

基于螺旋理论的机构自由度自动分析

王成志

(集美大学海洋装备与机械工程学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 为了实现机构自由度快速自动分析, 将字符、符号等自动转变为字符变量的方法和便于局部自由度分析的参数输入原则, 并由此分析自动构建运动螺旋集及相应约束螺旋集的算法; 然后提出局部自由度、公共约束、冗余约束及整个机构自由度的自动分析算法; 最后得出机构中存在局部自由度的充要条件。用该程序自动分析了61个各类机构的自由度, 计算结果完全正确, 且计算效率高, 可输入含任意字母与数字组合的字符变量、简单运算符和三角函数的表达式, 可用于自动分析计算平面、空间、单环及多环机构的自由度。

[关键词] 螺旋理论; 机构自由度; 自由度分析; 局部自由度; 字符变量

[中图分类号] TH 112; TP 399

Automatic Analysis of Freedom for Mechanisms Based on Screw Theory

WANG Chengzhi

(School of Marine Equipment and Mechanical Engineering, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The rapid and automatic mobility analysis of a mechanism is of great significance to the innovative design of the mechanism. In the mobility analysis based on screw theory, arbitrary character variables, digital variables and their combination are often used to describe the axis vectors and coordinates of kinematic pairs, hence, the method of automatically transforming characters and symbols into character variables and the parameter inputting principles for conveniently analyzing passive degrees of freedom are studied firstly, and based on these the algorithms for constructing the kinematic pair screw sets and the corresponding constraint screw systems are analyzed. Then the algorithms for calculating the passive degree of freedom, common constraint, redundant constraint, and the whole mobility in the mechanism are proposed. The necessary and sufficient conditions for the existence of passive degrees of freedom in the mechanism are obtained. The program presented in this paper was used to automatically analyze the mobility of 61 various kinds of mechanisms, and the results are completely correct. Examples show that the program is simple and efficient, and can be input the expressions containing the symbolic variables with combinations of letters and digits, simple operators, and trigonometric functions. It can be utilized to automatically analyze and calculate the mobility of planar or spatial, single-loop or multi-loop mechanisms.

Keywords: screw theory; mechanisms mobility; mobility analysis; passive degrees of freedom; symbolic variables

[收稿日期] 2021-02-21

[作者简介] 王成志(1962—), 男, 教授, 从事机构学、CAD、车辆工程、科学计算可视化及优化设计研究。
E-mail: wcz3@tom.com

<http://xuebaobangong.jmu.edu.cn/zkb>

0 引言

机构自由度分析是机构创新设计的首要前提。随着机构朝复杂空间多闭环方向发展,传统自由度计算公式已不通用^[1-7],寻找自由度通用分析公式或方法又重新成为机构学研究的热点,近 20 年来不断有学者提出新方法、新公式^[7-12]。其中一些借助李代数^[13-14]、线性变换^[15]、螺旋理论^[2,6]等数学工具的方法,科学、严谨、系统且通用,但要列出给定位置运动约束方程并求秩^[3],理论晦涩、过程复杂,难以快速计算,不利普遍推广。例如,螺旋理论法中,难以通过简单观察判断多数运动螺旋集及约束螺旋集的线性相关性并求出秩数,手工求解,即使辅以通用软件计算,计算过程依然繁杂,加上像螺旋理论这样的数学方法计算得到的自由度有的会随位型变化^[6],需要多次计算才能判定其瞬时性。所以,将自由度分析计算过程计算机化、自动化具有重要意义。目前自由度自动计算的研究比较少,文献 [16] 提出用符号描述并联机构。另外,局部自由度在机构中普遍存在,机构自由度的正确分析计算有助于更详细分析机构的运动性质。目前多以经验观察判断局部自由度^[17],文献 [2, 14] 则分别提出了机构存在局部自由度的基于螺旋理论、李代数的分析方法,文献 [18] 则用杆组运动参数分析了杆组内存在的局部自由度,但这些理论方法只适用并联机构。

螺旋理论中的单位螺旋中含有的 6 个 Plücker 坐标可以表达机构的运动、约束,且螺旋集数学计算规范。本文基于该理论,利用 Matlab 编写了单环机构和多环并联机构的自由度自动分析计算程序,分析了机构中过约束的 Matlab 算法,提出了适用于包括单环、多环机构在内的平面、空间机构的局部自由度判断准则。

1 机构自由度程序自动分析计算

对于并联机构,文献 [2] 修正了传统的 Grübler - Kutzbach 公式 (准则),给出了通用的机构自由度计算公式:

$$M = (6 - \lambda)(n - g) + \sum_{i=1}^g f_i + \nu - \xi. \quad (1)$$

式中: n 为机构中活动构件数目; g 为运动副的数目; f_i 为第 i 个运动副的自由度; λ 为机构的公共约束数 (阶数 $d = 6 - \lambda$); ν 为冗余约束数; ξ 为局部自由度数。

g 和 f_i 按输入运动副类型自动计算,而活动构件数为: $n = g - 1$ (单闭环); $n = g - l + 1$ (多闭环)。式中: l 为分支数。此式仅适用于一个构件仅连接 2 个运动副时的情形。

显然,计算自由度的关键环节是计算机构的 3 个参数: λ 、 ν 和 ξ , 可以通过螺旋理论根据机构运动副所具有的运动信息求出约束信息,从而求出该 3 个参数。

1.1 运动副螺旋及基本参数

单自由度运动副的单位运动螺旋定义 (Plücker 坐标) 为:

$$\mathcal{S} = (\mathbf{s}; \mathbf{s}^0) = (\mathbf{s}; \mathbf{r} \times \mathbf{s} + h\mathbf{s}) = (l, m, n; P, Q, R). \quad (2)$$

式中: \mathbf{s} 为螺旋轴线方向的单位矢量; l 、 m 、 n 为 \mathbf{s} 的 3 个方向余弦; \mathbf{s}^0 为螺旋的对偶部矢量, $\mathbf{s}^0 = (P, Q, R)$; $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 是螺旋轴线上任意一点的位置矢量, x 、 y 、 z 是该点的直角坐标值; h 是节距; P 、 Q 、 R 是对偶部矢量的 3 个分量。

可用不同节距代表不同的单自由度运动副: $h = 0$ 是转动副 R , $h = \infty$ 是移动副 P , $h = \text{Const}$ (Const 为不等于零的常数) 是螺旋副 H 。

根据式 (2), 可以按“轴线及位置矢量”或“Plücker 坐标”两种方式输入螺旋信息, 程序界面如图 1。

表 1 列出了常见运动副按“轴线及位置矢量”方式的输入参数。

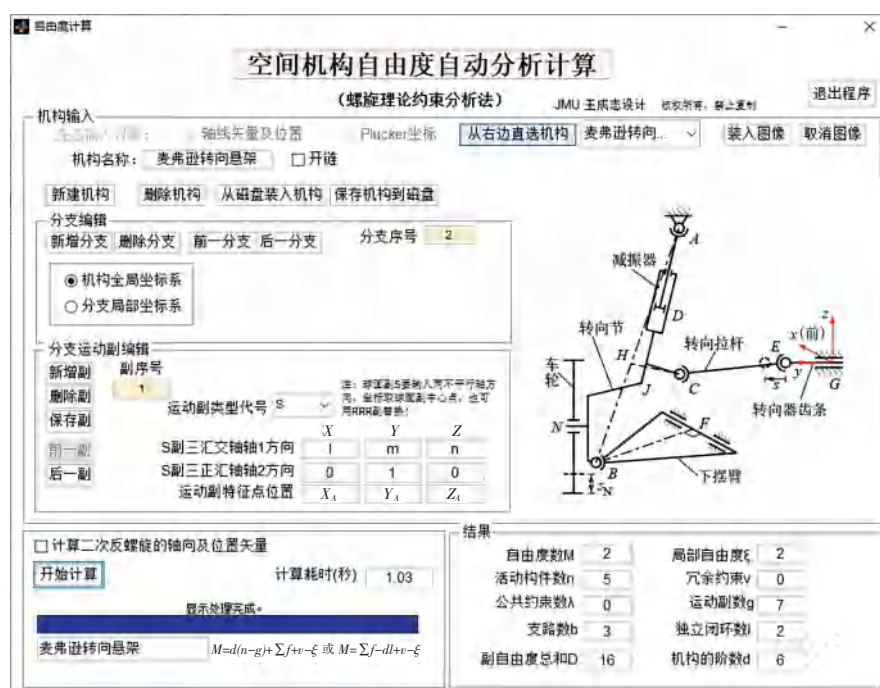


图1 程序界面

Fig.1 User interface of the program

表1 常用运动副输入参数及螺旋表示

Tab. 1 Input parameters and screws of commonly used types of kinematic pairs

运动副 Kinematic Pair	符号 Symbol	基本输入参数 Basic inputs parameters	螺旋矢量 Screw vectors
转动副(R) Revolute		$r = (x, y, z);$ $s = (l, m, n)。$	$\$ = (s; r \times s)。$
移动副(P) Prismatic		$s = (l, m, n)。$	$\$ = (0; s)。$
螺旋副(H) Helical		$r = (x, y, z);$ $s = (l, m, n);$ $h。$	$\$ = (s; r \times s + hs)。$
圆柱副(C) Cylindric		$r = (x, y, z);$ $s = (l, m, n)。$	$\$ _1 = (s; r \times s); \$ _2 = (0; s)。$
万向铰(U)		$r = (x, y, z);$ $s _1 = (l _1, m _1, n _1);$ $s _2 = (l _2, m _2, n _2)。$	$\$ _1 = (s _1; r \times s _1);$ $\$ _2 = (s _2; r \times s _2)。$
球面副(S) Spherical		$r = (x, y, z);$ $s _1 = (l _1, m _1, n _1);$ $s _2 = (l _2, m _2, n _2)。$	$\$ _1 = (s _1; r \times s _1);$ $\$ _2 = (s _2; r \times s _2);$ $\$ _3 = (s _3; r \times s _3)。$
平面副(F) Flat/Planar		$r = (x, y, z) (平面上的点);$ $s _1 = (l _1, m _1, n _1);$ $s _2 = (l _2, m _2, n _2)。$	$\$ _1 = (0; s _1); \$ _2 = (0; s _2);$ $\$ _3 = (s _1 \times s _2; r \times (s _1 \times s _2))。$

其中, 球副 S 和平面副 E 仅输入相互不平行的 2 条螺旋轴线矢量 s_1 、 s_2 (并不要求正交), 然后程序自动求出与该 2 条轴线正交的第三条螺旋轴线 s_3 。本程序已经解决了 Matlab 须先定义字符变量再使用的传统方法, 可在图 1 界面中的螺旋轴线矢量、轴线上坐标点或 Plücker 坐标输入框中输入由任意字母和数字组合的字符变量, 及由变量和 “+、-、*、/” 运算符号, 甚至正弦、余弦等三角函数组成的简单表达式, 真正做到基于字符变量的自由度计算机自动分析计算。

文献 [2, 6] 等提倡尽量多的用 0、1 表达螺旋坐标元素, 但如此输入会弱化运动螺旋模型中所蕴含的部分运动信息。为了正确自动分析局部自由度, 输入参数时还要注意以下规则。

1) 多环机构的分支中存在两 S 副及局部转动自由度。多环机构中, 位置坐标都取各自球心, 而用 (1, 0, 0)、(0, 1, 0) 和 (0, 0, 1) 的 3 条正交轴代表其等效转动轴; 在单环机构中则要以两球心连线作为两 S 副各自的 1 条螺旋轴线, 见表 2 中的 (S...S) 结构形式的 s_{A_1} 和 s_{B_1} 。

2) 分支 (含单环) 中存在 R 副/C 副, 且其回转轴线确实指向同一分支中 S 副的球心, 则存在局部转动自由度。故 R 副/C 副螺旋轴线上的位置坐标取球副中心坐标, 而 S 副中取 1 条螺旋轴线等于 R 副/C 副的螺旋轴线, 见表 2 中的 (R...S) 和 (C...S) 结构形式的 $s_{B_1} = s_A$; 按 “Plücker 坐标” 输入时, 则球副有 1 螺旋与 R 副/C 副的 1 螺旋相同。

3) 对平面副 E, 若分支中同时存在其他运动副, 并且该运动副含有与平面平行的 P 副, 则该分支有局部移动自由度; 若分支中同时存在其他运动副, 且该运动副含有与该平面垂直的 R 副, 则该分支有局部转动自由度。故前者要注意将 E 副中的移动导路矢量方向处理成与相关 P 副导路矢量方向平行; 后者则要将 E 副含有的转动轴处理成与相关 R 副同轴。点、线接触的高副处理方式类似。例如, 滚子推杆凸轮机构中高副等效于 R、P 副, 其中的 R 副轴线要处理成与滚子转动副同轴。

此外, 虽然螺旋系的相关性与坐标系选择无关^[2], 但若是对称并联机构, 因运动螺旋需合并在一起分析, 故若按分支局部坐标系输入参数, 要给出局部坐标与全局坐标的转动关系, 程序会在合并为动平台的运动螺旋集 S 前先进进行螺旋坐标变换。总之, 要计算局部自由度时, 应输入更符合实际运动副运动状态的模型。

1.2 由 Plücker 坐标反求位置矢量及节距

假设坐标系原点向螺旋轴线所作垂线的垂足位置矢量为 $r = (r_x, r_y, r_z)$, 因两正交矢量数量积为零^[19], 有:

$$s \cdot r^T = 0. \quad (3)$$

已知螺旋的 Plücker 坐标时, 式 (2) 和式 (3) 组成的线性方程组有 4 个标量方程, 4 个变量 r_x 、 r_y 、 r_z 和 h , 故可求出 r (垂足点) 和节距 h 。注意, 反求得到的 r 将不同于原来的设定, 故给 “新建机构”

表 2 单环机构中存在局部自由度的 8 种结构组合形式

Tab. 2 Eight kinds of configurations containing passive degree of freedom in single loop mechanisms

单环结构组成 Compositions in Single Loop	结构特点 Features of Compositions
1)	存在两 R 副轴线同轴 (节距等于零) Axes of two R pairs are coaxial (pitch equal to zero) $s_{A_1} \times s_{B_1} = 0$
2)	$s_A \times s_{B_1} = 0$
3)	$s_A \times s_B = 0$
4)	$s_A \times s_B = 0$
5)	存在两 H 副轴线同轴且节距相等 Axes of two H Pairs are coaxial and their pitches are equal to each other $s_A \times s_B = 0$ 且 (and) $h_A = h_B$
6)	存在两 P 副的导路矢量相互平行 Axes of two P pairs are parallel to each other $s_A \times s_B = 0$
7)	
8)	

说明 Note: A、B 等表示运动副上的点 Italicized capital letters A, B, etc. indicate the points on the kinematic pair

界面设定好选择输入方式后不再改变。

1.3 运动螺旋集和约束螺旋集

设 $\$_{ji}$ 为第 j 个分支中第 i 个运动副的运动螺旋, 则分支 j 中所有运动螺旋所组成的螺旋集 (所有螺旋相加, 可含重复螺旋) 就是该分支的运动螺旋集, 写成矩阵: $S_j = [\$_{j1}; \$_{j2}; \dots]$ 。将机构所有分支的运动螺旋集合并, 构成了机构运动螺旋集 S 。 S_j 和 S 都可能线性相关。

根据运动螺旋和其约束螺旋的互易积为零, 或根据文献 [17] 介绍的“快速算法”, 可以求出 S_j 对应的约束螺旋 S_j^r 。本文则用商业软件 Matlab 提供的更简洁、快速的方法, 即先用 Matlab 的 null 函数求出 S_j 的零空间 S_j' , 再将其前 3 列与后 3 列对换, 即得到 S_j^r 。将机构所有分支约束螺旋集相加, 构成了动平台约束螺旋集 S^r 。注意: 求出 S_j^r 非空时, 肯定是线性无关的, 但 S^r 可能线性相关。

1.4 局部自由度分析计算

一个并联机构的一条分支串联链中, 如有 4 个转动副轴线平行, 则形成局部自由度^[2]。但若同样由这 4 个轴线平行的转动副组成单环机构 (这时是平面四连杆机构), 其运动螺旋系肯定线性相关 (单环机构的运动螺旋集必线性相关, 否则是不能相互运动的桁架), 此时机构自由度为 1, 而不存在局部自由度。所以, “局部运动螺旋系 S_j 线性相关则存在局部自由度” 的准则只适用于多环机构, 单环机构的判定条件要修正。这个例子也说明, 如果将自由度 (含局部自由度) ≥ 1 的单环机构作为多环并联机构的一个分支, 则该分支必然是线性相关的, 即该分支存在局部自由度。

另外, 不同类型的多自由度运动副之间可以具有局部自由度, 但是要将多自由度运动副等效为单自由度的运动副后, 同类型的单自由度运动副之间才可能存在局部自由度。即, R 副、P 副和 H 副 (包括等效复合副中的 R 副和 P 副, 下同) 相互之间不可能产生局部自由度, 只有同样的 R 副之间、H 副之间才可能产生转动局部自由度, 同样的 P 副之间才可能产生移动局部自由度。螺旋副 H 理论上来说也是 R、P 复合副, 但 H 副本身含有的位移信息及转动信息综合在了 1 个螺旋中, 它们与其他 P 副的位移信息及其他 R 副的转动信息都不相同。或者说, H 副不可能与其它类型的运动副形成移动或转动局部自由度, 但不同位置的 H 副之间可能存在转动局部自由度。推论: 多个 (≥ 2) 有相同节距的螺旋之间才存在局部自由度, 不同节距螺旋之间不存在局部自由度。

1.4.1 多环机构

多环机构分支中存在局部自由度的充要条件: 分支中存在多个 (≥ 2) 有相同节距的螺旋, 且分支中的运动螺旋集线性相关。注意:

1) 局部相对运动的两构件可以是邻近的两构件, 也可以是分支中距离较远的两构件, 即, 这种“局部”涵盖到整个分支。

2) 分支中局部自由度数:

$$\xi_j = \text{size}(S_j, 1) - \text{rank}(S_j) \quad (4)$$

其中: $\text{rank}(S_i)$ 是 Matlab 求矩阵 S_i 的秩数的函数; $\text{size}(S_i, 1)$ 是求 S_i 行数的函数。

3) 运动螺旋集线性相关就表明有相同节距的螺旋, 这里增加该条件是为了便于观察。多环机构分支中线性相关的螺旋几何特征比较复杂, 例如, 2 个转动螺旋共轴且等节距、2 个移动副导路平行、3 个以上转动轴平行等组成的螺旋系都是线性相关的。更多的几何条件可参考文献 [2], 可用式 (4) 求得 $\xi_j > 0$, 则表示运动螺旋集线性相关。

1.4.2 单环机构

单环机构分支中存在局部自由度的充要条件: 机构中存在两个有相同节距的螺旋, 且各自 P 副的导路矢量相互平行, 或各自非 P 副 ($h = \text{Const}$ 或 $h = \infty$) 螺旋同轴。注意:

1) 若单环机构中一个运动副与多个运动副可能都满足相同的局部自由度存在条件, 则满足相同条件的运动副中只有 2 个运动副产生同性质 (相对转动或移动) 的局部自由度。一般根据最小阻力定律判定局部自由度发生位置, 本文规定该运动副仅与符合条件最近的运动副之间存在 1 个局部自由

度。单环机构中可能存在多个不同性质,或者同性质但不同条件的局部自由度。

2) 表 2 列出了单环机构中两运动副存在局部自由度的 8 种典型结构组合形式。

编程用到两个重要关系:两矢量叉乘等于 0 矢量时表示两矢量或两螺旋相互平行,而两螺旋的叉积(旋量积)等于 0 螺旋时表示两螺旋共线。两螺旋的叉积定义为:

$$\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = (\mathbf{s}_1 + \in \mathbf{s}_1^0) \times (\mathbf{s}_2 + \in \mathbf{s}_2^0) = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 + \in (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2^0 + \mathbf{s}_1^0 \times \mathbf{s}_2)。 \quad (5)$$

1.5 过约束分析计算

1.5.1 公共约束数 λ 计算

求出 \mathbf{S} 中最大线性无关的一组集,就得到机构运动螺旋系 \mathbf{s}_m (大写 \mathbf{S} 表示可能线性相关的螺旋系,小写 \mathbf{s} 表示线性无关的螺旋系,下同)。用 null 函数求出 \mathbf{s}_m 的零空间,再将其前 3 列与后 3 列对换,得到机构的公共约束螺旋系 \mathbf{s}_c^r 。 \mathbf{s}_c^r 表示所有运动副对机构的共同约束,即其对应矩阵的行数就是机构的公共约束数,即: $\lambda = \text{rank}(\mathbf{s}_c^r) = \text{size}(\mathbf{s}_c^r, 1)$ 。由于 \mathbf{s}_c^r 是线性无关的,其秩等于行数。

1.5.2 冗余约束数 ν 计算

将动平台约束螺旋集 \mathbf{S}^r 扣除机构公共约束螺旋系 \mathbf{s}_c^r , 得到动平台剩余约束螺旋集 $\mathbf{S}_p^r = \mathbf{S}^r - \mathbf{s}_c^r$ (这里减号指消除矩阵 \mathbf{S}^r 中所有与 \mathbf{s}_c^r 相同的行)。求其秩得到线性无关数 k ; 或求其最大线性无关的一组集,就得到动平台扣除公共约束之后受到的独立约束螺旋系 \mathbf{s}_p^r 。则线性相关的约束数,也就是冗余约束(虚约束)数为:

$$\nu = \text{size}(\mathbf{S}_p^r, 1) - \text{rank}(\mathbf{S}_p^r) = \text{size}(\mathbf{S}_p^r, 1) - \text{size}(\mathbf{s}_p^r, 1)。 \quad (6)$$

文献 [2, 17] 给出的冗余约束数公式是

$$\nu = \left(\sum_{j=1}^l q_j - \lambda l \right) - k。 \quad (7)$$

式中: q_j 是第 j 分支的独立约束螺旋数; k 是 \mathbf{S}_p^r 的秩数或是 \mathbf{s}_p^r 的行数。

显然,式 (6) 和式 (7) 的内涵都是指与其他约束线性相关的冗余约束数,没有差别。两式也适用于单闭环机构,当然, ν 是多分支并联而产生的,单闭环的 ν 为零。

1.6 二次反螺旋及应用

若求出 \mathbf{S}^r 中线性无关的一组集 \mathbf{s}^r , 再次求反螺旋,则得到二次反螺旋 \mathbf{s}^{rr} 。对并联机构, \mathbf{s}^{rr} 表示动平台的运动可能性,对应矩阵的行数就是动平台的自由度;对单闭环或开环机构, \mathbf{s}^{rr} 代表末杆(拆架后的机架或开环的末杆)的运动螺旋,其行数为末杆的自由度数或机构阶数。

注意,若用 null 函数求得二次反螺旋 $\mathbf{s}^{rr} = []$, 要根据末杆(动平台)是无约束的自由状态还是全约束不能动两种情况来调整 \mathbf{s}^{rr} , 即:

$$\mathbf{s}^{rr} = \begin{cases} \text{rref}(\mathbf{s}_m), & \text{如果 } \text{rank}(\mathbf{s}^r) = 0; \\ [], & \text{如果 } \text{rank}(\mathbf{s}^r) = 6。 \end{cases}$$

式中: rref 是 Matlab 的简化列梯形矩阵函数。

此外,对于分支含闭环的并联机构,如 Delta 机构^[2,8,17], 可以先分析分支闭环中假设为动平台的运动螺旋系 \mathbf{s}^{rr} , 观察或用式 (2) 和式 (3) 组成的线性方程组求出对应的螺旋轴线矢量及轴线上特定点位置矢量,然后将机构中的分支闭环用等效运动副螺旋替换(若按“Plücker 坐标”方式输入机构运动副信息时,分支闭环直接用相应 \mathbf{s}^{rr} 等效替换即可),则可分析这类机构自由度。

2 实例分析

用本程序分析了平面、空间、单环及多环等各类机构的自由度,计算结果完全正确,且绝大多数机构的计算效率非常高。以下举例说明判定机构局部自由度的方法及过程。

2.1 麦弗逊(MacPherson)式转向悬架

图 1 界面中的机构是麦弗逊转向悬架^[19], 不考虑车轮转动,该多环机构就是一个以转向节 DBC

为动平台的并联机构, 三个分支分别为 GEC (运动副类型分别为 P 、 S 、 S)、 AD (S 、 C)、 FB (R 、 S)。在转向器齿条左右对称位置上建立如图 1 所示全局坐标系, 则根据前面参数输入规则, C 、 E 、 B 位置球副的 2 条特征回转轴线取简单的 0、1 元素, 但 A 处球副的 1 条特征回转轴线要按表 2 的 $C \cdots S$ 结构形式输入, 即各运动副的特征回转轴线方向分别为:

$$s_G = (0, 1, 0); s_{E_1} = s_{C_1} = (1, 0, 0); s_{E_2} = s_{C_2} = (0, 1, 0); s_{A_1} = s_D = (l, m, n); s_{A_2} = (1, 0, 0); s_{B_1} = (0, 0, 1); s_{B_2} = (0, 1, 0); s_F = (1, 0, 0);$$

输入上述螺旋轴线矢量方向及各运动副位置矢量, 可求出 3 个分支各运动副的运动螺旋。

GEC 分支:

$$\begin{aligned} \$G &= (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 1 \ 0); \$E_1 = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ -y_E); \$E_2 = (0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0); \\ \$E_3 &= (0 \ 0 \ 1; \ y_E \ 0 \ 0); \$C_1 = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ z_C \ -y_C); \$C_2 = (0 \ 1 \ 0; \ -z_C \ 0 \ x_C); \\ \$C_3 &= (0 \ 0 \ 1; \ y_C \ -x_C \ 0)。 \end{aligned}$$

AD 分支:

$$\begin{aligned} \$A_1 &= (l \ m \ n; \ y_A n - z_A m \ z_A l - x_A n \ x_A m - y_A l); \$A_2 = (0 \ 1 \ 0; \ -z_A \ 0 \ x_A); \$A_3 = \\ &(-n \ 0 \ l; \ y_A l - x_A l - z_A n \ y_A n); \$D_1 = (0 \ 0 \ 0; \ l \ m \ n); \$D_2 = \$A_1。 \end{aligned}$$

FB 分支:

$$\begin{aligned} \$F &= (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ z_F \ -y_F); \$B_1 = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ z_B \ -y_B); \$B_2 = (0 \ 1 \ 0; \ -z_B \ 0 \ x_B); \\ \$B_3 &= (0 \ 0 \ 1; \ y_B \ -x_B \ 0)。 \end{aligned}$$

故各分支运动螺旋集:

$$\begin{aligned} S_{GEC} &= (\$G; \$E_1; \$E_2; \$E_3; \$C_1; \$C_2; \$C_3); S_{AD} = (\$A_1; \$A_2; \$A_3; \$D_1; \$D_2); \\ S_{FB} &= (\$F; \$B_1; \$B_2; \$B_3)。 \end{aligned}$$

S_{GEC} 为线性相关的 7×6 矩阵, 其秩为 6, $\xi_{GEC} = 1$; S_{AD} 为线性相关的 5×6 矩阵, 秩为 4 (注意, D 处圆柱副坐标点取 A 点坐标, 否则该矩阵线性无关), $\xi_{AD} = 1$; S_{FB} 为线性无关的 4×6 矩阵, 秩为 4, $\xi_{FB} = 0$ 。 GEC 分支不存在反螺旋, AD 及 FB 分支各有 2 个反螺旋 (见图 1 结果处)。最后程序分析得到 s_c^r 是空集, 4 个反螺旋都是剩余约束且线性无关, 所以: $\lambda = 0$, $\nu = 0$, $\xi = \xi_{GEC} + \xi_{AD} = 2$, $M = 2$ 。

这里 Matlab 直接用运动副坐标的字符变量计算, 得出各运动螺旋及反螺旋, 涉及的变量虽然多, 但不计轴线矢量和位置矢量的输入时间, 程序分析过程耗时约 1.2 s, 这是手工计算难以达到的。

2.2 空间转向梯形机构

RSSR 空间转向梯形机构简图如图 2 所示。其中: A 、 D 处为转动副, B 、 C 处为球副。该机构有 8 个运动螺旋, 按参数输入规则, 得到两球副中各有一条运动螺旋分别为:

$$\begin{aligned} \$B_1 &= (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z; y_B \Delta_z - z_B \Delta_y, z_B \Delta_x - x_B \Delta_z, x_B \Delta_y - y_B \Delta_x); \\ \$C_1 &= (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z; y_C \Delta_z - z_C \Delta_y, z_C \Delta_x - x_C \Delta_z, x_C \Delta_y - y_C \Delta_x)。 \end{aligned}$$

式中: $\Delta_x = x_C - x_B$; $\Delta_y = y_C - y_B$; $\Delta_z = z_C - z_B$ 。

这是单环机构, $\$B_1 \times \$C_1 = 0$, 且 $h_{B_1} = h_{C_1} = 0$, 因此两个球副之间有一个转动局部自由度, 即 $\xi = 1$, 而 $M = 1$ 。若选 BC 杆为动平台, 机构就相当于有两个分支 ($2-RS$) 的并联机构, 两个球副在不同的分支中, 此时无法判定其存在局部自由度, 所以 $\xi = 0$, 但 $M = 2$ 。实际上, 这是因为 B 、 C 球副之间的构件是输出构件, 其产生的绕自身轴线的转动自然计入到了输出构件的自由度中。这也说明对含有局部自由度的机构, 用式 (1) 计算的自由度与输出构件选择有关。或者按文献 [20] 的观点, 该机构的自由度是 2, 名义自由度是 1。

本例中, 若不以两球心连线作为两球副的一条转动轴线, 而是用 $s_{B_1} = s_{C_1} = (l, m, n)$ 计算运动螺

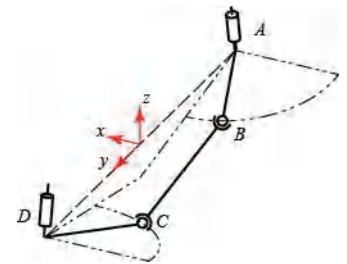


图 2 RSSR 空间转向梯形机构
Fig.2 RSSR spatial steering trapezoidal mechanism

旋, 则得到机构的运动螺旋集维数是 8, 秩是 6, 所以 $M=2$, 也无法判定局部自由度。

2.3 双螺旋机构

如图 3 机构中, 由 3 个构件和 3 个运动副组成, 其中 A、B 处各有 1 个螺旋副, C 处 1 个移动副。3 个运动螺旋分别为:

$$\$ _A = (1 \ 0 \ 0; \ h_A \ 0 \ 0); \$ _B = (1 \ 0 \ 0; \ h_B \ 0 \ 0);$$

$$\$ _C = (0 \ 0 \ 0; \ 1 \ 0 \ 0)。$$

其反螺旋有 4 个 (略), $\lambda=4$, $\nu=0$ 。根据其结构 $\$ _A \times \$ _B = \mathbf{0}$, 即两运动螺旋满足同轴条件。按两种情形讨论:

1) 当 $h_A \neq h_B$ 时, 上述 3 个运动螺旋线性相关 (秩为 2), 但并不存在局部自由度, 可求得 $\xi=0$, $M=1$, 这与文献 [2] 结果相同。

2) 若 $h_A = h_B$ (螺旋同向) 时, 3 个运动螺旋线性相关, 秩也仍然为 2, 本文程序最后求得 $\xi=1$, $M=0$ 。因为依据表 2, 这种情形下有一个局部转动自由度, 表明这时构件 1 的转动仅是构件 1 的螺旋转动, 并没有带动构件 2 产生相对机架 3 的移动。文献 [2] 没有分析这一情形。这个例子表明, 单环机构不能单用“运动螺旋系线性相关”来判定局部自由度, 单环机构中运动螺旋集线性相关只是表明其部分或全部构件可动。

另外, 如果将 2 个螺旋副都等效为 RP 副, 按情形 (2) 分析, 会错误判断出存在 3 个局部自由度, 故而不能将螺旋副 H 等效为 RP 副。

2.4 凸轮机构

图 4 凸轮机构也属于单环机构, 由于高副可以用 RP 等效 (螺旋分别用 $\$ _{BP}$ 和 $\$ _{BR}$ 表示), 这个机构相当于是 RRPRP 单闭环机构, 其 5 个运动螺旋为:

$$\$ _A = (0 \ 0 \ 1; \ 0 \ 0 \ 0); \$ _{BP} = (0 \ 0 \ 0; \ l \ m \ n); \$ _{BR} =$$

$$\$ _C = (0 \ 0 \ 1; \ y_B \ -x_B \ 0); \$ _D = (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 1 \ 0)。$$

其中: $\$ _{BP} = \$ _C$, 有 $\$ _{BR} \times \$ _C = \mathbf{0}$, 机构有 3 个反螺旋 (略), 最后求出 $\lambda=3$, $\nu=0$, $\xi=1$, $M=1$, 与实际情况相符。当然这时求出的活动构件数 $n=4$, 它是在高副低代时增加了一个虚拟杆造成的。当机构中含有没列在表 1 中的等效复合运动副时, 计算得到的活动构件数 n 大于实际构件数, 此时的 n 仅仅是作为计算的参考。

2.5 RRFRC 机构

RRFRC 机构简图见图 5。其中: C 处是平面副; E 处是圆柱副; 其余是转动副。各运动副螺旋轴线为:

$$\mathbf{s}_A = (1, 0, 0); \mathbf{s}_B = (a, b, c); \mathbf{s}_{C_1} = (l_{C_1}, m_{C_1}, n_{C_1}); \mathbf{s}_{C_2} = (l_{C_2}, m_{C_2}, n_{C_2});$$

$$\mathbf{s}_D = (e, f, g); \mathbf{s}_E = (0, 1, 0)$$

式中: \mathbf{s}_{C_1} 、 \mathbf{s}_{C_2} 是平面副上两不平行的矢量, 则可以获得由 8 个螺旋组成的螺旋集, 秩为 6, $\xi=0$, $M=2$ 。但若机构运动到某个位置瞬间, 平面副与 y 轴平行, 即: $\mathbf{s}_{C_2} = (0, 1, 0)$, 则螺旋集的维数及秩数不变, 但 $\mathbf{s}_{C_2} \times \mathbf{s}_E = \mathbf{0}$, 这时不同构件的 C、E 两点之间产生瞬时局部自由度, 即: $\xi=1$, $M=1$ 。

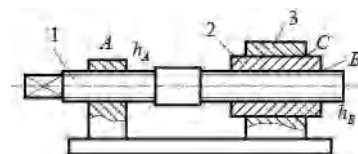


图 3 双螺旋机构

Fig.3 Double screw mechanism

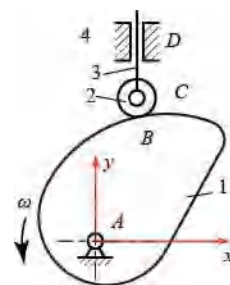


图 4 平面凸轮机构

Fig.4 Planar plate cams

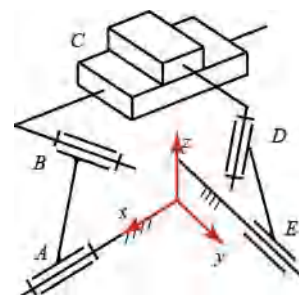


图 5 RRFRC 机构

Fig.5 RRFRC mechanism

3 结论

本文利用 Matlab 提供的强大字符变量、矩阵处理能力, 编写了基于螺旋理论的机构自由度自动分析计算程序。程序可在矢量或坐标输入框处输入任意字母、数字和简单三角函数等组成的表达式, 使运动螺旋模型更符合实际情况, 也便于局部自由度的自动分析计算。与手工计算相比, 分析计算效率更高效。总结得到以下结论: 1) 分支中运动螺旋系线性相关存在局部自由度的判断准则只适用于

多环机构。单环机构中两副之间存在局部移动自由度的充要条件是: 存在两个 $h = \infty$ 的螺旋导路矢量相互平行; 或者, 分支中存在 $0 < h < \infty$ 的螺旋同轴且节距相等。这也同时表明, 同分支具有同类型运动性质的运动副之间才可能产生局部自由度, 否则不可能产生局部自由度。2) 相对局部运动的范围可以扩展到整个分支中, 即同一分支中不同构件上的运动副之间。但若单环机构中一个运动副与多个运动副都满足局部自由度的充要条件, 则规定该运动副仅与其符合相同条件最近的运动副产生一个局部自由度。3) 要正确分析局部自由度, 分支中球副与平面副的三条等效轴线必须按其分支中其他 P 副、R 副、H 副轴线是否平行、对心同轴来选取。Matlab 的字符变量处理能力可以满足运动副按实际信息输入的要求。4) 提出由螺旋反求螺旋线上特殊点坐标及螺旋节距的方法, 可用于并联机构分支闭环等效运动副的参数输入。

[参 考 文 献]

- [1] GOGU GRIGORE. Mobility of mechanisms: a critical review [J]. Mechanism & Machine Theory, 2005, 40(9): 1068-1097.
- [2] 黄真, 曾达幸. 机构自由度计算原理和方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2016: 47-97, 222.
- [3] 张一同, 牟德君. 空间多闭环机构自由度计算的新概念和新理论 [J]. 中国科学: 技术科学, 2010, 40(10): 1182-1188.
- [4] 杨廷力, 沈惠平, 刘安心, 等. 机构自由度公式的基本形式、自由度分析及其物理内涵 [J]. 机械工程学报, 2015, 51(13): 69-80.
- [5] 卢文娟, 张立杰, 谢平, 等. 以对过约束的认识看自由度分析的历史发展 [J]. 2017, 53(8): 81-92.
- [6] 黄真, 刘婧芳, 曾达幸. 基于约束螺旋理论的机构自由度分析的普遍方法 [J]. 中国科学: 技术科学, 2009, 39(1): 84-93.
- [7] 杨廷力, 沈惠平, 刘安心, 等. 机构拓扑学理论的基本思想与数学方法——从方法论角度回顾几种原创性理论与方法 [J]. 机械工程学报, 2020, 56(2): 1-15.
- [8] HUANG ZHEN, LI QINCHUAN. Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using the constraint-synthesis method [J]. The International Journal of Robotics Research, 2003, 22(1): 59-79.
- [9] LI QINCHUAN, CHAI XINXUE, JIANG JINAN. Mobility analysis of limited degrees of freedom parallel mechanisms in the framework of geometric algebra [J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2016, 8(4): 041005.
- [10] YANG DONGCHAO, XIONG JING, YANG XIANGDONG. A simple method to calculate mobility with Jacobian [J]. Mechanism & Machine Theory, 2008, 43(9): 1175-1185.
- [11] 欧阳富, 蔡汉忠, 廖明军. 机构结构新旧自由度计算公式对比之理论研究 [J]. 中国机械工程, 2010, 24(24): 48-54.
- [12] 卢文娟, 张立杰, 张一同. 基于交集运算的自由度快速求解方法 [J]. 中国机械工程, 2015, 26(4): 523-528.
- [13] RICO J M, GALLARDO J, RAVANI B. Lie algebra and the mobility of kinematic chains [J]. Journal of Robotic Systems, 2003, 20(8): 477-499.
- [14] RICO J M, AGUILERA L D, GALLARDO J, et al. A more general mobility criterion for parallel platforms [J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 128(1): 207-219.
- [15] GOGU G. Mobility and spatiality of parallel robots revisited via theory of linear transformations [J]. European Journal of Mechanics/ (A): Solids, 2005, 24(4): 690-711.
- [16] 杜鹃, 吴洪涛, 杨小龙, 等. 基于几何代数的并联机构自由度自动化分析 [J]. 农业机械学报, 2018, 49(6): 401-407, 417.
- [17] 于靖军, 刘辛军, 丁希仑, 等. 机器人机构学的数学基础 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2008: 202-223.
- [18] 卢文娟, 秦开科, 丁季松, 等. 机构中局部自由度和消极自由度判别方法 [J]. 机械设计与研究, 2019, 35(4): 4-69, 76.
- [19] 王成志, 王云超. 麦弗逊悬架螺旋运动分析及其优化设计 [J]. 机械科学与技术, 2021, 40(1): 139-145.
- [20] 牟德君, 张一同, 张兴. 机构自由度和构件自由度的关系及本质区别 [J]. 机械工程学报, 2018, 54(5): 74-83.

(责任编辑 陈 敏 英文审校 郑青榕)