[文章编号] 1007-7405(2022)01-0001-16　　DOI:10.19715/j.jmuzr.2022.01.01

**·综　　述·**

# 图的电阻距离综述

杨玉军

（烟台大学数学与信息科学学院，山东 烟台 264005）

**[摘要]** 设 $G$ 是连通图，$G$ 中任意两点之间的电阻距离定义为将 $G$ 中的每条边用电阻（通常用单位电阻）代替后所得到的电网络中这两个节点之间的等效电阻。综述了电阻距离领域的研究进展和重要研究成果，包括电阻距离的计算公式、电阻距离的性质、电阻距离的和法则、电阻距离的递推公式以及若干重要图类的电阻距离解析计算公式。最后，给出了电阻距离研究领域的一个公开问题和两个猜想。

**[关键词]** 电阻距离；Laplacian 矩阵；图上随机游走；Rayleigh 单调性法则；生成树

**[中图分类号]** O 157.5

# A Survey on Resistance Distance of Graph

YANG Yujun

(School of Mathematics and Information Sciences, Yantai University, Yantai 264005, China)

**Abstract:** Let $G$ be a connected graph. The resistance distance between any two vertices of $G$ is defined as the effective resistance between them in the electrical network constructed from $G$ by replacing each edge of $G$ with a resistor(usually by a unit resistor). In the present work, research progress and important research results on resistance distance were surveied, including formulas for computing resistance distance, properties on resistance distance, sum rules on resistance distance, a recursion formula on resistance distance, and analytical formula for resistance distance of some important classes of graphs. Finally, an open problem and two conjectures on resistance distance were proposed.

**Keywords:** resistance distance; Laplacian matrix; random walk on graph; Rayleigh monotonicity rule; spanning tree

## 0　引言

图的电阻距离来源于电网络中的等效电阻。给定一个连通图 $G=(V(G),E(G))$，如果将 $G$ 中的每条边都看作是一个电阻（通常看作单位电阻），则 $G$ 就可以看作一个（纯电阻）电网络 $N$。$G$ 中任意两点 $i$ 和 $j$ 之间的电阻距离[1]，记作 $\Omega_G(i,j)$，定义为 $N$ 中这两个节点之间的等效电阻，即单位电流从其中一个节点流入，从另一个节点流出时这两点间所产生的电势差。

图上最常用到的距离函数是（最短路）距离，其中顶点 $i$ 和 $j$ 之间的距离 $d_G(i,j)$ 定义为连接这两点的最短路的长度。与距离相比，电阻距离在反映图的整体性质方面更有优势，这是因为两点之间

**[收稿日期]** 2021-11-02
**[基金项目]** 国家自然科学基金项目（11671347，12171414）；山东省自然科学基金项目（ZR2019YQ02）
**[作者简介]** 杨玉军（1981—），男，教授，博士，从事图论及其应用研究，E-mail:yangyj@ytu.edu.cn。

的距离只跟连接这两点的最短路的长度有关，而电阻距离不仅跟连接这两点的路的长度有关，也跟连接这两点的路的数目有关。在保持两点之间距离不变的情况下，如果增加一条连接这两点的路，则这两点之间的电阻距离会严格减小。

电阻距离的研究在物理、工程、数学、化学、生态学等众多学科领域都受到重视。电阻距离作为电路理论的重要组成部分，从文献［2］的经典结果开始就得到了众多物理和工程学者的研究，特别是它的计算问题一直是物理和工程中的经典研究问题。在数学领域，1993 年，Klein 等[1]明确指出，等效电阻是图上的距离函数，并将其命名为电阻距离，从此，电阻距离就成为图论领域的一个重要研究对象。更加有意义的是，电阻距离虽然纯粹是物理学概念，但是可以从代数、概率和组合等多个角度给出其等价的数学诠释，因此，它也得到了很多数学工作者的关注。在化学领域，电阻距离不仅比传统距离更适合于描述原子间的波状相互作用，更重要的是，基于电阻距离定义的化学分子拓扑指标，如 Kirchhoff 指标、degree-Kirchhoff 指标、hyper-Kirchhoff 指标等，在定量构效关系（quantitative structure activity relationship，QSAR）和定量构性关系（quantitative structure properties relationship，QSPR）的研究中发挥着重要的作用。在生态学上，电阻距离常被用来构建生态学模型。

本文综述了电阻距离的计算公式、电阻距离的性质、电阻距离的和法则、电阻距离的递推公式以及若干重要图类的电阻距离解析计算公式，并给出了电阻距离研究领域的一个公开问题和两个猜想，为电阻距离的理论研究提供一定的理论参考。

## 1　电阻距离的计算公式

电阻距离虽然是来源于电路理论的物理概念，但是却有着纯粹的数学诠释，这可以从代数、概率和组合等多个角度给出其等价定义，这些等价定义也是电阻距离的数学计算公式。借助这些公式，就可以完全从数学的角度来计算图中的电阻距离。

### 1.1　代数公式

从代数的角度计算图的电阻距离，主要是利用图的 Laplacian 矩阵来计算。通过 Laplacian 矩阵的子矩阵，或者该矩阵的广义逆矩阵，又或者该矩阵的特征值和特征向量来计算。为了给出 Laplacian 矩阵的定义，首先介绍图的邻接矩阵的概念。

**定义 1**　设 $G$ 是连通图，则 $G$ 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 定义为 $\boldsymbol{A}(G)=(a_{ij})_{n\times n}$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & i\text{ 和 }j\text{ 相邻},\\ 0, & \text{其他。}\end{cases} \tag{1}$$

设 $\boldsymbol{D}(G)=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是由 $G$ 的顶点的度组成的对角阵，其中 $d_i$ 表示 $G$ 中顶点 $i$ 的度，则有定义 2。

**定义 2**　图 $G$ 的 Laplacian 矩阵 $\boldsymbol{L}(G)$ 定义为 $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$。

由于 Laplacian 矩阵的行和都等于零，所以 Laplacian 矩阵的行列式等于零。但是，Laplacian 矩阵中任何一个元素的代数余子式均不为零，且都相等。令 $\boldsymbol{L}(i)$ 表示将 Laplacian 矩阵的第 $i$ 行和第 $i$ 列删去后所得到的子矩阵，令 $\boldsymbol{L}(i,j)$ 表示将 Laplacian 矩阵的第 $i$、$j$ 行和第 $i$、$j$ 列同时删去后所得到的子矩阵，则电阻距离有如下定理 1 的计算公式。

**定理 1**[3-6]　设 $G$ 为顶点数为 $n(n\geqslant 3)$ 的连通图，则 $G$ 中任意两点 $i$ 和 $j$ 之间的电阻距离为：

$$\Omega_G(i,j)=\det \boldsymbol{L}(i,j)/\det \boldsymbol{L}(i)。 \tag{2}$$

电阻距离也可以根据 Laplacian 矩阵的广义逆矩阵来计算。为此，下面给出矩阵的广义逆矩阵的定义。

**定义 3**　设 $\boldsymbol{M}$ 是一个 $n\times m$ 阶实矩阵，如果 $m\times n$ 阶实矩阵 $\boldsymbol{H}$ 满足 $\boldsymbol{MHM}=\boldsymbol{M}$，则称 $\boldsymbol{H}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的广义逆矩阵，简称广义逆。特别地，如果 $\boldsymbol{M}$ 的广义逆 $\boldsymbol{H}$ 还满足 $\boldsymbol{HMH}=\boldsymbol{H}$、$(\boldsymbol{MH})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{MH}$、$(\boldsymbol{HM})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{HM}$，则称 $\boldsymbol{H}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的 Moore-Penrose 逆。

根据广义逆理论，任何一个矩阵的广义逆都存在且不一定唯一，而 Moore-Penrose 逆是存在且唯一的[7]。设 $\boldsymbol{H} = (h_{ij})_{n\times n}$ 是 $\boldsymbol{L}(G)$ 一个广义逆矩阵，则有如下定理 2 的计算公式。

**定理 2**[1,8-9]　$G$ 中任意两点 $i$ 和 $j$ 之间的电阻距离为

$$\Omega_G(i,j) = h_{ii} + h_{jj} - h_{ij} - h_{ji}。\tag{3}$$

特别地，如果 $\boldsymbol{H}$ 是对称矩阵，则有

$$\Omega_G(i,j) = h_{ii} + h_{jj} - 2h_{ij}。\tag{4}$$

为方便起见，计算时一般选取 Laplacian 矩阵的 Moore-Penrose 逆，记为 $\boldsymbol{L}^{\dagger}(G)$。容易验证，$\boldsymbol{L}^{\dagger}(G) = (\boldsymbol{L}(G) + \boldsymbol{J}/n)^{-1} - \boldsymbol{J}/n$，其中 $\boldsymbol{J}$ 为 $n$ 阶全 1 矩阵。

利用上面的计算公式，就可以推导出用 Laplacian 矩阵的特征值和特征向量来表示的电阻距离计算公式。为方便起见，设 $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1}$ 是 $G$ 的 Laplacian 矩阵 $\boldsymbol{L}(G)$ 的特征值，称为 $G$ 的 Laplacian 特征值。由于 $\boldsymbol{L}(G)$ 是半正定矩阵，因此 $\boldsymbol{L}(G)$ 的所有特征值均大于或等于零。众所周知，$G$ 连通当且仅当 $\lambda_0 = 0$ 且对 $k > 0$、$\lambda_k > 0$[10]。设 $\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{U}_1, \cdots, \boldsymbol{U}_{n-1}$ 是对应于 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ 的两两正交的单位特征向量，并且假设 $\boldsymbol{U}_k = (u_{k_1}, u_{k_2}, \cdots, u_{k_n})^{\mathrm{T}}$。

**定理 3**[11-13]　设 $G$ 是顶点数为 $n$ 的连通图，则 $G$ 中任意两点 $i$ 和 $j$ 之间的电阻距离为

$$\Omega_G(i,j) = \sum_{k=1}^{n-1}((u_{k_i} - u_{k_j})^2/\lambda_k)。\tag{5}$$

除了 Laplacian 矩阵，电阻距离也可以利用归一化 Laplacian 矩阵来计算。下面首先给出该矩阵的定义。

**定义 4**　图 $G$ 的归一化 Laplacian 矩阵 $\mathscr{L}(G)$ 定义为：$\mathscr{L}(G) = \boldsymbol{D}(G)^{-1/2}\mathscr{L}(G)\boldsymbol{D}(G)^{-1/2}$。

设 $\boldsymbol{\varphi}_0 \leqslant \boldsymbol{\varphi}_1 \leqslant \cdots \leqslant \boldsymbol{\varphi}_{n-1}$ 是 $\mathscr{L}$ 的特征值，称为 $G$ 的归一化 Laplacian 特征值，则有 $\varphi_0 = 0$，并且对 $k > 0$，$\varphi_k > 0$[14]。设 $\boldsymbol{\Phi}_0, \boldsymbol{\Phi}_1, \cdots, \boldsymbol{\Phi}_{n-1}$ 是对应于 $\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_1, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_{n-1}$ 的两两正交的单位特征向量，并且 $\boldsymbol{\Phi}_k = (\boldsymbol{\Phi}_{k_1}, \boldsymbol{\Phi}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{\Phi}_{k_n})^{\mathrm{T}}, k = 0, 1, \cdots, n-1$。

**定理 4**[15]　设 $G$ 是顶点数为 $n$ 的连通图，则 $G$ 中任意两点 $i$ 和 $j$ 之间的电阻距离为

$$\Omega_G(i,j) = \sum_{k=1}^{n-1}[(\boldsymbol{\Phi}_{k_i}/\sqrt{d_i} - \boldsymbol{\Phi}_{k_j}/\sqrt{d_j})^2/\boldsymbol{\varphi}_k]。\tag{6}$$

### 1.2　概率公式

概率公式主要是利用图上随机游走来计算电阻距离。设图 $G$ 是顶点数为 $n$ 的连通图，令 $p_{ij} = \begin{cases} 1/d_i, & i \text{ 和 } j \text{ 相邻}, \\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$ 则图 $G$ 上的简单随机游走定义如下。

**定义 5**　一个质点在图 $G$ 上的简单随机游走是一随机序列：$X_0, X_1, \cdots, X_n, \cdots$，这里 $X_n$ 表示质点在 $n$ 时刻的位置，若质点在 $n$ 时刻位于顶点 $i$，则下一时刻它位于顶点 $j$ 的概率是 $p_{ij}$。

令 $P(i \to j)$ 表示质点从 $i$ 出发，在回到 $i$ 之前到达 $j$ 的概率，也称作逃逸概率，则电阻距离可以由逃逸概率通过下面的定理 5 来计算。

**定理 5**[16]　$G$ 中任意两点 $i$ 和 $j$ 之间的电阻距离为

$$\Omega_G(i,j) = 1/(d_i P(i \to j))。\tag{7}$$

接下来，考虑图上随机游走的 2 个重要参数：一个是质点从 $i$ 出发首次到达 $j$ 所需步数的期望值，称作从 $i$ 到 $j$ 的平均首达时间，记作 $H(i,j)$；另一个是从 $i$ 到 $j$ 的平均往返时间，记作 $C(i,j)$，定义为质点从 $i$ 出发到达 $j$ 再返回 $i$ 所需步数的期望值，即 $C(i,j) = H(i,j) + H(j,i)$。有意思的是，两点之间的电阻距离和这两点之间的平均往返时间之间仅仅相差一个常数倍。

**定理 6**[17]　$G$ 中任意两点 $i$ 和 $j$ 之间的电阻距离为

$$\Omega_G(i,j) = C(i,j)/(2|E(G)|)。\tag{8}$$

### 1.3　组合公式

事实上，也可以用组合的方法来计算电阻距离。为此，首先介绍生成森林的概念。

**定义6** 图 $G$ 的一个 $k$-生成森林 $F$ 定义为图 $G$ 的一个子图，它是 $k$ 棵树的不交并且包含 $G$ 的所有顶点。若 $k=1$，则称 $F$ 为 $G$ 的生成树。

图的生成森林的数目和图的Laplacian矩阵和之间具有深刻的联系。著名的矩阵-树定理就建立了图的生成树的数目和Laplacian矩阵的余子式之间的关系。

**定理7**[2] $\boldsymbol{L}(G)$ 中任一元素的代数余子式就等于 $G$ 的支撑树的数目 $\tau(G)$。也就是说，对每个 $i$，都有 $\det \boldsymbol{L}(i)=\tau(G)$。

对于图 $G$ 的2-生成森林，也有类似的结论。设 $F$ 是 $G$ 的一个2-生成森林，如果顶点 $i$ 和 $j$ 分别位于 $F$ 的两个不同的连通分支中，则称 $F$ 分离 $i$ 和 $j$。记 $G$ 中分离 $i$ 和 $j$ 的2-生成森林的数目为 $\tau_G(i,j)$，则有定理8。

**定理8**[5,18] 对于 $i\neq j$, $\det L(i,j)$ 就等于 $G$ 的分离 $i$、$j$ 两点的2-支撑森林的数目，即 $\det \boldsymbol{L}(i,j)=\tau_G(i,j)$。

将定理7和定理8中的结果代入定理1，就可以得到计算电阻距离的组合公式。

**定理9**[5]

$$\Omega_G(i,j)=\tau_G(i,j)/\tau(G)。\tag{9}$$

最后，需要特别说明的是，本节所介绍的电阻距离的计算公式都是在非赋权图上考虑的，即每条边上的权值都是1。实际上，这些结果都可以推广到赋权图上，在此不一一给出。

## 2 电阻距离的性质

本节介绍关于电阻距离的一些性质，既包括作为距离所满足的一些数学性质，也包括作为等效电阻所满足的电路理论中的一些基本原理。本节所介绍的内容大多是在赋权图上讨论的，边上的权值代表边的电导（电阻的倒数）。显然，非赋权图可以看作赋权图的特殊情形。

作为图上的距离函数（或内在度量），电阻距离自然满足度量的性质。

**性质1** 设 $\Omega_G(x,y)$ 是图 $G$ 上的电阻距离函数，则 $\Omega_G(x,y)$ 满足：1）非负性，即对 $x,y\in V(G)$, $\Omega_G(x,y)\geqslant 0$，等号成立当且仅当 $x=y$；2）对称性，对 $x,y\in V(G)$，$\Omega_G(x,y)=\Omega_G(y,x)$；3）三角不等式，对 $x,y,z\in V(G)$，$\Omega_G(x,y)\leqslant\Omega_G(x,z)+\Omega_G(z,y)$。

电阻距离还满足一个重要的数学性质，它是关于边上权值的凸函数。

**性质2**[19]（凸函数性质） 设 $G_1$ 和 $G_2$ 是两个具有相同的顶点集和边集的图，边 $e$ 上的权值分别为 $w_{G_1}(e)$ 和 $w_{G_2}(e)$。对任意 $\theta\in[0,1]$，设 $G_\theta$ 是具有相同顶点集和边集的图，并且 $G_\theta$ 中边 $e$ 上的权值满足 $w_{G_\theta}(e)=\theta w_{G_1}(e)+(1-\theta)w_{G_2}(e)$，则对任意两点 $u,v$，

$$\Omega_{G_\theta}(u,v)\leqslant\theta\Omega_{G_1}(u,v)+(1-\theta)\Omega_{G_2}(u,v)。\tag{10}$$

注意到上面性质里图中边上的权值是这条边的电导，如果边上的权值换作电阻的话，则电阻距离就变成了关于边上权值的凹函数，该结论早在1956年就被Shannon等[20]得到。

接下来讨论电阻距离的割点性质。若连通图 $G$ 中的一个点 $x$ 满足 $G$-$x$ 不连通，则称 $x$ 是图 $G$ 的一个割点。如果两个点位于 $G$-$x$ 的不同分支中，那么连接这两点的所有的路都要经过 $x$，此时这两点之间的电阻距离可以表示为这两点到割点的电阻距离之和，这个性质就是电阻距离所满足的割点性质。

**性质3**[1]（割点性质） 设 $x$ 是图 $G$ 的一个割点，$a$ 和 $b$ 分别位于 $G$-$x$ 的不同连通分支中，则有

$$\Omega_G(a,b)=\Omega_G(a,x)+\Omega_G(x,b)。\tag{11}$$

为了计算和估计电阻距离，经常会对电网络进行简化或者进行一些等效变换。首先介绍最常用到的众所周知的基本法则——串联法则和并联法则，这两个法则可以由基尔霍夫定律直接得到。

**性质4** 1）设 $P$ 是一条路，$a$、$b$ 是 $P$ 的两个端点，那么 $a$、$b$ 之间的电阻距离等于 $P$ 中所有边上的电阻之和（串联法则）；2）设 $G$ 是由两个点 $a$、$b$ 以及连接这两点的 $s$ 条独立路所构成的图，假设这 $s$ 条独立路上的边的电阻之和分别是 $r_1,r_2,\cdots,r_s$，则有 $1/\Omega_G(a,b)=1/r_1+1/r_2+\cdots+1/r_s$（并

联法则）。

除了串并联法则，在电路理论中，星形联结与三角形联结的等效变换（$Y$-$\Delta$ 变换）也是一个经常用到的基本变换。

**性质 5**[21]（$Y$-$\Delta$ 变换）　设三角形联结的 3 个顶点是 $u_1,u_2,u_3$，3 条边 $u_1u_2,u_1u_3$ 和 $u_2u_3$ 上的电阻值分别是 $R_{12}$、$R_{13}$ 和 $R_{23}$；再设星形联结的中心点是 $u$，其余 3 个顶点是 $u_1$、$u_2$、$u_3$，3 条边 $u_1u$、$u_2u$ 和 $u_3u$ 上的电阻值分别是 $r_1$、$r_2$ 和 $r_3$，则有：1）星形联结可以通过 $R_{12}=(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)/r_3$、$R_{13}=(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)/r_2$、$R_{23}=(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)/r_1$ 转换为三角形联结；2）三角形联结可以通过 $r_1=R_{12}R_{13}/(R_{12}+R_{13}+R_{23})$、$r_2=R_{12}R_{23}/(R_{12}+R_{13}+R_{23})$、$r_3=R_{13}R_{23}/(R_{12}+R_{13}+R_{23})$ 转换为星形联结。

接下来介绍电阻距离的消去法则。图 $G$ 的一个不含割点的极大连通子图称作一个块。如果 $G$ 的一个块恰好包含 $G$ 的一个割点，那么就可以给出下面的法则。

**性质 6**[22]（消去法则）　设 $B$ 是连通图 $G$ 的块，且 $B$ 恰包含图 $G$ 的的一个割点 $x$。设 $G'$ 是 $G$ 中将 $B$-$x$ 的所有顶点删掉后所得到的图，则对 $G'$ 中的任意两个顶点 $u$、$v$，

$$\Omega_G(u,v)=\Omega_{G'}(u,v)。\tag{12}$$

下面再来介绍一个非常有用的变换——替代原理。在给出该原理之前，先介绍 $S$-等价的概念。设图 $G$ 和 $H$ 的顶点集分别为 $V(G)$ 和 $V(H)$，称 $G$ 和 $H$ 是 $S$-等价的。如果对任意的 $u,v\in S$，都有 $\Omega_G(u,v)=\Omega_H(u,v)$，其中 $S\subseteq V(G)\cap V(H)$。显然，前面介绍的星形联结与三角形联结就是 $\{u_1,u_2,u_3\}$-等价的。类似于星形联结与三角形联结的等效变换，在计算电阻距离的时候，可以将图中的子图用等价的图进行替代。

**性质 7**（替代原理）　设 $H$ 是 $G$ 的一个子图，且 $H$ 与 $H^*$ 是 $V(H)$-等价的，那么将 $G$ 中的 $H$ 替代成 $H^*$ 得到的图 $G^*$ 满足 $\Omega_G(u,v)=\Omega_{G^*}(u,v)$，其中 $u,v\in V(G)$，即 $G$ 与 $G^*$ 是 $V(G)$-等价的。

以上都是在网络拓扑结构方面对网络进行等效变换和化简，下面考虑从代数的角度对网络进行简化，也称作网络的 Kron 简化[23]。为此，将图 $G$ 的顶点划分为两个集合 $V_1$ 和 $V_2$，$V_1$ 中的顶点称作边界点，$V_2$ 中的顶点称做内点，目的是通过网络的简化来计算边界点之间的电阻距离。根据顶点划分，图 $G$ 的 Laplacian 矩阵就可以写成如下的分块矩阵：$\boldsymbol{L}(G)=\begin{bmatrix}L_{11} & L_{12}\\ L_{12}^T & L_{22}\end{bmatrix}$。令 $\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{L}_{11}-\boldsymbol{L}_{12}^{-1}\boldsymbol{L}_{12}^T$，则 $\boldsymbol{L}'$ 也可以看作某个图 $G'$ 的 Laplacian 矩阵。显然，$G'$ 的顶点集合是 $V_1$，是一个规模比 $G$ 更小的网络。文献［23］就得到了如下的性质 8。

**性质 8**[23]（Kron 简化）　设 $G$ 是连通图，$G'$ 是以 $\boldsymbol{L}'$ 作为 Laplacian 矩阵的图，则对 $G$ 的任意两个边界点 $u,v\in V_1$，有

$$\Omega_G(u,v)=\Omega_{G'}(u,v)。\tag{13}$$

通过对原来的网络进行 Kron 简化，将原有的网络转化为一个规模更小的网络，因此计算的复杂度明显降低。

除了电阻距离的精确计算，电阻距离的界的估计也是一个具有重要意义的研究问题。众所周知，电路理论中著名的 Rayleigh 单调性法则，就是对电阻距离进行界的估计的一个基本法则。

**性质 9**[16]（Rayleigh 单调性法则）　如果 $G$ 中某条边上的电阻值增加，则 $G$ 中任意两点之间的电阻距离只增不减；反之，如果 $G$ 中某条边上的电阻值减小，则 $G$ 中任意两点之间的电阻距离只减不增。

作为 Rayleigh 单调性法则的推论，可以容易得到 Rayleigh 短切方法。确切来说，如果将 $G$ 中的某条边删掉，相当于将该条边上的电阻值增加为无穷大，因此由 Rayleigh 单调性法则可知，所删边后图中任意两点之间的电阻距离都不小于之前这两点之间的电阻距离；而如果将 $G$ 中两个点等同为一个点，相当于将这两个点用电阻值为零的导线短路相接，也就是将连接这两点的边上的电阻值降为零，由 Rayleigh 单调性法则可知，短接后任意两点之间的电阻距离不大于之前这两点之间的电阻距离。因

此，在估计电阻距离时的一个重要技巧就是对原图进行删边或者短接操作，将原图转化为结构更为简单或者规模更小的图，进而通过所得到新图的电阻距离给出原图电阻距离的上界或者下界。比如，对连通图 $G$ 中的任意两个顶点 $u$、$v$，取连接这两点的一条最短路 $P$，在 $G$ 中将不在 $P$ 上的边全部删掉，所得的图称为 $G'$。显然，$G'$ 中 $u$、$v$ 之间的电阻距离 $\Omega_{G'}(u,v)$ 就等于它们在 $G$ 中的距离 $d_G(u,v)$，由 Rayleigh 短切方法可知，$\Omega_G(u,v) \leqslant \Omega_{G'}(u,v) = d_G(u,v)$。这就表明两点之间的距离是它们之间的电阻距离的一个上界。因此，显然有下面的性质10。

**性质10**[1]　设 $G$ 是连通图，则对 $G$ 中任意两个顶点 $u$ 和 $v$，有

$$\Omega_G(u,v) \leqslant d_G(u,v), \tag{14}$$

等号成立当且仅当 $u$ 和 $v$ 之间仅有唯一的一条路相连。

借助于 Rayleigh 单调性法则，文献［24］给出了由顶点的度表示的电阻距离的下界。

**性质11**[24]　设 $G$ 是简单连通图，则任意两点 $u$、$v$ 之间的电阻距离满足

$$\Omega_G(u,v) \geqslant 1/(d_v+1)+1/(d_u+1), \tag{15}$$

等式成立当且仅当 $u$、$v$ 相邻并且在 $G$-$\{u,v\}$ 中有相同的邻集，其中 $d_u$ 表示 $G$ 中顶点 $u$ 的度。

本节的最后给出一个图及其对偶图的电阻距离之间的一个有趣的关系式。这里考虑的图是非赋权图，即图中每条边上的电阻值都是1。设 $G$ 是2-边连通图，则图 $G^*$ 称作图 $G$ 的对偶图，如果存在一个双射 $\varphi:E(G)\rightarrow E(G^*)$，满足 $G$ 的边子集 $E$ 是 $G$ 的一个圈当且仅当 $\varphi(E)$ 是 $G^*$ 的一个极小边割。事实上，对于所考虑的有限图而言，Whiteny[25] 的经典结果表明，如果 $G^*$ 是有限图 $G$ 的对偶图，则 $G$ 和 $G^*$ 都是平面图并且互为几何对偶。这里，平面图的几何对偶定义如下：设 $G$ 是平面图，在平面图 $G$ 的每个面内选取一点作为顶点，对于 $G$ 的任一条边，将与其相邻的两个面内的顶点用一条仅与有一交点且不与图 $G$ 的其他任何边相交的简单曲线连结，这样得到的平面图称为 $G$ 的几何对偶，记作 $G^*$。容易看出，上述几何对偶的定义给出了 $G$ 和 $G^*$ 的边之间的一一对应，$G$ 中的边 $e$ 和 $G^*$ 中的对应边 $G^*$ 就成为一对对偶边。

Thomassen 建立了如下的关于一个图及其对偶图的电阻距离之间的关系。

**性质12**[26]　设 $G$ 是平面图，$G^*$ 是 $G$ 的对偶图，$e=uv$ 和 $e^*=u^*v^*$ 互为对偶边，则有

$$\Omega_G(u,v)+\Omega_{G^*}(u^*,v^*)=1。 \tag{16}$$

## 3　电阻距离的和法则

图中所有顶点或者部分顶点之间的电阻距离之和满足一些非常简洁漂亮的等式关系，也称这些等式关系为电阻距离的和法则。本节将综述电阻距离所满足的一些和法则。需要说明的是，本节所考虑的是非赋权图的情形，尽管很多结果都可以推广到赋权图上。为简便起见，在不产生歧义的前提下，一般将 $\Omega_G(i,j)$ 简写为 $\Omega(i,j)$。

在电阻距离的和法则中，早在1949年，Foster 就建立了一个著名的法则，称作 Foster 第一公式。

**定理10**[27]（Foster 第一公式）　设 $G$ 是顶点数为 $n$ 的连通图,则有

$$\sum_{i\sim j}\Omega(i,j)=n-1, \tag{17}$$

和号取遍所有的相邻的点对。

如此简洁美妙的结果引起了众多学者的兴趣，该公式后来被多位学者从不同的角度给出了证明，特别是文献［28］就从组合的角度给出了该公式的证明。

1961年，Foster 又得到了一个新的和法则，称为 Foster 第二公式。

**定理11**[29]（Foster 第二公式）　设 $G$ 是顶点数为 $n$ 的连通图，则有

$$\sum_{ik,kj\in E(G)}\Omega(i,j)/d_k=n-2。 \tag{18}$$

和号取遍所有的相邻边 $ik$ 和 $kj$。

后来，多位学者又进一步将上述结果推广到了所谓的 Foster 第 $k$ 公式。

**定理 12**[30-32]（Foster 第 $k$ 公式）　设 $G$ 是顶点数为 $n$ 的连通图，则有

$$\sum_{i,j=1}^{n}(d_i\Omega(i,j)P_{ij}^{k})\Big/2 = n-k+\sum_{j=1}^{k-1}\mathrm{tr}(P^j), \tag{19}$$

其中：$P^k$ 表示图上随机游走的状态转移矩阵 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}(G)^{-1}\boldsymbol{A}(G)$ 的 $k$ 次幂；tr 表示矩阵的迹。

2002 年，Klein 巧妙地建立了以矩阵元素赋权的所有顶点的电阻距离之和的等式关系，为后续一系列电阻距离和法则的建立奠定了基础。

**定理 13**[30]　对顶点数为 $n$ 的图 $G$ 以及任意的 $n\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{M}$，

$$\sum_{i,j\in V(G)}[\boldsymbol{L}(G)\boldsymbol{M}\boldsymbol{L}(G)]_{ij}\Omega(i,j) = -2\mathrm{tr}[\boldsymbol{M}\boldsymbol{L}(G)]。\tag{20}$$

由于定理 13 中的矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是任意矩阵，因此通过将 $\boldsymbol{M}$ 取作一些特殊矩阵，就可以得到一些有趣的关系式。容易验证，如果令 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{L}^{\dagger}$，就可以得到 Foster 第一公式。如果令 $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{L}^{\dagger})^2$，就可以得到图中所有顶点对之间的电阻距离之和的一个重要的计算公式。

**定理 14**[33]　设 $G$ 是顶点数为 $n$ 的连通图，则有

$$\sum_{i<j}\Omega(i,j) = n\sum_{i=1}^{n-1}(1/\lambda_i)。\tag{21}$$

定理 14 中等号的左侧就是著名的分子结构拓扑指标——Kirchhoff 指标，因此该定理建立了 Kirchhoff 指标与 Laplacian 特征值之间的一个非常优美的关系式。类似地，文献［34］也建立了度乘积 Kirchhoff 指标与归一化 Laplacian 矩阵的特征值之间的一个优美的关系式，即定理 15。

**定理 15**[34]　设 $G$ 是顶点数为 $n$、边数为 $m$ 的连通图，则有

$$\sum_{i<j}(d_id_j\Omega(i,j)) = 2m\sum_{i=1}^{n-1}(1/\varphi_i)。\tag{22}$$

在定理 13 中取矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为除位于第 $i$ 行第 $j$ 列的那个元素为 1 以外其余元素为 0 的矩阵，Klein 得到了下面的和法则。

**定理 16**[30]　在连通图 $G$ 中，令 $i,j\in V(G)$，则

$$d_i^{-1}\sum_{k,l\in n(i)}\Omega(k,l) = \sum_{k\in n(i)}\Omega(k,i)-1, \tag{23}$$

$$d_id_j\Omega(i,j)-d_i\sum_{l\in n(j)}\Omega(i,l)-d_j\sum_{k\in n(i)}\Omega(k,j)+\sum_{k\in n(i)}\sum_{l\in n(j)}\Omega(k,l) = 2\delta_{i\sim j},\ i\neq j。\tag{24}$$

其中：$n(i)$ 表示顶点 $i$ 的邻集；如果 $i$ 和 $j$ 相邻，$\delta_{i\sim j}$则取值为 1，否则为 0。

在定理 13 的基础上，文献［34］通过选取恰当的矩阵 $\boldsymbol{M}$，建立了新的电阻距离（局部）和法则，主要结果如定理 17。

**定理 17**　设 $G$ 是顶点数为 $n$ 的连通图，则：1）对任意的 $i,j\in V(i\neq j)$，有

$$d_i\Omega(i,j)+\sum_{k\in n(i)}[\Omega(k,i)-\Omega(k,j)] = 2; \tag{25}$$

2）对任意 3 个不同的顶点 $i,j,k\in V$，有

$$d_k[\Omega(k,i)-\Omega(k,j)]+\sum_{l\in n(k)}[\Omega(l,j)-\Omega(l,i)] = 0。\tag{26}$$

后续研究表明，定理 17 在电阻距离的计算中具有非常重要的应用，特别是在计算一些特殊图类以及图运算的电阻距离时非常有效。

类似于 Klein 在 2002 年得到的定理 13 的结果，文献［35］得到了定理 18 和定理 19。

**定理 18**[35]　对顶点数为 $n$ 的图 $G$ 和每一列的元素之和都为 0 的任意 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{M}$，有

$$\sum_{i,j\in V}((\boldsymbol{M}\boldsymbol{L})_{ij}\Omega(i,j)) = -2\mathrm{tr}(\boldsymbol{M})。\tag{27}$$

**定理 19**[35]　对顶点数为 $n$ 的图 $G$ 和每一行的元素之和都为 0 的任意 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{M}$，有

$$\sum_{i,j\in V}((\boldsymbol{LM})_{ij}\Omega(i,j)) = -2\mathrm{tr}(\boldsymbol{M})。\tag{28}$$

通过将定理 18 和定理 19 中的 $\boldsymbol{M}$ 取作特殊矩阵，得到了下面的定理 20 ~ 定理 22。

**定理 20**[35]　设 $i$，$j$ 是图 $G$ 的顶点，则

$$(d_i+d_j)\Omega(i,j)+\sum_{k\in n(i)\setminus n(j)}[\Omega(i,k)-\Omega(j,k)]+\sum_{k\in n(j)\setminus n(i)}[\Omega(j,k)-\Omega(i,k)]=4。\tag{29}$$

**定理 21**[35]　设 $i,j,k$ 是图 $G$ 的顶点，则

$$\sum_{s=1}^{n}[(l_{js}-l_{ks})\Omega(i,s)+(l_{is}-l_{js})\Omega(j,s)+(l_{ks}-l_{is})\Omega(k,s)]=0。\tag{30}$$

**定理 22**[35]　设 $i,j,k,l$ 是 $G$ 的顶点，则

$$\sum_{s=1}^{n}[(l_{ls}-l_{ks})\Omega(i,s)+(l_{ks}-l_{js})\Omega(j,s)+(l_{js}-l_{is})\Omega(k,s)+(l_{is}-l_{ls})\Omega(l,s)]=4。\tag{31}$$

需要指出的是，利用定理 20 ~ 定理 22 中的结果，文献［35］得到：对顶点集合的大小为 2、3 或 4 的子集 $S$，如果 $S$ 中的顶点在 $G$-$S$ 中有相同的邻集 $N$，那么 $S$ 中任意两点的电阻距离就可以根据 $N$ 的大小给出。换句话说，它们可以被子图 $G[S]$ 和 $N$ 的大小唯一确定。一个自然的问题就是，当 $S$ 中的顶点数大于 4 时，结果还是否成立？文献［35］证明了该性质对顶点数任意多的 $S$ 都是成立的，从而给出了下面的简化原理。

**性质 13**（简化原理）　如果 $S\subset V(G)$ 满足 $S$ 中的所有顶点在 $G$-$S$ 中有相同的邻集 $N$，则 $S$ 中任意两点之间的电阻距离就等于在 $G$［$S\cup N$］中删除所有连接 $N$ 中顶点之间的边后所得子图中这两点之间的电阻距离。

## 4　电阻距离的一个递推公式

本节主要介绍计算电阻距离的一个重要的方法——递推公式。在计算电阻距离的时候，一个自然的想法就是在图中删掉一条边后，能否利用删边后的子图的电阻距离来计算原图的电阻距离。如果能够实现的话，那么就可以对原图逐步删边，从而使得电阻距离的计算变得更加容易。文献［36］就考虑并解决了这一问题。并且，该文考虑了更一般的情形，就是给赋权图上某条边的权值一个变化量，考虑变化后的图和原图的电阻距离之间的关系。

利用发生扰动后矩阵的逆矩阵的变化情况，文献［36］就得到了赋权图 $G$ 的某条边上的权值发生变化后电阻距离的变化情况。

**定理 23**[36]（赋权图的电阻距离递推公式）　设 $\Omega$ 和 $\Omega'$ 分别是赋权图 $G$ 和 $G'$ 上的电阻距离函数，$G$ 和 $G'$ 具有相同的顶点集和边集，并且除了边 $e=ij$ 上的权值分别是 $w$ 和 $w'$ 之外，其余边上的权值都完全相同，则对 $p,q\in V(G)=V(G')$，有

$$\Omega'(p,q)=\Omega(p,q)-\{\delta\cdot[\Omega(p,i)+\Omega(q,j)-\Omega(p,j)-\Omega(q,i)]^2\}/\{4[1+\delta\cdot\Omega(i,j)]\},\tag{32}$$

其中 $\delta=w'-w$。

对于非赋权图的情形，由于删边相当于将边上的权值（电导）由 1 变为 0，加边相当于将边上的权值由 0 变为 1，因此由定理 23 容易得到定理 24。

**定理 24**[36]（非赋权图的电阻距离递推公式）　若 $G=G'+ij$，则有

$$\Omega(p,q)=\Omega'(p,q)-\{[\Omega'(p,i)+\Omega'(q,j)-\Omega'(p,j)-\Omega'(q,i)]^2\}/\{4[1+\Omega'(i,j)]\};\tag{33}$$

若 $G=G'-ij$，则有

$$\Omega(p,q)=\Omega'(p,q)+\{[\Omega'(p,i)+\Omega'(q,j)-\Omega'(p,j)-\Omega'(q,i)]^2\}/\{4[1-\Omega'(i,j)]\}。\tag{34}$$

根据电阻距离的递推公式，容易推导出 Rayleigh 单调性法则中的结论。并且，Rayleigh 单调性法则只是给出了电阻距离变化情况的定性描述，而电阻距离的递推公式还给出了图中某条边上的电阻值发生变化后，图中任意两点的电阻距离变化情况的精确的定量描述。并且，文献［36］还进一步得

到，如果边 $e=ij$ 上的权值发生变化，那么 $G$ 中 $i$ 和 $j$ 之间的电阻距离的变化量最大。事实表明，电阻距离递推公式在计算一些特殊图的电阻距离时非常有效。

接下来，根据电阻距离递推公式进一步考虑将 $G$ 中的两个点 $i$ 和 $j$ 短接（将两个点等同为一个点）后电阻距离的变化情况。

**定理 25**[36]　设 $G^*$ 是将 $i$ 和 $j$ 等同为一个点后所得到的图，则有

$$\Omega^*(p,q)=\Omega(p,q)-\{[\Omega(p,i)+\Omega(q,j)-\Omega(p,j)-\Omega(q,i)]^2\}/(4\Omega(i,j))。\tag{35}$$

由定理 23 和定理 25 就可以得到关于 $G$、$G'$ 和 $G^*$ 的电阻距离之间的一个有趣的关系式。

**定理 26**[36]　设 $G$、$G'$ 和 $G^*$ 定义如上，则有 $\Omega(p,q)=[1+\delta\cdot\Omega(i,j)]\Omega'(p,q)-\delta\cdot\Omega(i,j)\Omega^*(p,q)$。

特别地，如果考虑非赋权图的情形，对 $e\in E(G)$，设 $G'=G-e$，$G^*=G/e$，其中 $G/e$ 表示在 $G$ 中收缩边 $e$，则由定理 26 可以得到下面的删边-收缩定理。

**定理 27**[36]　设 $G$ 是非赋权图且 $e$ 是 $G$ 的一条边，令 $G'=G-e$，$G^*=G/e$，则有：$\Omega(p,q)=[1-\Omega(i,j)]\Omega'(p,q)+\Omega(i,j)\Omega^*(p,q)$。

设 $C$ 是连通图 $G$ 的边集合的一个子集合，若 $G$-$C$ 不连通，则称 $C$ 为 $G$ 的一个边割集。进一步，如果 $|C|=k$，则称 $C$ 是一个 $k$-边割集。电阻距离的递推公式另一个重要应用就是，如果图 $G$ 包含极小的 2-边割集或者 3-边割集，那么，$G$ 中的电阻距离就可以由删掉边割后所得到的子图的电阻距离来计算。

**定理 28**[36]　设 $G$ 是连通图，$C$ 是 $G$ 的一个极小 2-边割集，$G_1$ 和 $G_2$ 是 $G$-$C$ 的两个连通分支。若 $p$ 和 $q$ 属于 $G_1\cup G_2$ 的同一个连通分支，不妨设为 $G_1$，则有

$$\begin{aligned}\Omega(p,q)=\Omega_{G_1}(p,q)-\{[\Omega_{G_1}(p,i_1)+\Omega_{G_1}(q,i_2)-\Omega_{G_1}(p,i_2)-\Omega_{G_1}(q,i_1)]^2\}/\\ [8+4\Omega_{G_1}(i_1,i_2)+\Omega_{G_2}(j_1,j_2)];\end{aligned}\tag{36}$$

若 $p\in G_1$ 且 $q\in G_2$，则有：

$$\Omega(p,q)=(-a^2-b^2-c^2+2(ab+ac+bc)+4(a+b)+4)/(8+4c)。\tag{37}$$

其中：$a=\Omega_{G_1}(p,i_1)+\Omega_{G_1}(q,j_1)$；$b=\Omega_{G_2}(p,i_2)+\Omega_{G_2}(q,j_2)$；$c=\Omega_{G_1}(i_1,i_2)+\Omega_{G_2}(j_1,j_2)$。

对于 3-边割集的情形，有类似的结果。

**定理 29**[36]　设 $G$ 是连通图，$C$ 是 $G$ 的一个极小 3-边割集，$G_1$ 和 $G_2$ 是 $G$-$C$ 的两个连通分支。若 $p$ 和 $q$ 属于 $G_1\cup G_2$ 的同一个连通分支，不妨设为 $G_1$，则有

$$\begin{aligned}\Omega(p,q)=\Omega_{G_1}(p,q)-[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2+\\ d(c-a)(c-b)+e(b-a)(b-c)+f(a-b)(a-c)]/\\ [-(d^2+e^2+f^2)+2(de+df+ef)+4(d+e+f)+12];\end{aligned}\tag{38}$$

若 $p\in G_1$ 且 $q\in G_2$，则有

$$\begin{aligned}\Omega(p,q)=[(\tilde a-\tilde b)^2+(\tilde a-\tilde c)^2+(\tilde b-\tilde c)^2+d^2+e^2+f^2+def+\\ \tilde af(\tilde a+f)+\tilde be(\tilde b+e)+\tilde cd(\tilde c+d)-\tilde a(d+e)(f+2)-\tilde b(d+f)(e+2)-\\ \tilde c(e+f)(d+2)-\tilde a\tilde b(e+f-d)-\tilde a\tilde c(d+f-e)-\tilde b\tilde c(d+e-f)]/\\ [d^2+e^2+f^2-2(de+df+ef)-4(d+e+f)-12)]。\end{aligned}\tag{39}$$

其中：$a=\Omega_{G_1}(p,i_1)-\Omega_{G_1}(q,i_1)$；$b=\Omega_{G_1}(p,i_2)-\Omega_{G_1}(q,i_2)$；$c=\Omega_{G_1}(p,i_3)-\Omega_{G_1}(q,i_3)$；$\tilde a=\Omega_{G_1}(p,i_1)+\Omega_{G_2}(q,j_1)$；$\tilde b=\Omega_{G_1}(p,i_2)+\Omega_{G_2}(q,j_2)$；$\tilde c=\Omega_{G_1}(p,i_3)+\Omega_{G_2}(q,j_3)$；$d=\Omega_{G_1}(i_1,i_2)+\Omega_{G_2}(j_1,j_2)$；$e=\Omega_{G_1}(i_1,i_3)+\Omega_{G_2}(j_1,j_3)$；$f=\Omega_{G_1}(i_2,i_3)+\Omega_{G_2}(j_2,j_3)$。

## 5　若干重要图类的电阻距离解析计算公式

电阻距离的计算问题一直是物理和工程中的一个经典问题。近年来，学者得到了若干图类和电网

络的电阻距离的解析计算公式，本节仅列举部分重要图类的计算结果。由于篇幅限制，个别复杂记号没有给出，解释说明参见所引文献。在不产生歧义的情况下，将 $\Omega_G(i,j)$ 简记为 $\Omega(i,j)$ 。

**定理 30**[37] 圈 $C_n$ 中的 $i$ 和 $j$ 之间的电阻距离为

$$\Omega(i,j) = d(i,j)[n-d(i,j)]/n。\tag{40}$$

**定理 31**[38] 完全图 $K_n$ 中的 $i$ 和 $j$ 之间的电阻距离为

$$\Omega(i,j) = 2/n。\tag{41}$$

**定理 32**[39] 直径为 $D(G)$ 的距离传递图 $G$ 中距离为 $t(1 \leqslant t \leqslant D(G))$ 的任意两点 $i$ 与 $j$ 之间的电阻距离为

$$\Omega(i,j) = (2/n)\sum_{l=1}^{t}[(n-\sum_{k=0}^{j-1}X_k)/n_j],\tag{42}$$

这里 $X_k = b_0b_1b_2\cdots b_k/(c_1c_2\cdots c_k)$ ，$n_k = X_kc_k$ ，其中 $b_i$ 指任取 $G$ 中的一个顶点对 $G$ 进行距离分层后，第 $i$ 层的任一顶点在第 $i+1$ 层的邻点的个数 $(0 \leqslant i \leqslant D(G)-1)$ ，而 $c_i$ 指第 $i$ 层的任一顶点在第 $i-1$ 层的邻点的个数 $(0 \leqslant i \leqslant D(G))$ 。

**定理 33**[40] 完全二部图 $K_{m,n}$(二部划分为 $X,Y$ 且 $|X|=m,|Y|=n$)中的 $i$ 和 $j$ 之间的电阻距离为：1）若 $i,j \in X$(或 $i,j \in Y$)，则 $\Omega(i,j) = 2/n$(或 $\Omega(i,j) = 2/m$)；2）若 $i \in X$ ，$j \in Y$，则 $\Omega(i,j) = (m+n-1)/(mn)$。

2003 年，文献［41］得到了循环图的电阻距离计算公式，即定理 34。

**定理 34**[41] 设循环图 $G$ 的 Laplacian 矩阵为 $\boldsymbol{L}(G) = C[l_0,l_1,l_2,\cdots,l_{n-1}]$ ，则对 $i,j \in V(G)$ ，

$$\Omega(i,j) = 4\sum_{k=1}^{n-1}[\sum_{s=0}^{n-1}(l_s\cos(2ks\pi/n)]^{-1}\sin^2((i-j)k\pi/n)[1-\sin(2(i+j-2)k\pi/n)]/n。\tag{43}$$

2010 年，文献［42］给出了轮图和扇图的电阻距离解析计算公式，即定理 35。

**定理 35**[42] 设 $n \geqslant 3$ 为正整数，则轮图 $W_n$ 任意两点间的电阻距离为：1）若 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ ，则点 $n+1$（轮图的中心点）与点 $i$ 之间的电阻距离为 $\Omega(n+1,i) = G_n^2/(G_{2n}-2G_n)$；2）若 $i,j \in \{1,2,\cdots,n\}$ ，则 $i$，$j$ 之间的电阻距离为 $\Omega(i,j) = G_n^2[2-G_{2k}/G_k]/(G_{2n}-2G_n)+G_k$，其中：$G_k = [((3+\sqrt{5})/2)^k+((3-\sqrt{5})/2)^k]/\sqrt{5}$；$k = \begin{cases}|j-i|, & |j-i| \leqslant [n/2],\\ n-|j-i|, & |j-i| > [n/2]。\end{cases}$

**定理 36**[42] 设 $n \geqslant 1$ 为正整数，则扇图 $F_n$ 的任意两点间的电阻距离为：1）点 $n+1$（扇图的中心点）和点 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ 之间的电阻距离为 $F_{2(n-i)+1}F_{2i-1}/F_{2n}$；2）若点 $i,j \in \{1,2,\cdots,n\}$ 且 $i<j$，则点 $i$，$j$ 之间的电阻距离为 $[F_{2(n-j)+1}(F_{2j-1}-F_{2i-1})+F_{2i-1}(F_{2(n-i)+1}-F_{2(n-j)+1})]/F_{2n}$，其中 $F_k$ 是第 $k$ 个斐波那契数。

2011 年，文献［43］得到了凯莱图的电阻距离计算公式。

**定理 37**[43] 设 $G = Z_{n_1}\oplus\cdots\oplus Z_{n_t}$ ，$H$ 是 $G\setminus\{0\}$ 的非空子集，则凯莱图 $\mathrm{Cay}(G,H)$ 任意两点间的电阻距离为 $\Omega(i,j) = \sum_{\substack{(r_1,\cdots,r_n)\neq 0\\ 0\leqslant r_j\leqslant n_j-1\\ 1\leqslant j\leqslant t}}\{\sum_{(k_1,\cdots,k_t)\in H}[1-\cos(2k_1r_1\pi/n_1+\cdots+2k_tr_t\pi/n_t)]\}^{-1}[(U_{r_1,\cdots,r_j})_i-(U_{r_1,\cdots,r_j})_j]^2$。

2016 年，文献［44］给出了完全多部图的电阻距离解析计算公式。

**定理 38**[44] 设 $n>0$、$m_i>0$ 是整数且 $p = m_1+m_2+\cdots+m_n$ 。若 $a$ 和 $b$ 是 $K_{m_1,m_2,\cdots,m_n} = \bar{K}_{m_1}+\bar{K}_{m_2}+\cdots+\bar{K}_{m_n}$ 中的两个不同的点，则：

$$\Omega(a,b) = \begin{cases}2/(p-m_i), & a,b \in V(\bar{K}_{m_i})。\\ (p-1)(2p-m_i-m_j)/(p(p-m_i)(p-m_j)), & a \in V(\bar{K}_{m_i}),\ b \in V(\bar{K}_{m_j}),\ 且\ i \neq j。\end{cases}$$

将两条 $n$ 个顶点的路 $P_n = p_1p_2\cdots p_n$ 、$P'_n = q_1q_2\cdots q_n$ 中的所有对应顶点 $p_i$ 和 $q_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 连边后

所得到的图称作梯子图，记作 $L_n$。文献［45－46］利用不同的方法，分别独立得到了梯子图的电阻距离解析计算公式。

**定理 39**[45－46] $L_n$ 中任意两点间的电阻距离为：$\Omega(p_i,p_j)=\Omega(q_i,q_j)=(i-j)/2+(1-\alpha^{i-j})(2-\alpha^{i+j-1}+\alpha^{2j-1}+\alpha^{2n-2i+1}(1-\alpha^{i-j}-2\alpha^{i+j-1}))/(4\sqrt{3}(1-\alpha^{2n}))$；$\Omega(q_i,p_j)=\Omega(p_i,q_j)=(i-j)/2+(1+\alpha^{i-j})(2+\alpha^{i+j-1}+\alpha^{2j-1}+\alpha^{2n-2i+1}(1+\alpha^{i-j}+2\alpha^{i+j-1}))/(4\sqrt{3}(1-\alpha^{2n}))$，其中 $\alpha=2-\sqrt{3}$。

2017 年，文献［47］定义了一类环形网络并得到了这类网络的电阻距离计算公式。

**定理 40**[47] 设 $G[m_k]$ 为环形网络，其点集为 $V=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_n$，且 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 为正整数（$n\geqslant 3$），$|V_i|=m_i$，$V_{n+1}=V_1$，$\rho_i=\sum_{k=1}^{i}1/(m_km_{k+1}),1\leqslant i\leqslant n,m_{n+1}=m_1$，则有：1）若 $a,b\in V_1$，则 $\Omega(a,b)=2/(m_n+m_2)$；2）若 $a\in V_1,b\in V_i\neq V_1$，则 $\Omega(a,b)=(\rho_{i-1}(\rho_n-\rho_{i-1}))/\rho_n+(m_1-1)/(m_1(m_n+m_2))+(m_i-1)/(m_i(m_{i-1}+m_{i+1}))$；3）若 $a,b\in V_i$，则 $\Omega(a,b)=2/(m_{i-1}+m_{i+1})$；4）若 $a\in V_i,b\in V_j,i<j$，则 $\Omega(a,b)=(\rho'_{ij}(\rho_n-\rho'_{ij}))/\rho_n+(m_i-1)/(m_i(m_{i-1}+m_{i+1}))+(m_j-1)/(m_j(m_{j-1}+m_{j+1}))$。其中，$\rho'_{ij}=\sum_{k=i}^{j-1}[1/(m_km_{k+1})]$。

后来，文献［48］又定义了一类路网络，并得到了这类网络的电阻距离计算公式。

**定理 41**[48] 设 $P[m_k]$ 为路网络，其点集为 $V=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_n$，且 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 是 $n$ 个正整数（$n\geqslant 2$），$|V_i|=m_i$，$V_{n+1}=V_1$，$q_{ij}=\sum_{k=i}^{j-1}(1/(m_km_{k+1})),1\leqslant i\leqslant n,m_{n+1}=m_1$，则有：1）若 $a,b\in V_i$，则 $\Omega(a,b)=2/(m_{i-1}+m_{i+1})$；2）若 $a\in V_i,b\in V_j$，则 $\Omega(a,b)=(m_i-1)/(m_i(m_{i-1}+m_{i+1}))+q_{ij}+(m_j-1)/(m_j(m_{j-1}+m_{j+1}))$。

2019 年，文献［49］确定了几乎完全二部图中顶点之间的电阻距离。

**定理 42**[49] 设 $G(n,p)=K_{n,n}-pK_2$ 为几乎完全二部图，其中点集为 $V=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\cup\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，边集为 $E=\{x_iy_j|1\leqslant i,j\leqslant n\}\setminus\{x_1y_1,x_2y_2,\cdots,x_py_p\}$，则 $G(n,p)=:K_{n,n}-pK_2$ 的电阻距离为：

$$\Omega(x_i,x_j)=\Omega(y_i,y_j)=\begin{cases}2(n-1)/(n(n-2)), & i\neq j\in[p],\\ 2/n, & i\neq j\in[n]\setminus[p],\\ (2n^3-7n^2+(2p+6)n-3p-1)/(n(n-2)(n^2-2n+p)), & i\in[p],j\in[n]\setminus[p]。\end{cases}$$

$$\Omega(x_i,y_j)=\begin{cases}(2n^2-5n+2p)/((n-2)(n^2-2n+p)), & i=j\in[p],\\ (2n^3-7n^2+(2p+4)n-2p)/(n(n-2)(n^2-2n+p)), & i\neq j\in[p],\\ (2n^2-5n+2p+2)/(n(n^2-2n+p)), & i,j\in[n]\setminus[p],\\ (2n^3-8n^2+(2p+8)n-3p-1)/(n(n-2)(n^2-2n+p)), & i\in[p],j\in[n]\setminus[p]\text{或}j\in[p],i\in[n]\setminus[p]。\end{cases}$$

2020 年，文献［50］将文献［49］中的结果进一步推广到近似完全二部图。

**定理 43**[50] 设 $G(m,n,p)=K_{m,n}-pK_2$ 为通过完全二部图 $K_{m,n}$ 删除大小为 $p$ 的匹配得到的图，则：

1）若 $1\leqslant i,j\leqslant m$，有

$$\Omega(x_i,x_j)=\begin{cases}2(m-1)/(mn-m-n), & i\neq j,i,j\in[p],\\ 2/n, & i\neq j,i,j\in[m]\setminus[p],\\ (2n-1)/(n(n-1))+(p-1)/(p(n-1)(mn-m-n))+\\ (n-p)/(pn(n-1)(mn-m-n+p)), & i\in[P],j\in[m]\setminus[p];\end{cases}$$

2）若 $1\leqslant i,j\leqslant n$，有

$$\Omega(y_i,y_j)=\begin{cases}(2(m-1))/(mn-m-n), & i\neq j,i,j\in[p],\\ 2/m, & i\neq j,i,j\in[n]\setminus[p],\\ (2m-1)/(m(m-1))+(p-1)/(p(m-1)(mn-m-n))+ & \\ (m-p)/(pm(m-1)(mn-m-n+p)), & i\in[P],j\in[n]\setminus[p];\end{cases}$$

3）若 $1\leqslant i\leqslant m$ 且 $1\leqslant j\leqslant n$，有

$$\Omega(x_i,y_j)=\begin{cases}(m+n)/(mn-m-n)-mn/((mn-m-n)(mn-m-n+p)), & i=j\in[p],\\ (m+n-2)/(mn-m-n)-mn/((mn-m-n)(mn-m-n+p)), & i\neq j,i,j\in[p],\\ 1/m+((p-1)(m-1))/(p(mn-m-n))+(m-p)(m-1)/ & \\ (pm(mn-m-n+p)), & i\in[P],j\in[n]\setminus[p],\\ 1/n+((p-1)(n-1))/(p(mn-m-n))+(n-p)(n-1)/ & \\ (pn(mn-m-n+p)), & i\in[m]\setminus[p],j\in[p],\\ 1/m+1/n-(mn-m-n)/(mn(mn-m-n+p)), & i\in[m]\setminus[p],j\in[n]\setminus[p]。\end{cases}$$

2019 年，文献［51］得到了直线性 2-树的电阻距离。

**定理 44**[51]　给定一个具有 $n$ 个点、$m=n-2$ 个单元的直线性 2-树，则对 $1\leqslant j<n$，$1\leqslant k\leqslant n-j$，顶点 $j$ 和 $j+k$ 之间的电阻距离为：$\Omega(j,j+k)=\sum_{i=1}^{k}[F_iF_{i+2j-2}-F_{i-1}F_{i+2j-3}]F_{2m-2i-2j+5}/F_{2m+2}=\{F_{m+1}^2+F_k^2F_{m-2j-k+3}^2+F_{m+1}[F_{m-k}(kS_k-F_k)+F_{m-k+1}((k-5)F_{k+1}+(2k+2)F_k)]/5\}/F_{2m+2}$，其中：$F_k$ 为第 $k$ 个斐波那契数；$S_k$ 为第 $k$ 个卢卡斯数。

分形网络的电阻距离也是备受关注的研究热点，如阿波罗网络[52]、谢尔宾斯基垫圈网络[53]、自相似 $(x,y)$-鲜花网络[54] 等。2019 年，文献［55］就给出了灌封网络的电阻距离。为了方便起见，本定理中电阻距离的记号和原文保持一致，即用 $r_{uv}(t)$ 表示 $t$ 次迭代后得到的灌封网络 $N_t$ 顶点 $u$ 和 $v$ 之间的电阻距离。

**定理 45**[55]　设 $N_t=(G_t,\omega)$ 为 $(m,n)$-灌封网络，$u$、$v$ 是 $N_t$ 中的两个不同的顶点，则有：

1）若 $u,v\in V_{t-1}$，则 $r_{uv}(t)=2mr_{uv}(t-1)/(m+2)$；

2）若 $u\in V_{t-1}$，$v\in\{e^0,e^1,e^2,\cdots,e^n,e_1,e_2,\cdots,e_{m-1}\}$，其中 $e=(a,b)$，则 $r_{uv}(t)=$
$\begin{cases}\eta_1+m\Theta_1/(m+2), & v=e^0,\\ \eta_2+m\Theta_2/(m+2), & v=e^i,\\ \eta_3+2\Theta_3/(m+2), & v=e_j,\end{cases}$ 其中：$\eta_1=1/2$；$\eta_2=3/2$；$\eta_3=j(m-j)/m$；$\Theta_1=\Theta_2=r_{ua}(t-1)+r_{ub}(t-1)-r_{ab}(t-1)/2$，$\Theta_3=(m-j)r_{ua}(t-1)+jr_{ub}(t-1)-j(m-j)r_{ab}(t-1)/m$；

3）若 $u,v\in\{e^0,e^1,e^2,\cdots,e^n,e_1,e_2,\cdots,e_{m-1}\}\cup\{f^0,f^1,f^2,\cdots,f^n,f_1,f_2,\cdots,f_{m-1}\}$，其中 $e=(a,b)$，$f=(c,d)$，则

$$r_{uv}(t)=\begin{cases}\alpha_1, & u=e^i,v=e^0,\\ \alpha_2, & u=e^i,v=e^j(i\neq j),\\ \alpha_3+2\beta_3/(m(m+2)), & u=e_i,v=e_j(i<j),\\ \alpha_4+2\beta_4/(2(m+2)), & u=e^0,v=f^0,\\ \alpha_5+2\beta_5/(2(m+2)), & u=e^0,v=f^i,\\ \alpha_6+2\beta_6/(2(m+2)), & u=e^i,v=f^j,\\ \alpha_7+\beta_7/(m+2), & u=e^0,v=f_i,\\ \alpha_8+\beta_8/(m+2), & u=e^i,v=f_j,\\ \alpha_9+\beta_9/(m+2), & u=e_i,v=f_j。\end{cases}$$

其中：$\alpha_1=\alpha_4=1$；$\alpha_2=\alpha_5=2$；$\alpha_6=3$；$\alpha_3=(m+i-j)(j-i)/m$；$\alpha_7=1/2+i(m-i)/m$；$\alpha_8=3/2+$

$j(m-j)/m$；$\alpha_9=i(m-i)+j(m-j)/m$，$\beta_3=(j-i)^2 r_{ab}(t-1)$；$\beta_4=\beta_5=\beta_6=r_{ac}(t-1)+r_{ad}(t-1)+r_{bc}(t-1)+r_{bd}(t-1)-r_{ab}(t-1)-r_{cd}(t-1)$；$\beta_7=(m-i)[r_{ac}(t-1)+r_{ad}(t-1)]+i[r_{bc}(t-1)+r_{bd}(t-1)]-mr_{ab}(t-1)/2-2i(m-i)r_{cd}(t-1)/m$；$\beta_8=(m-j)[r_{ac}(t-1)+r_{bc}(t-1)]+j[r_{ad}(t-1)+r_{bd}(t-1)]-mr_{ab}(t-1)/2-2j(m-j)r_{cd}(t-1)/m$；$\beta_9=(m-i)(m-j)r_{ac}(t-1)+j(m-i)r_{ad}(t-1)+i(m-j)r_{bc}(t-1)+ijr_{bd}(t-1)-i(m-i)r_{ab}(t-1)-j(m-j)r_{cd}(t-1)$。

2020 年，文献［56］得到了线性六角链网络和环形六角链网络的电阻距离计算公式。

**定理 46**[56]　1）设 $L_n$ 为线性六角链，若将 $L_n$ 中每个长度为 6 的圈中的点分别记作 $p_{i-1},u_{i-1},p_i,q_i,v_{i-1},q_{i-1}$，其中 $i=1,2,\cdots,n$，则 $L_n$ 中任意两点间的电阻距离为：$\Omega(p_i,p_j)=i-j+(1-\alpha^{i-j})(2-\alpha^{i+j+1}+\alpha^{2j+1}+\alpha^{2n-2i+1}(1-\alpha^{i-j}-2\alpha^{i+j+1}))/(4\sqrt{2}(1-\alpha^{2n+2}))$，$\Omega(q_i,p_j)=i-j+(1+\alpha^{i-j})(2+\alpha^{i+j+1}+\alpha^{2j+1}+\alpha^{2n-2i+1}(1+\alpha^{i-j}+2\alpha^{i+j+1}))/(4\sqrt{2}(1-\alpha^{2n+2}))$，$\Omega(u_i,p_j)=i-j+f(\alpha)/(4\sqrt{2}(1-\alpha^{2n+2}))$，$\Omega(v_i,p_j)=i-j+g(\alpha)/(4\sqrt{2}(1-\alpha^{2n+2}))$，$\Omega(u_i,u_j)=i-j+(\alpha^{i+1}-\alpha^{j+1})(\alpha^{i+1}-\alpha^{j+1}-2\alpha^{-j-1}+\alpha^{2n-i-2j-1}-\alpha^{2n-2i-j-1})+2\alpha^{2n-i+1}/(2\sqrt{2}(1-\alpha^{2n+2}))$，$\Omega(v_i,u_j)=i-j+[(\alpha^{i+1}+\alpha^{j+1})(\alpha^{i+1}+\alpha^{j+1}+2\alpha^{-j-1}+\alpha^{2n-i-2j-1}+\alpha^{2n-2i-j-1})+2\alpha^{2n-i+1}]/(2\sqrt{2}(1-\alpha^{2n+2}))$；2）设 $R_n$ 为环形六角链，将 $R_n$ 中每个长度为 6 的圈中的点分别记作 $p_{i-1},u_{i-1},p_i,q_i,v_{i-1},q_{i-1}$，其中 $i=1,2,\cdots,n$，则 $R_n$ 中任意两点间的电阻距离为：$\Omega(p_1,p_i)=(1+\alpha^n-\alpha^{n-i+1}-\alpha^{i-1})/(2\sqrt{2}(1-\alpha^n))+(n-i+1)(i-1)/n$，$\Omega(p_1,q_i)=(1+\alpha^n+\alpha^{n-i+1}+\alpha^{i-1})/(2\sqrt{2}(1-\alpha^n))+(n-i+1)(i-1)/n$，$\Omega(u_1,u_i)=(1+\alpha^n-\alpha^{n-i+1}-\alpha^{i-1})/(\sqrt{2}(1-\alpha^n))+(n-i+1)(i-1)/n$，$\Omega(u_1,v_i)=(1+\alpha^n+\alpha^{n-i+1}+\alpha^{i-1})/(\sqrt{2}(1-\alpha^n))+(n-i+1)(i-1)/n$，$\Omega(p_1,u_i)=[11+2\sqrt{2}-(20+14\sqrt{2})\alpha^{i+1}-(20-14\sqrt{2})\alpha^{n-i-1}-(5+2\sqrt{2})\alpha^n]/(4\sqrt{2}(1-\alpha^n)-(2i-1)^2/(4n)+i-1-\sqrt{2}$，$\Omega(p_1,v_i)=11+2\sqrt{2}+(20+14\sqrt{2})\alpha^{i+1}+(20-14\sqrt{2})\alpha^{n-i-1}-(5+2\sqrt{2})\alpha^n]/(4\sqrt{2}(1-\alpha^n)-(2i-1)^2/(4n)+i-1-\sqrt{2}$，$1\leqslant i\leqslant n-1$，其中：$\alpha=3-\sqrt{2}$；$f(\alpha)=2\alpha^{2i+2}+\alpha^{2n-2j+1}+2\alpha^{2n-2i}+\alpha^{2n+3}-\alpha^{-i-j}(\alpha+1)(1+\alpha^{2j+1})(\alpha^{2i}+\alpha^{2n})+\alpha^{-1}+\alpha^{2j+1}$；$g(\alpha)=2\alpha^{2i+2}+\alpha^{2n-2j+1}+2\alpha^{2n-2i}+\alpha^{2n+3}+\alpha^{-i-j}(\alpha+1)(1+\alpha^{2j+1})(\alpha^{2i}+\alpha^{2n})+\alpha^{-1}+\alpha^{2j+1}$。

## 6　总结

由于自身的重要性以及在其他领域的广泛应用，电阻距离得到了来自数学、化学、物理、工程、生物学、社会学、网络科学等众多领域学者的广泛研究，产生了丰富的理论成果。本文仅仅综述了在电阻距离的计算和电阻距离的性质研究方面所取得的一些研究成果。在本文所介绍的成果之外，仍有关于电阻距离的大量的研究成果，比如近年来在图运算的电阻距离、图的 Kirchhoff 指标等方面均取得了丰硕的研究成果。由于篇幅原因，本文不再列举。

电阻距离的研究尚有很多有意义的研究问题，本文最后列举 2 个此方面的研究问题供读者参考。

1981 年，Godsil[57]提出了等树图的概念。如果一个图的所有边都包含在相同数目的生成树中，则称这样的图是等树图。从电阻距离的角度来看，等树图就是所有边的两个端点的电阻距离相等的图。周江等[58]从电阻距离的角度给出了等树图的刻画。但是，到目前为止，还没有关于哪些图是等树图的完整刻画。因此，本文提出如下的问题 1，即：刻画哪些图是等树图？

在图的平均距离的研究中，有一个著名的猜想，称作 4/3 猜想。该猜想具体为：设 $G$ 是 2-连通图，则存在一条边 $e$，使得 $G$-$e$ 的平均距离和 $G$ 的平均距离的比值不超过 4/3。对于平均电阻距离，猜想比值不超过 2。因此，本文有如下的猜想。

**猜想 1**　设 $G$ 是 2-连通图，则存在一条边 $e$，使得 $G$-$e$ 的平均电阻距离和 $G$ 的平均电阻距离的比值不超过 2。

2020 年，Sardar 等[59]率先开展了电阻直径的研究。类似于图的直径，图 $G$ 的电阻直径定义为 $G$

中所有顶点之间的电阻距离的最大值，记作 $D_r(G)$ 。文献［60］证明了：如果 $G$ 是树或单圈图，则 $G$ 的线图的电阻直径小于等于 $G$ 的电阻直径。借助于计算机，他们验证了对于顶点数不超过 11 的图 $G$，都有 $G$ 的线图的电阻直径小于等于 $G$ 的电阻直径成立。因此，他们猜想，该结果对于所有的图都成立。

**猜想 2** 对任意的连通图 $G$，设 $L_G$ 是 $G$ 的线图，则有 $D_r(L_G) \leqslant D_r(G)$ 。

## ［参 考 文 献］


［1］ KLEIN D J，RANDIĆ M. Resistance distance［J］. Journal of Mathematical Chemistry，1993，12(1)：81-95.

［2］ KIRCHHOFF G. Über die Auflösung der Gleichungen，auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird［J］. Annual Review of Physical Chemistry，1847，72：497-508.

［3］ SHARPE G，SPAIN B. On the solution of networks by means of the equicofactor matrix［J］. IRE Transactions on Circuit Theory，1960，7(3)：230-239. DOI:10.1109/TCT.1962.1086939.

［4］ SHARPE G，STYAN G. Circuit duality and the general network inverse［J］. IEEE Transactions on Circuit Theory，1965，12(1)：22-27. DOI:10.1109/TCT.1965.1082367.

［5］ SESHU S，REED M B. Linear graphs and electrical networks［M］. Manhattan：Addison-Wesley Publishing Company，1961.

［6］ BAPAT R B，GUTMANA I，XIAO W J. A simple method for computing resistance distance［J］. Zeitschrift für Naturforschung A，2003，58(9/10)：494-498. DOI:10.1515/zna-2003-9-1003.

［7］ BEN-ISRAEL A，GREVILLE T N. Generalized inverses：theory and applications［M］. New York：Springer Science and Business Media，2003.

［8］ SHARPE G E，STYAN G P H. A note on equicofactor matrices［J］. Proceedings of the IEEE，1967，55：1226-1227.

［9］ RAO C R，MITRA S K. Generalized inverse of a matrix and its applications［C］//Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley：University of California Press，1972：601-620.

［10］ MERRIS R. Laplacian matrix of graphs：a survey［J］. Linear Algebra Appl，1994，197/198：143-176.

［11］ KLEIN D J. Graph geometry，graph metrics and Wiener［J］. MATCH Commun Math Comput Chem，1997，35：7-27.

［12］ XIAO W J，GUTMAN I. Resistance distance and Laplacian spectrum［J］. Theoretical Chemistry Accounts，2003，110(4)：284-289.

［13］ WU F Y. Theory of resistor networks：the two-point resistance［J］. Journal of Physics A：Mathematical and General，2004，37(26)：6653-6673.

［14］ CHUNG F R，GRAHAM F C. Spectral graph theory［M］. Providence：American Mathematical Society，1997.

［15］ CHEN H Y，ZHANG F J. Resistance distance and the normalized Laplacian spectrum［J］. Discrete Applied Mathematics，2007，155(5)：654-661.

［16］ DOYLE P G，SNELL J L. Random walks and electric networks［M］. Providence：American Mathematical Society，1984.

［17］ NASH-WILLIAMS C ST J A. Random walk and electric currents in networks［J］. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society，1959，55(2)：181-194.

［18］ BAPAT R B，Resistance distance in graphs［J］. Mathematics Student，1999，68：87-99.

［19］ GHOSH A，BOYD S，SABERU A. Minimizing effective resistance of a graph［J］. SIAM Review，2008，50(1)：37-66. DOI:10.1137/050645452.

［20］ SHANNON C E，HAGELBARGER D W. Concavity of resistance functions［J］. Journal of Applied Physics，1956，27(1)：42-43.

［21］ KENNELLY A E. Equivalence of triangles and stars in conducting networks［J］. Electrical World and Engineer，1899，34：413-414.

［22］ KLEIN D J，IVANCIUC O. Graph cyclicity，excess conductance，and resistance deficit［J］. Journal of Mathematical Chemistry，2001，30(3)：271-287.

[23] DÖRFLER F, BULLO F. Kron reduction of graphs with applications to electrical networks [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2012, 60(1): 150-163.

[24] COPPERSMITH D, FEIGE U, SHEARER J. Random walks on regular and irregular graphs [J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 1996, 9(2): 301-308.

[25] WHITNEY H. Nonseparable and planar graphs [J]. Trans Amer Math Soc, 1932, 34: 339-362.

[26] THOMASSEN C. Resistances and currents in infinite electrical networks [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1990, 49(1): 87-102.

[27] FOSTER R M. The average impedance of an electrical network [J]. Contributions to Applied Mechanics, 1949: 333-340.

[28] ZHANG J Y, YAN W G. A new proof of Foster's first theorem [J]. American Mathematical Monthly, 2020, 127(1): 72-74.

[29] FOSTER R. An extension of a network theorem [J]. IRE Transactions on Circuit Theory, 1961, 8(1): 75-76.

[30] KLEIN D J. Resistance-distance sum rules [J]. Croatica Chemica Acta, 2002, 75(2): 633-649.

[31] BENDITO E, CARNONA A, ENCINASET A M, et al. A formula for the Kirchhoff index [J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2008, 108(6): 1200-1206.

[32] CHEN H Y. Random walks and the effective resistance sum rules [J]. Discrete Applied Mathematics, 2010, 158(15): 1691-1700.

[33] ZHU H Y, KLEIN D J, LUKOVITS I. Extensions of the Wiener number [J]. Journal of Chemical Information and Computer Sciences, 1996, 36(3): 420-428.

[34] CHEN H Y, ZHANG F J. Resistance distance local rules [J]. Journal of Mathematical Chemistry, 2008, 44(2): 405-417.

[35] YANG Y J, ZHANG H P. Some rules on resistance distance with applications [J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2008, 41(44): 445203.

[36] YANG Y J, KLEIN D J. A recursion formula for resistance distances and its applications [J]. Discrete Applied Mathematics, 2013, 161(16/17): 2702-2715.

[37] KLEIN D J, LUKOVITS I, GUTMAN I. On the definition of the hyper-Wiener index for cycle-containing structures [J]. Journal of Chemical Information and Computer Sciences, 1995, 35(1): 50-52.

[38] LUKOVITS I, NIKOLIĆ S, TRINAJSTIĆ N. Resistance distance in regular graphs [J]. International Journal of Quantum Chemistry, 1999, 71(3): 217-225.

[39] PALACIOS J. Closed-form formulas for Kirchhoff index [J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2001, 81(2): 135-140.

[40] KLEIN D J. Resistance-distance sum rules [J]. Croatica Chemica Acta, 2002, 75(2): 633-649.

[41] ZHANG H P, YANG Y J. Resistance distance and Kirchhoff index in circulant graphs [J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2007, 107(2): 330-339.

[42] BAPAT R B, GUPTA S. Resistance distance in wheels and fans [J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2010, 41(1): 1-13.

[43] GAO X, LUO Y F, LIU W W. Resistance distances and the Kirchhoff index in Cayley graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2011, 159(17): 2050-2057.

[44] GERVACIO S V. Resistance distance in complete $n$-partite graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2016, 203: 53-61.

[45] CINKIR Z. Effective resistances and Kirchhoff index of ladder graphs [J]. Journal of Mathematical Chemistry, 2016, 54(4): 955-966.

[46] SHI L Y, CHEN H Y. Resistance distances in the linear polyomino chain [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2018, 57(1): 147-160.

[47] JIANG Z Z, YAN W G. Resistance between two nodes of a ring network [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2017, 484: 21-26.

［48］ JIANG Z Z，YAN W G. Resistances between two nodes of a path network［J］. Applied Mathematics and Computation，2019，361：42-46.

［49］ YE L，YAN W G. Resistance between two vertices of almost complete bipartite graphs［J］. Discrete Applied Mathematics，2019，257：299-305.

［50］ GE J，DONG F M. Spanning trees in complete bipartite graphs and resistance distance in nearly complete bipartite graphs［J］. Discrete Applied Mathematics，2020，283：542-554.

［51］ BARRETT W，EVANS E J，FRANCIS A E. Resistance distance in straight linear 2-trees［J］. Discrete Applied Mathematics，2019，258：13-34.

［52］ SHANGGUAN Y M，CHEN H Y. Two-point resistances in an Apollonian network［J］. Physical Review E，2017，96(6)：062140.

［53］ JIANG Z Z，YAN W G. Some two-point resistances of the Sierpinski gasket network［J］. Journal of Statal Physics，2018，172：824-832.

［54］ SHANGGUAN Y M，CHEN H Y. Two-point resistances in a family of self-similar $(x,y)$-flower networks［J］. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，2019，523：382-391.

［55］ FAN J Q，ZHU J. Resistance distance in potting networks［J］. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，2020，540：123053.

［56］ HUANG S M，LI S C. On the resistance distance and Kirchhoff index of a linear hexagonal（cylinder）chain［J］. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，2020，558：124999.

［57］ GODSIL C D. Equiarboreal graphs［J］. Combinatorica，1981，1(2)：163-167.

［58］ ZHOU J，SUN L Z，BU C J. Resistance characterizations of equiarboreal graphs［J］. Discrete Mathematics，2017，340(12)：2864-2870.

［59］ SARDAR M S，HUA H B，PAN X F，et al. On the resistance diameter of hypercubes［J］. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，2020，540：123076.

［60］ XU S A，LI Y X，HUA H B，et al. On the resistance diameters of graphs and their line graphs［J］. Discrete Applied Mathematics，2020，306：174-185.


（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）