mathrm{d}x)^{1/q}$。由 Sobolev 嵌入定理知，$\|u\|_q \leqslant c_q\|u\|$，其中 $c_q>0$ 为最佳 Sobolev 嵌入常数。

定义以下正数：$d_1 = (a/((2^*-1)C_\varepsilon c_{2^*}^{2^*}))^{1/(2^*-2)}$，$d_2 = (ad_1^2/(2C_\varepsilon c_{2^*}^{2^*}))^{1/2^*}$，$d_3 = \min\{d_1, d_2/c_{2^*}\}/2$。显然 $d_3<d_1$。

假设 $u\neq 0$ 是 I 的一个临界点，即 $I'(u)v = 0, \forall v\in X$，则 u 包含在以下集合

$$N = \{u \in X\setminus\{0\}:(a+b\|u\|^2)\|u\|^2 = \int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x\} \tag{2}$$

中，这个集合称为 Nehari 流形。由文献［9－10］知，在一定条件下，该流形微分同胚于 X 的单位球面。

考虑 N 的一个子集：

$$N_h = \{u\in X: I'(u)u = 0, \|u\|>d_1\}。\tag{3}$$

在条件 F_1）～ F_5）的假设下，给出了以下的几个引理。

引理 1　$\lim\limits_{u\to 0}F(x,u)/u^4 = 0$ 关于 $x\in\Omega$ 一致成立，$F(x,u)\geqslant A|u|^4 - B$，$\forall u\in\mathbf{R}, \forall x\in\Omega$，其中 A，B 为正常数。

证明　由 F_5）知，$\forall A>0, \exists X$，当 $u>X$ 时，有 $F(x,u)\geqslant Au^4$，又因为 $F(x,u)\in C(\Omega)$，所以 $\exists B>0$，使得 $F(x,u)>-B$。综上，$\forall u\in\mathbf{R}$，$\forall x\in\Omega$，$F(x,u)\geqslant Au^4-B$。

引理 2　$\forall 0<\varepsilon<1$，存在常数 $C_\varepsilon>0$，满足 $|F(x,u)|+|f(x,u)u|\leqslant\varepsilon|u|^4+C_\varepsilon|u|^{2^*}$，$|f(x,u)|\leqslant\varepsilon|u|^3+C_\varepsilon|u|^{2^*-1}$，$|F(x,u)|\leqslant\varepsilon|u|^4+C_\varepsilon|u|^{2^*}$，$\forall u\in\mathbf{R}$，$\forall x\in\Omega$。

证明　由 F_1）和 F_2）知，$\forall 0<\varepsilon<1$，$\exists C_\varepsilon>0$，使得 $|f(x,u)|\leqslant\varepsilon|u|^3+C_\varepsilon|u|^{2^*-1}$。对上式

两边进行积分可得 $|F(x,u)|\leqslant\varepsilon|u|^4+C_\varepsilon|u|^{2^*}$。又因为 $|f(x,u)u|\leqslant\varepsilon|u|^4+C_\varepsilon|u|^{2^*}$，$|F(x,u)|+|f(x,u)u|\leqslant\varepsilon|u|^4+C_\varepsilon|u|^{2^*}$。

引理 3　存在 $\varepsilon_1>0$，当 $0<\|h\|_2\leqslant\varepsilon_1$ 时，若 $u\in X\setminus\{0\}$，且

$$(a+b\|u\|^2)\|u\|^2=\int_\Omega f(x,u)u\,\mathrm{d}x+\int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x, \tag{4}$$

则有 $\|u\|>d_1$ 或 $\|u\|<d_3$；若 $\|u\|>d_1$ 成立，则还有 $\|u\|_p\geqslant d_2$。

证明　由引理 2 以及式（4）知，$(a+b\|u\|^2)\|u\|^2\leqslant\int_\Omega(\varepsilon|u|4+C_\varepsilon|u|^{2^*})\mathrm{d}x+\int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon c_4^4\|u\|^4+C_\varepsilon c_{2^*}^{2^*}\|u\|^2+c|h|_2\|u\|$。若 $u\neq0$，则 $a\|u\|+(b-\varepsilon c_4^4)\|u\|^3-C_\varepsilon c_{2^*}^{2^*}\|u\|^{2^*-1}-c|h|_2\leqslant0$，即 $a\|u\|-C_\varepsilon c_{2^*}^{2^*}\|u\|^{2^*-1}-c|h|_2\leqslant0$。

考虑泛函 $\gamma:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$，令 $\gamma(t)=at-C_\varepsilon c_{2^*}^{2^*}t^{2^*-1}-c|h|_2$。由于 $\gamma'(t)=a-(2^*-1)C_\varepsilon c_{2^*}^{2^*}t^{2^*-2}$，则泛函 $\gamma(t)$ 在 $t=d_1\triangleq[(a/((2^*-1)C_\varepsilon c_{2^*}^{2^*})]^{1/(2^*-2)}$ 有唯一的极大值点，其极大值为 $\gamma(d_1)=a(2^*-2)[a/((2^*-1)C_\varepsilon c_{2^*}^{2^*})]^{1/(2^*-2)}/(2^*-1)-c|h|^2\triangleq\alpha-c|h|_2$，其中 $\alpha>0$。

如果取 $|h|^2\leqslant\alpha/(2c)$，则 $\gamma(d_1)\geqslant\alpha/2>0$，所以泛函 γ 有两个零点 t_1、t_2，使得 $t_1<d_1<t_2$，且在 (t_1,t_2) 上，$\gamma(t)>0$；然而在 $[0,t_1)\cup(t_2,+\infty)$ 上，$\gamma(t)<0$。

由 $\gamma(t_1)=0$ 知，$c|h|_2=at_1-C_\varepsilon c_{2^*}^{2^*}t_1^{2^*-2}=t_1(a-C_\varepsilon c_{2^*}^{2^*}t_1^{2^*-1})$。由于 $t_1<d_1$，则 $c|h|_2\geqslant t_1(a-C_\varepsilon c_{2^*}^{2^*}d_1^{2^*-1})=t_1a(2^*-2)/(2^*-1)$，$t_1\leqslant c|h|_2(2^*-1)/(a(2^*-2))$，如果取 $|h|_2<d_3a(2^*-2)/(c(2^*-1))$，那么有 $\|u\|<d_3$。

综上所述，当 $|h|_2<\min\{d_3a(2^*-2)/(c(2^*-1)),\alpha/(2c)\}$ 时，有 $\|u\|>d_1$ 或 $\|u\|<d_3$。

引理 4　存在 $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$，对 $\forall 0<\|h\|_2\leqslant\varepsilon_2$，对每个 $u\in X\setminus\{0\}$，存在唯一的 $t^*\in(0,+\infty)$，使得 $t^*u\in N_h$。

证明　对固定的 $u\in X\setminus\{0\}$，$I'(tu)tu=(a+bt^2\|u\|^2)\int_\Omega\nabla tu\nabla tu\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,tu)tu\mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)tu\mathrm{d}x=t^2(a+bt^2\|u\|^2)\|u\|^2-\int_\Omega f(x,tu)tu\mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)tu\mathrm{d}x$，$\gamma_1(t)\triangleq t(a+bt^2\|u\|^2)\|u\|^2-\int_\Omega f(x,tu)tu\mathrm{d}x/t-\int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x\geqslant t(a+bt^2\|u\|^2)\|u\|^2-\int_\Omega(\varepsilon|tu|^3tu+C_\varepsilon|tu|^{2^*-1}tu)\mathrm{d}x/t-\int_\Omega hu\mathrm{d}x=t(a+bt^2\|u\|^2)\|u\|^2-\varepsilon t^3\int_\Omega|u|^4\mathrm{d}x-C_\varepsilon t^{2^*-1}\int_\Omega|u|^{2^*}\mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x\geqslant t(a+bt^2\|u\|^2)\|u\|^2-C_4^4\varepsilon t^3\|u\|_4^4-C_\varepsilon t^{2^*-1}\|u\|_{2^*}^{2^*}\int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x\geqslant a\|u\|^2t-C_\varepsilon t^{2^*-1}\|u\|_{2^*}^{2^*}-\int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x\triangleq\gamma_2(t)$。令 $\gamma'_2(t)=0$，解得 $t_1=[a\|u\|^2/((2^*-1)C_\varepsilon\|u\|_{2^*}^{2^*})]^{1/(2^*-2)}$，易知 $\gamma_2(t)$ 在 $(0,t_1)$ 上单调递增，在 $(t_1+\infty)$ 上单调递减，即 $\gamma_2(t)$ 在 t_1 处取得极大值，其极大值为：$\gamma_2(t_1)=\beta(a^{(2^*-1)/(2^*-2)}\|u\|^{2(2^*-1)/(2^*-2)})/(C_\varepsilon^{1/(2^*-2)}\|u\|_{2^*}^{2^*/(2^*-2)})-\int_\Omega hu\mathrm{d}x$，其中 $\beta=(2^*-2)/[(2^*-1)(2^*-1)^{1/(2^*-2)}]>0$。

当 $0<\|h\|_2<\beta a^{(2^*-1)/(2^*-2)}/(2c_2C_\varepsilon^{1/(2^*-2)}c^{2^*/(2^*-2)})$ 时，$\gamma_2(t_1)\geqslant\beta a^{(2^*-1)/(2^*-1)}\|u\|^{2(2^*-1)/(2^*-2)}/(C_\varepsilon^{1/(2^*-2)}\|u\|_{2^*}^{2^*/(2^*-2)})-c_2\|h\|_2\|u\|\geqslant\beta a^{(2^*-1)/(2^*-2)}\|u\|/(C_\varepsilon^{1/(2^*-2)}c_{2^*}^{2^*/(2^*-2)})-c_2\beta\|u\|a^{(2^*-1)/(2^*-2)}/(2c_2C_\varepsilon^{1/(2^*-2)}c_{2^*}^{2^*/(2^*-2)})=\beta a^{(2^*-1)/(2^*-2)}\|u\|/(2C_\varepsilon^{1/(2^*-2)}c_{2^*}^{2^*/(2^*-2)})>0$，即 $\gamma_2(t_1)>0$。又因为 $\gamma_2(t)$ 在 t_1 处取得最大值，且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma_2(t)=-\infty$，所以函数 $\gamma_2(t)$ 存在唯一一个零点 $t_2\in(t_1,+\infty)$。

另一方面，固定 t_0，定义集合 $\Omega_1=\{x\in\Omega|t_0|U(x)|\geqslant1\}$，由 Ω_1 的定义知 $|\Omega_1|>0$。由 F_5）知，对 $K^*=b\|u\|^4/(4\int_{\Omega_1}|u|^4\mathrm{d}x)+1$，存在 $U_0>0$，当 $|u|\geqslant U_0$ 时，有 $F(x,u)\geqslant K^*|u|^4$。于是

当 $x \in X$，且 $t \geqslant t_0 U_0$ 时，有 $t|U(x)| = tt_0|U(x)|/t_0 \geqslant t/t_0 \geqslant U_0$。由 F_4）和 F_5）知，$\gamma_1(t) \leqslant t(a + bt^2\|u\|^2)\|u\|^2 - \int_{\Omega_1} f(x,tu)tu\mathrm{d}x/t - \int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x \leqslant t(a + bt^2\|u\|^2)\|u\|^2 - \int_{\Omega_1}[4F(x,tu)/t - C(tu)^2]\mathrm{d}x - \int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x \leqslant t(a + bt^2\|u\|^2)\|u\|^2 - \int_{\Omega_1}[4K^*|tu|^4 - C(tu)^2]\mathrm{d}x/t - \int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x = t(a\|u\|^2 + C\int_{\Omega_1}|u|^2\mathrm{d}x) + t^3(b\|u\|^4 - \int_{\Omega_1}4K^*|tu|^4\mathrm{d}x) - \int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x \leqslant t(a\|u\|^2 + C\int_{\Omega_1}|u|^2\mathrm{d}x) - t^3 - \int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x \to -\infty\ (t \to +\infty)$。其中 $b\|u\|^4 - \int_{\Omega_1}4K^*|tu|^4\mathrm{d}x \leqslant -1$。显然，当 $t > 0$ 很小时，$\gamma_1(t) > 0$，所以存在 $t^* > 0$，满足 $\gamma_1(t^*) = 0$，且 t^* 为 $\gamma_1(t)$ 的唯一零点。于是 $t^* \geqslant t_2 > t_1$，从而有 $t^*\|u\| > t_1\|u\| = \|u\|[a\|u\|^2/((2^* - 1)C_\varepsilon\|u\|_{2^*}^{2^*})]^{1/(2^*-2)} \geqslant \|u\|[a\|u\|^2/((2^* - 1)C_\varepsilon C_{2^*}^{2^*}\|u\|^{2^*})]^{1/(2^*-2)} = [a/((2^* - 1)C_\varepsilon C_{2^*}^{2^*})]^{1/(2^*-2)} = d_1$，所以 $t^*u \in N_h$。

引理 5　设 $0 < \|h\|_2 < \varepsilon_3, u_k \in N_h(k \geqslant 1), I(u_k) \to c \triangleq \min\limits_{u \in N_h} I(u)\ (k \to \infty)$，则 $\{u_k\}$ 有界。

证明　假设 $\{u_k\}$ 无界，则可设 $\|u_k\| \to \infty$，记 $v_k = u_k/\|u_k\|$，则 $\|v_k\| = 1$。不妨设 v_k 在 X 中弱收敛于 v，$v_k(x)$ 在 Ω 中几乎处处收敛于 $v(x)$。首先证明 $v \neq 0$，假若 $v = 0$，则任意固定的 $s > 0$，有 $I(u_k) \geqslant I(su_k/\|u_k\|) = I(sv_k) = a\int_\Omega|\nabla sv_k|^2\mathrm{d}x/2 + b(\int_\Omega|\nabla sv_k|^2\mathrm{d}x)^2/4 - \int_\Omega F(x,sv_k)\mathrm{d}x - s\int_\Omega hv_k\mathrm{d}x = as^2\|v_k\|^2/2 - bs^2\|v_k\|^2/4 - \int_\Omega F(x,sv_k)\mathrm{d}x - s\int_\Omega hv_k\mathrm{d}x = as^2/2 - bs^2/4 - \int_\Omega F(x,sv_k)\mathrm{d}x - s\int_\Omega hv_k\mathrm{d}x \to as^2/2 - bs^2/4\ (k \to \infty)$。由题设条件知 $I(u_k) \leqslant c$，代入上式可知，$c \geqslant I(u_k) \geqslant (a/2 - b/4)s^2$。若取 $s > (c/(a/2 - b/4))^{1/2}$，矛盾，所以 $v \neq 0$。

由

$$I(u_k)/\|u_k\|^4 = a/(2\|u_k\|^2) + b/4 - \int_\Omega F(x,u_k)\mathrm{d}x/\|u_k\|^4 - \int_\Omega hu_k\mathrm{d}x/\|u_k\|^4, \tag{5}$$

在式（5）中令 $k \to \infty$，由 Fatou 引理及 $F(x,y)$ 的弱连续性知，左边结果为 0，右边结果为 $b/4$，这是一个矛盾，所以 $\{u_k\}$ 有界。

引理 6　存在 $0 < \varepsilon_4 \leqslant \varepsilon_3$，对 $\forall 0 < \|h\|_2 \leqslant \varepsilon_4$，存在 $u^* \in N_h$，使得 $I(u^*) = m_h$。

证明　令 $0 < \|h\|_2 \leqslant \varepsilon_3$，且 $\{u_k\}$ 是引理 5 中的序列，即存在 $u^* \in X$，满足 u_k 在 X 中弱收敛于 u^*，$u_k(x)$ 在 Ω 中几乎处处收敛于 $u^*(x)$。利用文献［11］中的技巧和 Ekeland 变分原理，不妨假设 $I'(u_k) \to 0$，于是可知 $I'(u^*) = 0$，从而 $I'(u^*)u^* = 0$，即 $(a + b\|u^*\|^2)\|u^*\|^2 = \int_\Omega f(x,u^*)u^*\mathrm{d}x + \int_\Omega h(x)u^*\mathrm{d}x$，由引理 3 得 $\|u^*\| > d_1$ 或 $\|u^*\| < d_3$。若 $\|u^*\| > d_1$，则 $u^* \in N_h$，且 $I(u^*) \leqslant \liminf\limits_{k\to\infty} I(u_k) = m_h$。若 $\|u^*\| < d_3$，则 $\|u^*\|_p \leqslant c_p\|u^*\| \leqslant c_p d_3 < c_p d_2/c_p = d_2$。

另一方面，由 $u_k \in N_h$，可得 $\|u^*\| > d_1$。由引理 3 知 $\|u_k\|_p \geqslant d_2$，令 $k \to \infty$ 有 $\|u^*\|_p < d_2$，矛盾。故可得 $u^* \in N_h, I(u^*) = m_h$，且 $I'(u^*) = 0$。

2　定理 1 及其证明

本文研究 $h(x) \neq 0$，但 $\int_\Omega|h(x)|^2\mathrm{d}x$ 很小的情形，此时不妨设 $\lambda = 0$，主要结果如下：

定理 1　假设条件 $(F_1) \sim (F_5)$ 成立，则 $\exists \varepsilon^* > 0$，当 $0 < \int_\Omega|h(x)|^2\mathrm{d}x < \varepsilon^*$ 时，边值问题（1）存在两个不同的非平凡解。

证明　定理 1 分两步来证明。

第一步：先证对 $\forall 0<\sigma<d_1$，存在 $\delta^*>0$，若 $0<\|h\|_2<\delta^*$，则边值问题（1）存在一个非平凡解 u_h 且满足 $\|u_h\|<\sigma$。令 $\varphi(u)=a\|u\|^2/2+b\|u\|^4/4-\int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x, u\in X$，则 $\varphi(u)\geqslant a\|u\|^2/2-b\|u\|^4/4-\varepsilon\int_\Omega(|u|^4\,\mathrm{d}x-C_\varepsilon|u|^{2^*})\,\mathrm{d}x\geqslant a\|u\|^2/2+(b/4-c_4^4)\|u\|^4-C_\varepsilon c_{2^*}^{2^*}\|u\|^{2^*}$。定义函数 $\phi(t)\triangleq at^2/2+(b/4-c_4^4)t^4-C_\varepsilon c_{2^*}^{2^*}t^{2^*}$，则存在 $0<\sigma_1<\sigma$，满足对 $\forall t\in(0,\sigma_1)$，有 $\phi(t)>0$。对任意固定的 $\tau\in(0,\sigma_1)$，当 $\|u\|=\tau$ 时，有 $\varphi(u)\geqslant\phi(\tau)>0$，所以 $I(u)=\varphi(u)-\int_\Omega hu\,\mathrm{d}x\geqslant\phi(\tau)-\|h\|_2c_2\tau$。取 $\delta^*=\phi(\tau)/(2c_2\tau)$，当 $0<\|h\|_2<\delta^*$ 时，对 $\|u\|=\tau$，有 $I(u)\geqslant\phi(\tau)/2>0$。

第二步：$I(u)$ 在 B_τ 存在局部极小值，正好是边值问题（1）的解。

令 $B_\tau\triangleq\{u\in X\,|\,\|u\|\leqslant\tau\}$ 和 $\eta_\tau\triangleq\inf\limits_{u\in B_\tau}I(u)$，显然 $\eta_\tau\leqslant I(u)=0$。设 $\{u_k^*\}\subset B_\tau$ 是 I 的极小化序列，于是存在 $u_h\in B_\tau$，满足 u_k^* 弱收敛于 u_h，从而 $I(u_h)=a\|uh\|^2/2+b\|uh\|^4/4-\int_{B_\tau}F(x,u_h)\,\mathrm{d}x-\int_{B_\tau}hu_h\,\mathrm{d}x\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\inf(a\|u_k^*\|^2/2+b\|u_k^*\|^4/4-\int_{B_\tau}F(x,u_k^*)\,\mathrm{d}x-\int_{B_\tau}hu_k^*\,\mathrm{d}x)\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\inf I(u_k^*)=\eta_T$。于是 $I(u_h)=\eta_\tau$。因为 $I(u_h)=\eta_\tau\leqslant 0$，所以 u_h 在 B_τ 内部，即 u_h 是 I 的局部极小值点，从而也为边值问题（1）的解，且 $0<\|h\|<\sigma<d_1$。

综上所述，当 $0<\|h\|_2<\varepsilon^*=\min\{\varepsilon_4,\delta^*\}$ 时，边值问题（1）存在两个不同的非平凡解：一个解为 u^*，满足 $\|u^*\|>d_1$；一个解为 u_h，满足 $0<\|h\|_2<d_1$。

［参 考 文 献］

［1］ALVES C O，CORRÊAF J A，MA T F. Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type［J］. Computers & Mathematics with Application，2005，49(1)：85-93. DOI：10.1016/j.camwa.2005.01.008.

［2］PERERA K，ZHANG Z T. Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index［J］. Journal of Differential Equations，2006，221(1)：246-255. DOI：10.1016/j.jde.2005.03.006.

［3］MAO A，ZHANG Z. Sign-changing and multiple solutions of Kirchhoff type problems without the P.S. condition［J］. Nonlinear Analysis，2009，70(3)：1275-1287. DOI：10.1016/j.na.2008.02.011.

［4］HE X M，ZOU W M. Multiplicity of solutions for a class of Kirchhoff type problems［J］. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，2010，26(3)：387-394. DOI：10.1007/s10255-010-0005-2.

［5］HE X M，ZOU W M. Infinitely many positive solutions for Kirchhoff-type problems［J］. Nonlinear Analysis，2009，70(3)：1407-1414. DOI：10.1016/j.na.2008.02.021.

［6］YANG Y，ZHANG J H. Positive and negative solutions of a class of nonlocal problems［J］. Nonlinear Analysis，2010，73(1)：25-30. DOI：10.1016/j.na.2010.02.008.

［7］SUN J J，TANG C L. Existence and multiplicity of solutions for Kirchhoff type equations［J］. Nonlinear Anal，2011，74：1212-1222. DOI：10.1016/j.na.2010.09.061.

［8］LAN Y Y. Existence of solutions to a class of Kirchhoff-type equation with a general subcritical nonlinearity［J］. Mediterranean Journal of Mathematics，2015，12(3)：851-861. DOI：10.1016/s00009-014-0453-7.

［9］WILLEM M. Minimax theorems［M］. Boston：Birkhäuser，1996.

［10］AMBROSETTI A，MALCHIODI A. Nonlinear analyis and semilinear elliptic problem［M］. London：Cambridge，2007.

［11］MARINO BADIALE E S. Semilinear elliptic equations for beginners［M］. London：Springer，2011.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）