［文章编号］1007 - 7405(2022)01 - 0085 - 05　　DOI:10.19715/j.jmuzr.2022.01.10

双繁星 Wiener 指标的极值

李丹怡，陈乌险，晏卫根

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

［摘要］一个连通的无圈分子图（树）称为双繁星，如果删去其所有悬挂点后，得到的分子图是双星树。主要考虑双繁星的 Wiener 指标的极值问题，完全刻画了具有固定顶点数的双繁星的最小 Wiener 指标。

［关键词］Wiener 指标；双星；双繁星；树

［中图分类号］O 157.6

On the Extremal Wiener Index of Blossomed Double Stars

LI Danyi, CHEN Wuxian, YAN Weigen

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: A tree is called to be a blossomed double star if the graph obtained from the tree by deleting its all pendent vertices is a double star. In this paper, the problem on the extremal Wiener indices of blossomed double stars was considered, and the minimal Wiener index of the blossomed double star with a fixed number of vertices was completely characterized.

Keywords: Wiener index; double star; blossomed double star; tree

0　引言

设 $G=(V,E)$ 是一个连通的简单图，其中，V 是顶点集，E 是边集。连通图 G 的 Wiener 指标[1]定义为

$$W(G)=\sum_{\{u,v\}\subseteq V} d_G(u,v), \tag{1}$$

其中，$d_G(u,v)$ 表示 G 中顶点 u 和 v 之间的距离。

在图论中，把一个化学分子的原子用顶点表示，原子间形成的化学键用边表示，这样得到的图称为此化学分子对应的分子图[2-3]。分子图的图论不变量可以预测相应分子的物理与化学性质，这种不变量称为分子图的拓扑指标。早在 1947 年，Wiener 为了研究无圈分子图的化学性质就提出了图的 Wiener 指标的概念[1]，而式（1）则由文献［4］首次提出，以此来预测链烷烃的沸点[1]。文献［4］还发现，Wiener 指标和化合物的化学性质之间有很强的相关性。可以说，Wiener 指标是迄今为止组合（数学）化学中最重要的拓扑指标之一，是数学化学领域（特别是图论）中的一个热门研究问题，得到了许多数学化学家与组合学家的重点关注[5-7]。

目前，关于树（无圈分子图）的 Wiener 指标已经有大量的研究结果[7-8]。众所周知，所有 n 阶

［收稿日期］2021 - 03 - 31
［基金项目］国家自然科学基金项目（12071180，11571139）
［作者简介］李丹怡（1997—），女，硕士生，从事代数图论的研究。通信作者：晏卫根（1967—），男，教授，博导，从事组合数学与图论方向研究。E-mail:weigenyan@263.net

树中，星形树 S_n 和路 P_n 分别是 Wiener 指标最小和最大的树[9]。文献［10］确定了所有给定最大度的 n 阶树中 Wiener 指标最小的树。文献［11］也给出：在所有给定顶点度序列的 n 阶树中，贪婪树的 Wiener 指标最小，贪婪毛毛虫树的 Wiener 指标最大。这里的贪婪树是由贪婪算法得到的树，具体定义参见文献［11］；贪婪毛毛虫树[12]是指具有度序列为 $(d_1,\cdots,d_n)(d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_k\geqslant 2>d_{k+1}=1)$ 的树，它由给长为 $k-1$ 的路 $v_1-v_2-\cdots-v_k$ 添加悬挂边，使其度序列为 $d(v_1)\geqslant d(v_k)\geqslant d(v_2)\geqslant d(v_{k-1})\geqslant\cdots\geqslant d(v_{[(k+1)/2]})$ 而得到。如果一个树删去其所有悬挂顶点后得到一条路，则称该树为毛毛虫树。文献［13］刻画了每个顶点的度都为奇数的 n 阶树中具有最大与最小 Wiener 指标的树。

给定两个满足 $n-1\geqslant d\geqslant 2$ 的正整数 n 和 d，设 $S_1(n,d)$ 是只有一个顶点 u 的度是 d，而其他顶点 $v(v\neq u)$ 的度都不超过 2 的 n 阶树的集合。因此，由 $S_1(n,d)$ 的定义可以看出，$S_1(n,d)$ 中的树有 d 条路 $P_1,P_2,\cdots,P_d$，且它们仅有一个公共顶点 u。分别用 $n_1,n_2,\cdots,n_d$ 表示这 d 条路 $P_1,P_2,\cdots,P_d$ 的长度，则有 $n-1=\sum_{i=1}^{d}n_i$。为了方便，下文中记这种树为 $T(n;n_1,n_2,\cdots,n_d)$。很显然，$S_1(n,d)=\{T(n;n_1,n_2,\cdots,n_d)\mid n-1=\sum_{i=1}^{d}n_i,n_i\geqslant 1,i=1,2,\cdots,d\}$。文献［14］研究了 $S_1(n,d)$ 中树的 Wiener 指标与相应的偏序之间的关系，并刻画了这类树的 Wiener 指标的极值。

令 S_{d+1} 表示顶点集为 $\{v_0,v_1,\cdots,v_d\}$、中心为 v_0 的星形树。设 $n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_d$ 是 d 个非负整数，在 S_{d+1} 中的每个顶点 $v_i(i=1,2,\cdots,d)$ 上添加 $n_i(n_i\geqslant 0)$ 条悬挂边，从而得到一个 n 阶类星树（$n=\sum_{i=1}^{d}n_i+d+1$），记为 $S(n;n_1,n_2,\cdots,n_d)$。文献［15］称这类树为繁星，并解决了繁星的极值能量问题。文献［16］证明了在所有的 n 阶繁星树 $S(n;n_1,n_2,\cdots,n_d)$ 中 $S(n;n-d-1,0,\cdots,0)$ 的 Wiener 指标最小，$S(n;\underbrace{k+1,\cdots,k+1}_{r},\underbrace{k,\cdots,k}_{d-r})$ 的 Wiener 指标最大，其中 $n-d-1=kd+r$。

对于两个不相交的星形树 S_{r+1} 和 S_{t+1}，其顶点集分别为 $\{u_0,u_1,\cdots,u_r\}$ 和 $\{v_0,v_1,\cdots,v_t\}$。本文将用一条边连接它们的两个中心点 u_0 和 v_0 而得到的树称为双星，记为 $S_{r,t}(t\geqslant r\geqslant 1)$。例如，双星 $S_{2,3}$ 如图 1 所示。

给定两个非负整数 n 与 m，设 $X=(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ 和 $Y=(m_1,m_2,\cdots,m_t)$ 是两个非负整数序列，其中 $n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_r\geqslant 0$，$m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_t\geqslant 0$，且满足 $\sum_{i=1}^{r}n_i=n$ 和 $\sum_{i=1}^{t}m_i=m$。设 $\mathrm{DS}_{r,t}(n,m;X,Y)$ 表示分别在上述双星 $S_{r,t}$ 的每个顶点 $u_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 上添加 n_i 条悬挂边，在每个顶点 $v_j(1\leqslant j\leqslant t)$ 上添加 m_j 条悬挂边后得到的 N 阶树，其中 $N=r+t+n+m+2$。令 $\mathrm{DS}(r,t;n,m)=\{\mathrm{DS}_{r,t}(n,m;X,Y)\mid\sum_{i=1}^{r}n_i=n,\sum_{j=1}^{t}m_j=m\}$。一个树 T 被称为双繁星，若存在 4 个满足 $t\geqslant r\geqslant 1$、$m+n\geqslant 1$ 的整数 r,t,n,m，使得 $T\in\mathrm{DS}(r,t;n,m)$。对于 2 个非负整数序列 $X=(3,1)$、$Y=(2,2,1)$ 的双繁星 $\mathrm{DS}_{2,3}(4,5;X,Y)$ 如图 2 所示。

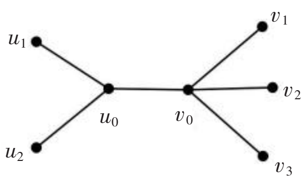

图 1　双星 $S_{2,3}$

Fig.1　A double star $S_{2,3}$

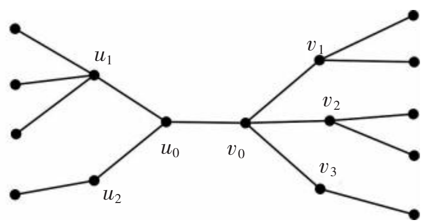

图 2　双繁星 $\mathrm{DS}_{2,3}(4,5;X,Y)$（$X=(3,1)$，$Y=(2,2,1)$）

Fig.2　A blossomed double star $\mathrm{DS}_{2,3}(4,5;X,Y)$ for $X=(3,1)$ and $Y=(2,2,1)$

本文考虑 $\mathrm{DS}(r,t;n,m)$ 中双繁星 Wiener 指标的极值问题，刻画了具有最小 Wiener 指数的双繁星。

1　主要结果及其证明

首先介绍一个关于 Wiener 指标方面的重要结果。

引理 1[1]　设 T 是一个边集为 E 的树，则 T 的 Wiener 指标

$$W(T) = \sum_{e=(x,y)\in E}(n_x(e)n_y(e)),\tag{2}$$

其中：求和中 e 跑遍 T 的所有边；$n_x(e)$ 表示 $T-e$ 中包含顶点 x 那个分支的顶点数，$T-e$ 是从 T 中删去边 e 所得的子图。

本文还需要证明以下引理 2 和引理 3，它们将在后面主要结果的证明中起关键作用。

引理 2　设 $DS_{r,t}(n,m;X,Y)$ 是一个 $N=r+t+2+n+m$ 阶双繁星，其中 $X=(n_1,n_2,\cdots,n_r)$，$Y=(m_1,m_2,\cdots,m_t)$。对于给定的正整数 i 与 $j(1\leqslant i<j\leqslant r)$，如果有 $n_i-n_j\geqslant 2$，设 $X'=(n_1,\cdots,n_i-1,\cdots,n_j+1,\cdots,n_r)$，那么

$$W(DS_{r,t}(n,m;X,Y)) < W(DS_{r,t}(n,m;X',Y))。\tag{3}$$

相似地，对于给定的正整数 $k,l(1\leqslant k<l\leqslant t)$，如果 $m_k-m_l\geqslant 2$，可以令 $Y'=(m_1,\cdots,m_k-1,\cdots,m_l+1,\cdots,m_t)$，那么

$$W(DS_{r,t}(n,m;X,Y)) < W(DS_{r,t}(n,m;X,Y'))。\tag{4}$$

证明　设 $T=DS_{r,t}(n,m;X,Y)$，$T'=DS_{r,t}(n,m;X',Y)$。对 T 与 T'，利用引理 1，不难得到：$W(T)-W(T')=(n_i+1)(N-n_i-1)+(n_j+1)(N-n_j-1)-n_i(N-n_i)-(n_j+2)(N-n_j-2)=-2(n_i-n_j-1)$。因为 $n_i-n_j\geqslant 2$，因此 $W(T)-W(T')<0$。

同理可以证明式（4）的不等式成立。故引理 2 得证。

引理 3　设 $DS_{r,t}(n,m;X,Y)$ 是一个 $N=r+t+2+n+m$ 阶双繁星，其中 $X=(n,0,\cdots,0)$，$Y=(m,0,\cdots,0)$。如果 $n\geqslant 1,m-n\geqslant(r-t-3)/3$，令 $X'=(n-1,0,\cdots,0)$，$Y'=(m+1,0,\cdots,0)$，那么 $W(DS_{r,t}(n,m;X,Y))\geqslant W(DS_{r,t}(n-1,m+1;X',Y'))$，当且仅当 $m-n=(r-t-3)/3$ 时等号成立。

证明　设 $T=DS_{r,t}(n,m;X,Y)$，$T'=DS_{r,t}(n-1,m+1;X',Y')$。由引理 1 可知：$W(T)-W(T')=(n+1)(N-n-1)+(n+r+1)(m+t+1)+(m+1)(N-m-1)-n(N-n)-(n+r)(m+t+2)-(m+2)(N-m-2)=N-n-n-1-(n+r)+t+m+1+m+1-(N-m-2)=3m-3n+t-r+3$。显然，若 $m-n>(r-t-3)/3$，有 $W(T)-W(T')>0$；若 $m-n=(r-t-3)/3$，有 $W(T)=W(T')$。引理 3 证毕。

下面证明本文的 3 个主要结论定理 1 ~ 定理 3。

定理 1　对于 4 个固定的非负整数 $r,t(t\geqslant r\geqslant 1),n,m(m+n\geqslant 1)$，在集合 $DS(r,t;n,m)$ 中，双繁星 $DS_{r,t}(n,m;X^\circ,Y^\circ)$ 的 Wiener 指标最小，其中 $X^\circ=\underbrace{(n,0,\cdots,0)}_{r}$，$Y^\circ=\underbrace{(m,0,\cdots,0)}_{t}$。

证明　假设当 $X^\circ=(n_1,n_2,\cdots,n_r)$、$Y^\circ=(m_1,m_2,\cdots,m_t)$ 时，集合 $DS(r,t;n,m)$ 中双繁星 $DS_{r,t}(n,m;X^\circ,Y^\circ)$ 的 Wiener 指标最小。对给定的整数 $n=\sum_{i=1}^{r}n_i$，若对 $1\leqslant i<j\leqslant r$，存在 $n_i\geqslant n_j\geqslant 1$，即 $(n_i+1)-(n_j-1)\geqslant 2$，可以令 $X'=(n_1,\cdots,n_i+1,\cdots,n_j-1,\cdots,n_r)$。那么，由引理 2，可得 $W(DS_{r,t}(n,m;X',Y^\circ))<W(DS_{r,t}(n,m;X^\circ,Y^\circ))$，这与假设矛盾。

同理，给定整数 $m=\sum_{j=1}^{t}m_j$，对任意 $i,j(1\leqslant i<j\leqslant t)$，不存在整数对 m_i 和 m_j，使 $m_i\geqslant m_j\geqslant 1$。因此，在给定非负整数 r,t,n,m 的情况下，集合 $DS(r,t;n,m)$ 中 $DS_{r,t}(n,m;X^\circ,Y^\circ)$ 的 Wiener 指标最小，其中 $X^\circ=\underbrace{(n,0,\cdots,0)}_{r}$，$Y^\circ=\underbrace{(m,0,\cdots,0)}_{t}$。于是定理 1 成立。

当 r,t,n,m 都是固定的整数时，定理 1 刻画了 $DS(r,t;n,m)$ 中具有最小的 Wiener 指标的双繁星

为 $DS_{r,t}(n,m;X^\circ,Y^\circ)$ 。

对 3 个固定的正整数 $r,t(t \geqslant r \geqslant 1),n+m$ ，定义 $DS(r,t;n+m)$ 为所有满足条件 $x+y=m+n$ 的双繁星集 $DS(r,t;x,y)$ 的并集，即 $DS(r,t;n+m)=\cup\{DS(r,t;x,y)\mid x+y=n+m\}$ 。当 $r,t,n+m$ 都是固定的整数时，下面的定理 2 刻画了 $DS(r,t;n+m)$ 中具有最小的 Wiener 指标的双繁星。

定理 2　对固定的正整数 $r,t(t \geqslant r \geqslant 1),n+m$ ，则 $DS(r,t;n+m)=:\cup\{DS(r,t;x,y)\mid x+y=n+m\}$ 中双繁星 $DS_{r,t}(0,n+m;X^*,Y^*)$ 的 Wiener 指标最小，其中 $X^*=\underbrace{(0,0,\cdots,0)}_{r}$, $Y^*=\underbrace{(n+m,0,\cdots,0)}_{t}$。

证明　给定非负整数 $r,t(t \geqslant r \geqslant 1),n+m$ ，注意到 $DS(r,t;n+m)$ 是所有满足 $x+y=n+m$ 的集合 $DS(r,t;x,y)$ 之并。为了讨论 $DS(r,t;n+m)$ 中具有最小 Wiener 指标的双繁星，可以分为以下 3 个步骤：

首先，对每一对满足 $x+y=n+m$ 的 (x,y) ，由定理 1 可知，在 $DS(r,t;x,y)$ 中，当 $X_x^\circ=\underbrace{(x,0,\cdots,0)}_{r}$, $Y_y^\circ=\underbrace{(y,0,\cdots,0)}_{t}$ 时，$DS_{r,t}(x,y;X_x^\circ,Y_y^\circ)$ 的 Wiener 指标最小。因此，只需讨论 $\min\{W(DS_{r,t}(i,n+m-i;X_i^\circ,Y_{m+n-i}^\circ)\mid i=0,1,\cdots,m+n\}$ 。

其次，由引理 3 可知，如果存在一个正整数 i，使 $(n+m-i)-i>(r-t-3)/3$，即 $1 \leqslant i<(3(n+m)-r+t+3)/6$ ，那么 $W(DS_{r,t}(i,n+m-i;X_i^\circ,Y_{m+n-i}^\circ))>W(DS_{r,t}(i-1,n+m-i+1;X_{i-1}^\circ,Y_{m+n-i+1}^\circ))$。也就是说，当 $1 \leqslant i<(3(n+m)-r+t+3)/6$ 时，可得：$\min\{W(DS_{r,t}(i,n+m-i;X_i^\circ,Y_{m+n-i}^\circ))\mid i<(3(m+n)-r+t+3)/6\}=W(DS_{r,t}(0,n+m;X_0^\circ,Y_{m+n}^\circ))$。同样地，也有 $\min\{W(DS_{r,t}(i,n+m-i;X_i^\circ,Y_{m+n-i}^\circ))\mid i \geqslant(3(m+n)-r+t+3)/6\}=W(DS_{r,t}(n+m,0;X_{m+n}^\circ,Y_0^\circ))$。

最后，又由引理 1 可知，$W(DS_{r,t}(n+m,0;X_{n+m}^\circ,Y_0^\circ))-W(DS_{r,t}(0,n+m;X_0^\circ,Y_{m+n}^\circ))=(n+m+r+1)(t+1)-(n+m+t+1)(r+1)=(n+m)(t-r)$。因为 $t \geqslant r \geqslant 1$ ，所以 $W(DS_{r,t}(n+m,0;X_{n+m}^\circ,Y_0^\circ)) \geqslant W(DS_{r,t}(0,n+m;X_0^\circ,Y_{m+n}^\circ))$。

综上所述，在给定非负整数 $r,t(t \geqslant r \geqslant 1),n+m$ 的情况下，集合 $DS(r,t;n+m)$ 中 $DS_{r,t}(0,n+m;X^*,Y^*)$ 的 Wiener 指标最小，其中 $X^*=\underbrace{(0,0,\cdots,0)}_{r}$，$Y^*=\underbrace{(n+m,0,\cdots,0)}_{t}$。

定理 3　给定正整数 $r+t$ 和 $n+m$，在集合 $DS(r+t;n+m)=:\cup\{DS(x_1,x_2;y_1,y_2)\mid x_1+x_2=t+r;y_1+y_2=m+n\}$ 中，双繁星 $DS_{1,r+t-1}(0,n+m;X^\circ,Y^\circ)$ 的 Wiener 指标最小，其中 $X^\circ=(0)$，$Y^\circ=\underbrace{(n+m,0,\cdots,0)}_{r+t-1}$。

证明　给定正整数 $r+t$ 和 $n+m$，注意到 $DS(r+t;n+m)$ 是所有满足 $x_1+x_2=t+r,1 \leqslant x_1 \leqslant x_2$ 的集合 $DS(x_1,x_2;n+m)$ 之并。

对每一对满足 $x_1+x_2=t+r$ 的 (x_1,x_2) ，由定理 2 可知，在 $DS(x_1,x_2;n+m)$ 中，当 $X_{x_1}^*=\underbrace{(0,0,\cdots,0)}_{x_1}$, $Y_{x_2}^*=\underbrace{(n+m,0,\cdots,0)}_{x_2}$ 时，$DS_{x_1,x_2}(0,n+m;X_{x_1}^*,Y_{x_2}^*)$ 的 Wiener 指标最小。因此只需讨论 $\min\{W(DS_{j,r+t-j}(0,n+m;X_j^*,Y_{r+t-j}^*))\mid j=1,\cdots,[(r+t)/2]\}$。

由引理 1 可得，$W(DS_{j,r+t-j}(0,n+m;X_j^*,Y_{r+t-j}^*))-W(DS_{j-1,r+t-j+1}(0,n+m;X_{j-1}^*,Y_{r+t-j+1}^*))=(j+1)(N-j-1)-j(N-j)=N-2j-1=n+m+r+t-2j+1$。因为 $1 \leqslant j \leqslant[(r+t)/2]$，所以 $W(DS_{j,r+t-j}(0,n+m;X_j^*,Y_{r+t-j}^*))>W(DS_{j-1,r+t-j+1}(0,n+m;X_{j-1}^*,Y_{r+t-j+1}^*))$。也就是说，$\min\{W(DS_{j,r+t-j}(0,n+m;X_j^*,Y_{r+t-j}^*))\mid j=1,\cdots,[(r+t)/2]\}=W(DS_{1,r+t-1}(0,n+m;X_1^*,Y_{r+t-1}^*))$。

综上，在给定非负整数 $r+t$、$n+m$ 的情况下，集合 $\mathrm{DS}(r+t;n+m)$ 中 $\mathrm{DS}_{1,r+t-1}(0,n+m;X^\circ,Y^\circ)$ 的 Wiener 指标最小，其中 $X^\circ=(0)$，$Y^\circ=(\underbrace{n+m,0,\cdots,0}_{r+t-1})$。

2 结论

本文考虑了所谓的双繁星的最小 Wiener 指标问题。此外，确定双繁星的最大 Wiener 指标和能量、谱半径等许多其他拓扑指标的极值问题也是一件非常有意义的工作。而且，双繁星是一类直径为 4 或 5 的无圈分子图，而无圈分子图拓扑指标的极值问题可以应用于理论化学中所谓的定量结构-性质关系和定量结构-活性关系的设计，因此也具有很好的研究意义。

[参考文献]

[1] WIENER H. Structural determination of paraffin boiling points [J]. Journal of the American Chemical Society, 1947, 69: 17-20. DOI:10.1021/ja01193a005.

[2] POGLIANI L. From molecular connectivity indices to semiempirical connectivity terms: recent trends in graph theoretical descriptors [J]. Chemical Reviews, 2000, 31(51): 3827-3858. DOI:10.1002/chin.200051310.

[3] RANDIC M. Aromaticity of polycyclic conjugated hydrocarbons [J]. Chemical Reviews, 2003, 103(9): 3449-3606.

[4] HOSOYA H. Topological index: a newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons [J]. Bulletin of the Chemical Society of Japan, 2006, 44(9): 2332-2339.

[5] KNOR M, SKREKOVSKI R, ALEKSANDRA T A. Mathematical aspects of Wiener index [J]. ARS Mathematica Contemporanea, 2016, 11: 327-352.

[6] DOBRYNIN A A, GUTMAN I, KLAVZAR S, et al. Wiener index of hexagonal systems [J]. Acta Applicandae Mathematica, 2002, 72(3): 247-294. DOI:10.1023/A:1016290123303.

[7] DOBRYNIN A A, ENTRINGER R, GUTMAN I. Wiener index of trees: theory and applications [J]. Acta Applicandae Mathematica, 2001, 66(3): 211-249. DOI:10.1023/A:1010767517079.

[8] 林泓，林晓霞，王洪波. 关于树的 Wiener 数的一个注记 [J]. 集美大学学报（自然科学版），2018, 23(6): 473-474.

[9] ENTRINGER R C, JACKSON D E, SNYDER D A. Distance in graphs [J]. Czechoslavak Mathematical Journal, 1976, 26(2): 283-296.

[10] MIRANCA F, HOFFMANN A, DIETER R, et al. Wiener index versus maximum degree in trees [J]. Discrete Applied Mathematics, 2002, 122(1/3): 127-137. DOI:10.1016/S0166-218X(01)00357-2.

[11] WANG H. The extremal values of the Wiener index of a tree with given degree sequence [J]. Discrete Applied Mathematics, 2008, 156(14): 2647-2654. DOI:10.1016/j.dam.2007.11.005.

[12] ZHANG X D, LIU Y, HAN M X. The maximum Wiener index of trees with given degree sequences [J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2010, 64(3): 661-682. DOI:10.1016/j.dam.2009.02.022.

[13] LIN H. Extremal Wiener index of trees with all degrees odd [J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2013, 70: 287-292.

[14] GUTMAN I, RADA J, ARAUJO O. The Wiener index of starlike trees and a related partial order [J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2000, 42:145-154.

[15] CHEN W X, YAN W G. On the energy of blossomed stars [J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2020, 83(3): 623-630.

[16] WAGNER S G. A class of trees and its Wiener index [J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2006, 91(2): 119-132.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）