

周期随机 Gompertz 模型的最优收获策略

王凤筵

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究周期随机 Gompertz 模型的最优收获策略, 得到该模型的正初始值出发的解及其均值的解析表达式。证明模型的解是依均值的平方全局吸引, 并存在唯一依均值的平方全局稳定的随机解。证明周期随机 Gompertz 模型随机持久性, 确定充要条件保证最优收获的存在性, 并得到周期随机收获模型的最优收获努力量和最大期望承受依时间平均生产量。

[关键词] 周期 Gompertz 模型; 最优收获; 随机扰动; 承受生产; 持久性

[中图分类号] O 175.13

Optimal Harvesting Policy for a Periodic Stochastic Gompertz Model

WANG Fengyan

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: This paper concerns the optimal harvesting policy for a periodic stochastic Gompertz model. It shows that the equation had a global positive solution starting from the positive initial value and obtain its explicit expression. The expectation of the solution was also obtained. It shows that the periodic stochastic Gompertz model was globally attractive in the mean square and had a unique globally attractive stochastic solution. It was established that the equation was stochastically permanent. Sufficient and necessary conditions for the existence of an optimal control were established. The optimal harvesting effort and the maximum value of the expectation of sustainable yield in the time mean were obtained as well.

Keywords: periodic Gompertz model; optimal harvesting; stochastic perturbations; sustainable yield; permanence

0 引言

可更新资源的优化管理和自然资源可持续开发有着紧密的关系, 许多学者对此进行了研究: 文献 [1] 从经济学和生态数学方面总结了可更新自然资源的优化管理及策略; 考虑到季节变化等周期因素, 文献 [2] 研究周期的 Logistic 方程的收获策略, 得到了周期收获系统的最大承受生产量; 文献 [3] 研究了自治的 Logistic 方程的常数和比例周期脉冲收获策略, 得到了 2 种收获方式的最大承受生产量; 文献 [4] 研究了基于时滞的 Logistic 阶段结构方程建立的捕食食饵收获系统比例收获策略, 得到了收获系统的最大承受生产量。考虑到种群的生存环境总是受到各种随机的不确定因素的影响, 因此, 很多学者研究了随机种群系统的最优收获问题。基于随机 Logistic 收获模型的研究是经典的生物数学问题, 文献 [5] 研究了随机 Logistic 收获模型

$$dx(t) = x(t)(b - h - ax(t))dt + \sigma x(t)dB_t, \quad (1)$$

其中: $x(t)$ 表示 t 时刻的种群密度; $b > 0$ 表示种群内禀增长率; $b/a > 0$ 表示种群环境容纳量; $h \geq 0$ 表示对种群的比例收获努力量; σ 表示白噪声强度; B_t 是标准布朗运动。他们得到最大承受生产努力量 $h^* = (b - \sigma^2/2)/2$ 并得到期望最大承受生产量 $Y^* = \max\{\lim_{t \rightarrow +\infty} E[hx(t)]\} = (b - \sigma^2/2)^2/(4a)$ 。基于研究方法的改进, 近几年引进了依时间平均的收敛性、持久性和灭绝性等概念, 文献 [6-8] 研究随机 Logistic 方程, 文献 [7] 研究了随机 Logistic 方程的期望最大承受生产量, 文献 [8] 研究了基于随机 Logistic 方程捕食食饵收获系统比例收获策略最优收获问题。

单种群增长的 Logistic 模型和 Gompertz 模型是生物数学和经济学中 2 个重要的数学模型。目前, 研究 Logistic 模型有很多的文献, 但是研究 Gompertz 模型的文献很少, 主要是因为, 当用依时间平均的概念研究随机单种群增长的 Gompertz 模型时, 就会遇到无法克服的困难。因此, 考虑到季节周期变化的因素, 本文研究下面的周期随机 Gompertz 比例收获模型的最优收获策略:

$$dx(t) = x(t)(b(t) - h - a \ln x(t))dt + \sigma x(t)dB_t, \quad (2)$$

其中: $x(t)$ 表示 t 时刻的种群密度; $b(t) > 0$ 为 T -周期函数, 表示相关种群周期季节变化种群内禀增长率; $T > 0$ 表示季节变化周期; $h \geq 0$ 表示对种群的比例收获努力量; σ 表示白噪声强度; B_t 是标准布朗运动。

本文主要目的是引进依均值平方吸引的和随机持久性概念, 研究周期随机 Gompertz 比例收获模型 (2) 稳定性和最优收获策略。由于周期收获系统 (2) 是非自治系统, 因此, 引进期望承受依时间平均生产量 $Y(h)$ 来研究系统 (2)。周期随机 Gompertz 比例收获模型 (2) 最优收获努力量 h^* 满足以下 2 个条件: 1) 期望承受依时间平均生产量 $Y(h^*) = \max\{\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t E[hx(s)]ds\}$; 2) 种群 x 保持随机持久性。

1 预备知识

在本文中, 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 是一个完备概率空间, 它带有滤子 F_t 并且满足通常条件 (即 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 是右连续单调递增, 且 \mathcal{F}_0 包含所有零测集)。设 B_t 是定义在该完备概率空间上的标准布朗运动。记 $\mathbf{R}_+^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ 。需要下面几个定理。

定理 1 [9] (Itô 公式) 设 $x(t) (t \geq 0)$ 是 Itô 过程, 其随机微分为 $dx(t) = f(t)dt + g(t)dB_t$, 其中: $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^n)$; $g \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^{n \times m})$ 。若 $V(x(t), t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+; \mathbf{R})$, 则 $V(x(t), t)$ 仍然是 Itô 过程, 具有如下随机微分: $dV(x(t), t) = V_t(x(t), t)dt + V_x(x(t), t)dx(t) + 0.5dx^T(t)V_{xx}(x(t), t)dx(t)$ 。

定理 2 对任意给定的初值 $x(0) = x_0 > 0$, 系统 (2) 存在唯一全局正解 $x(t)$, 有

$$x(t) = \exp\{e^{-at} \ln x_0 + \int_0^t b(s)e^{a(s-t)}ds - (0.5\sigma^2 + h)[1 - e^{-at}]/a + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as}dB_s\}. \quad (3)$$

证明 在方程 (2) 中作代换 $u(t) = \ln x(t)$, 应用 Itô 公式可得: $du(t) = x^{-1}(t)dx(t) - 0.5x^{-2}(t)(dx(t))^2 = (b(t) - 0.5\sigma^2 - h - au(t))dt + \sigma dB_t$ 。因此得到: $u(t) = e^{-at} \ln x_0 + \int_0^t b(s)e^{a(s-t)}ds - (0.5\sigma^2 + h)[1 - e^{-at}]/a + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as}dB_s$ 。因此, 由 $u(t) = \ln x(t)$ 可以得到 $x(t) = e^{u(t)}$ 。这个解 $x(t) = e^{u(t)}$ 在 $t \in (0, +\infty)$ 都有意义且有 $x(t) > 0$ 。证毕。

为了研究随机解的均值, 需要引理 1 ~ 引理 2。

引理 1 对于随机过程 $\exp\{\sigma e^{-at} \int_0^t e^{as}dB_s\}$, 则有 $E \exp\{e^{-at} \int_0^t e^{as}dB_s\} = \exp\{\sigma^2(1 - e^{-2at})/(4a)\}$ 。

证明 设随机变量 $z_t = \int_0^t e^{as}dB_s$, 那么 $dz_t = e^{at}dB_t$ 。由 Itô 公式, 有 $dz_t^n = nz_t^{n-1}dz_t + n(n-1)$

$z_t^{n-2} e^{2at} dt/2 = ne^{at} z_t^{n-1} dB_t + n(n-1) z_t^{n-2} e^{2at} dt/2$ 。对上面的随机微分等式取积分并取均值可得

$$Ez_t^n - Ez_0^n = E\left(\int_0^t ne^{as} z_s^{n-1} dB_s\right) + n(n-1) \int_0^t Ez_s^{n-2} e^{2as} ds/2. \quad (4)$$

因为 $Ez_0^n = 0$, $E\left(\int_0^t ne^{as} z_s^{n-1} dB_s\right) = 0$, 代入式 (4) 可得

$$Ez_t^n = n(n-1) \int_0^t Ez_s^{n-2} e^{2as} ds/2. \quad (5)$$

在式 (5) 中设随机变量均值函数列 $A_n(t) = Ez_t^n$, $n = 1, 2, \dots$ 并代入其中, 有 $A_n(t) = n(n-1) \int_0^t A_{n-2}(s) e^{2as} ds/2$, $n \geq 3$, 其中, $A_1(t) = E \int_0^t e^{as} dB_s = 0$, $A_2(t) = E\left(\int_0^t e^{as} dB_s\right)^2 = \int_0^t e^{2as} ds = (e^{2at} - 1)/(2a)$ 。经过运算, 可以得到: 当 $n = 2k - 1$ 时, $A_{2k-1}(t) = 0$; 当 $n = 2k$ 时, $A_{2k}(t) = (2k)!(e^{2at} - 1)^k / (2^k (2a)^k k!)$, $k = 1, 2, \dots$ 。

应用上面的结果, 经过如下运算可以得到

$$\begin{aligned} E \exp\left\{\sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s\right\} &= \sum_{n=0}^{+\infty} [\sigma^n e^{-nat} Ez_t^n / n!] = \sum_{k=0}^{+\infty} [\sigma^{2k} e^{-2kat} A_{2k}(t) / (2k)!] = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} [\sigma^{2k} (1 - e^{-2at})^k / (k! (2a)^k 2^k)] = \exp\{\sigma^2 (1 - e^{-2at}) / (4a)\}. \end{aligned} \quad (6)$$

证毕。

引理 2 设 $\tilde{v}(t) = e^{-at} \int_0^t b(s) e^{as} ds$, 则该函数满足微分方程

$$v'(t) = b(t) - av(t). \quad (7)$$

微分方程 (7) 指数稳定。微分方程 (7) 有唯一的阶 -1 T -周期解 $\tilde{v}(t) = \tilde{v}(t) + \tilde{v}(0)e^{-at}$, 其中,

$$\tilde{v}(0) = (e^{aT} - 1)^{-1} \int_0^T b(s) ds. \quad (8)$$

T -周期解 $\tilde{v}(t)$ 有如下性质:

$$T^{-1} \int_0^T \tilde{v}(t) dt = (aT)^{-1} \int_0^T b(t) dt. \quad (9)$$

证明 任意给定系统 (7) 的 2 个解 $v_1(t)$ 、 $v_2(t)$ 对应的初值为 $v_1(0)$ 、 $v_2(0)$, 那么, 由表达式 $[v_1(t) - v_2(t)]' = -a[v_1(t) - v_2(t)]$ 可以得到 $[v_1(t) - v_2(t)] = [v_1(0) - v_2(0)]e^{-at}$ 。所以, 微分方程 (7) 依指数稳定的。另外, 微分方程 (7) 有唯一的阶 -1 T -周期解 $\tilde{v}(T) = \tilde{v}(0)$, 代入式 (7) 可得式 (8)。另外, 对微分方程 (7) 周期解 $\tilde{v}(t)$, 两边从 0 到 T 做积分可得: $\tilde{v}(T) - \tilde{v}(0) = -a \int_0^T \tilde{v}(t) dt + \int_0^T b(t) dt$ 。经过计算可得式 (9)。

应用定理 2、引理 1 和引理 2, 可得定理 3。

定理 3 对任意给定的初值 $x(0) = x_0 > 0$, 系统 (1) 正解 $x(t)$ 、 $Ex(t)$ 和 $Ex^2(t)$ 为

$$Ex(t) = \exp\{e^{-at} \ln x_0 + \tilde{v}(t) - \tilde{v}(0)e^{-at} - (0.5\sigma^2 + h)[1 - e^{-at}]/a + \sigma^2(1 - e^{-2at})/(4a)\}, \quad (10)$$

$$Ex^2(t) = \exp\{2e^{-at} \ln x_0 + 2\tilde{v}(t) - 2\tilde{v}(0)e^{-at} - (\sigma^2 + 2h)[1 - e^{-at}]/a + \sigma^2(1 - e^{-2at})/a\}. \quad (11)$$

2 主要结果及其证明

节 1 得到了方程的全局随机正解和解的均值的表达式, 下面讨论系统的稳定性。

定义 1 设任意给定系统 (2) 的 2 个解 $x(t)$ 、 $y(t)$, 对应的初值为 $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = y_0 > 0$, 如果 $\lim_{t \rightarrow +\infty} E[x(t) - y(t)]^2 = 0$ 成立, 则称系统是依均值的平方全局吸引的。

定理 4 方程 (2) 是依均值的平方全局吸引的, 且对于任意给定系统 (2) 的 2 个解 $x(t)$ 、 $y(t)$, 对应的初值为 $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = y_0 > 0$, 有如下的估计:

$$E[x(t) - y(t)]^2 = [\ln x_0 - \ln y_0]^2 \exp\{2\tilde{v}(t) - 2h/a - \sigma^2/(2a)\} e^{-2at} + o(e^{-2at}), t \rightarrow +\infty. \quad (12)$$

证明 由式 (10) 经过计算, $E[x(t) - y(t)]^2 = [\exp\{e^{-at} \ln x_0\} - \exp\{e^{-at} \ln y_0\}]^2 \exp\{2\tilde{v}(t) - 2h/a - \sigma^2/(2a)\} + o(1) = [\ln x_0 - \ln y_0]^2 \exp\{2\tilde{v}(t) - 2h/a - \sigma^2/(2a)\} e^{-2at} + o(e^{-2at})$, 可以得到式 (12)。

定义 2 如果存在方程 (1) 的解 $\hat{x}(t)$, 对于任意方程 (2) 的解 $x(t)$ 都成立, $\lim_{t \rightarrow +\infty} E[x(t) - \hat{x}(t)]^2 = 0$, 则称系统 (2) 的解 $\hat{x}(t)$ 是依均值的平方全局吸引的。

定理 5 方程 (2) 的解 $x^*(t)$ 是依均值的平方全局吸引的, 其中 $x^*(t)$ 为

$$x^*(t) = \exp\{\tilde{v}(t) - (0.5\sigma^2 + h)/a + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s\}, x_0^* = \exp\{(\tilde{v}(0) + (0.5\sigma^2 + h)/a)\}. \quad (13)$$

并且 $x^*(t)$ 有如下性质:

$$Ex^*(t) = \exp\{\tilde{v}(t) - h/a - \sigma^2(1 + e^{-2at})/(4a)\}. \quad (14)$$

证明 由式 (3) 和式 (10), 假设 $\ln x_0 = \tilde{v}(0) + (0.5\sigma^2 + h)/a$, 即 $x_0 = \exp\{\tilde{v}(0) + (0.5\sigma^2 + h)/a\}$, 那么, 经过运算, 式 (3) 就可以写成简单的式 (13)。由定理 4 任意 2 个解依均值平方相互吸引, 所以, 任意的解 $x(t)$ 依均值的平方收敛到解 $x^*(t)$ 。式 (14) 可以由式 (10) ~ 式 (11) 计算得到。

定义 3^[10] 对任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 存在 $M_\varepsilon > 0$ 和 $\delta_\varepsilon > 0$, 使得对于任意方程 (2) 的解 $x(t)$ 都成立, $\limsup_{t \rightarrow +\infty} P\{|x(t)| \geq M_\varepsilon\} < \varepsilon$, $\liminf_{t \rightarrow +\infty} P\{|x(t)| \leq \delta_\varepsilon\} < \varepsilon$, 则称方程 (2) 是随机持久的。

定理 6 方程 (2) 是随机持久的。

证明 首先, 系统 (2) 随机上方有界。任意给定系统 (2) 的解 $x(t)$, 任意给定 $\varepsilon \in (0, 1)$, 由式 (10) 和式 (13), 函数 $\tilde{v}(t)$ 为连续周期函数, 所以有界。存在 $M > 0$, 极限 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} Ex^2(t) \leq M$, $t \rightarrow +\infty > 0$; 任意的 $t > T_\varepsilon$, $Ex^2(t) < M + 1$ 成立。取定 $M_\varepsilon = \sqrt{(M + 1)/\varepsilon}$, 应用 Chebyshev 不等式可得 $P\{|x(t)| \geq M_\varepsilon\} \leq E|x(t)|^2/(M_\varepsilon^2) < \varepsilon$, $t > T_\varepsilon$ 。所以, 得到 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} P\{|x(t)| \geq M_\varepsilon\} < \varepsilon$ 。

其次, 证明系统 (2) 随机下方有界。任意给定系统 (2) 的解 $x(t)$, 考虑 $x^{-1}(t)$ 。由式 (11) 和式 (14) 可得

$$Ex^{-2}(t) = \exp\{-2e^{-at} \ln x_0 - 2\tilde{v}(t) + 2\tilde{v}(0)e^{-at} + ((\sigma^2 + 2h)/a)[1 - e^{-at}] - (\sigma^2/a)(1 - e^{-2at})\}.$$

函数 $\tilde{v}(t)$ 为连续周期函数, 所以有界。存在 $M_1 > 0$, 极限 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} Ex^{-2}(t) < M_1$, $t \rightarrow +\infty$ 。任意给定 $\varepsilon \in (0, 1)$, 存在 $T'_\varepsilon > 0$, 使得当 $t > T'_\varepsilon$ 时, $Ex^{-2}(t) < M_1 + 1$ 成立。取定 $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon/(M_1 + 1)}$, 应用 Chebyshev 不等式可得: $P\{x(t) \leq \delta_\varepsilon\} = P\{x^{-2}(t) \geq \delta_\varepsilon^{-2}\} \leq E|x(t)|^{-2}/(\delta_\varepsilon^{-2}) < \varepsilon$, $t > T'_\varepsilon$ 。所以得到 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} P\{|x(t)| \leq \delta_\varepsilon\} < \varepsilon$ 。定理 6 证毕。

定理 7 系统 (2) 存在最优期望承受依时间平均最优生产努力量 $h^* = a$, 期望承受依时间平均最优生产量 $Y(h)$ 达到其最大值 $Y(a) = aT^{-1} \int_0^T \exp\{\tilde{v}(t) - 1 - \sigma^2/(4a)\} dt$ 。

证明 由定理 6, 对于任意的比例收获努力量 $h \in (0, +\infty)$, 系统 (2) 始终是随机持久的。由定理 3, 期望承受依时间平均生产量 $Y(h)$ 表达如下:

$$Y(h) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t E[hx(s)] ds = hT^{-1} \int_0^T \exp\{\tilde{v}(t) - \sigma^2/(4a) - h/a\} dt. \quad (15)$$

$Y(h)$ 关于 h 求导数可得 $dY/dh = T^{-1} \int_0^T \exp\{\tilde{v}(t) - \sigma^2/(4a) - h/a\} dt(1 - h/a)$ 。令 $dY(h)/dh = 0$, $Y(h)$ 有唯一的驻点 $h^* = a$ 。当 $0 < h < a$ 时, $dY/dh > 0$, 期望承受依时间平均生产量 $Y(h)$ 是增函数; 当 $h > a$ 时, $dY/dh < 0$, 期望承受依时间平均生产量 $Y(h)$ 是减函数。所以, 当 $h^* = a$ 时, 期望承受依时间平均生产量 $Y(h)$ 达到其最大值 $Y(a) = aT^{-1} \int_0^T \exp\{\tilde{v}(t) - 1 - \sigma^2/(4a)\} dt$ 。定理 7 证毕。

下面用例子模拟随机周期 Gompertz 模型的解均值平方全局吸引力。考虑随机周期 Gompertz 模型 ($T=4$)，即

$$dx(t) = x(t) [0.2(1 + 0.5 \sin(\pi t/2)) - 0.02 - 0.1 \ln x(t)] dt + \sigma x(t) dB_t. \tag{16}$$

由图 1a 可以看出，随机周期系统 (16) ($\sigma = 0.05$) 的 3 个不同初值出发的随机解相互吸引到同一随机轨道；由图 1b 可以看出，确定周期系统 (16) ($\sigma = 0$) 的 3 个不同初值出发的解相互吸引到同一周期轨道。

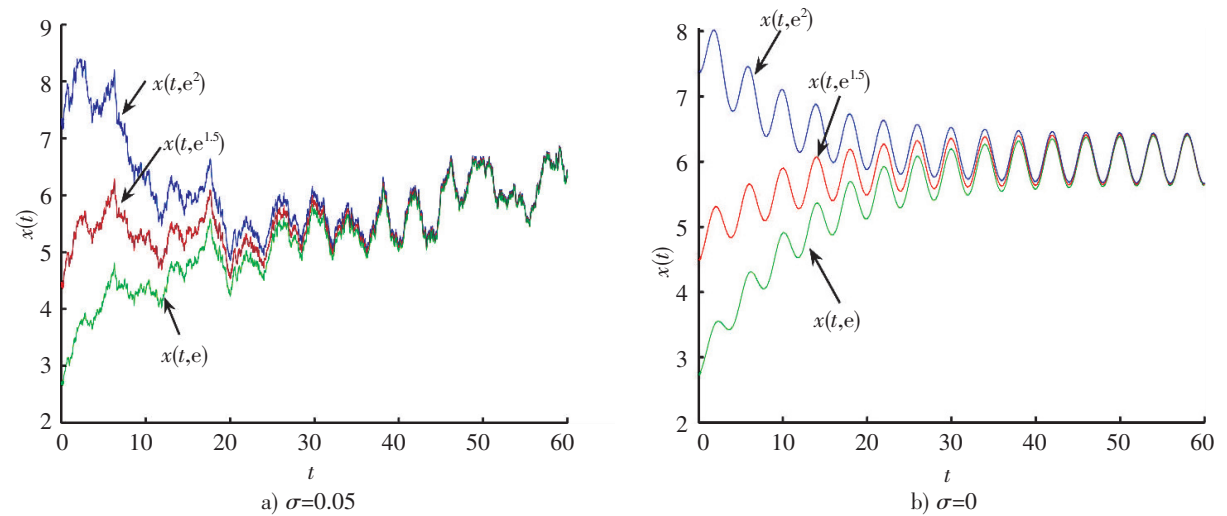


图 1 方程(16)解 $x(t,e^{1.5})$, $x(t,e)$ 和 $x(t,e^2)$ 在 $t \in [0,60]$ 的时间序列图

Fig.1 Time series of the solutions $x(t,e^{1.5})$, $x(t,e)$ and $x(t,e^2)$ of system(16) for $t \in [0,60]$

[参 考 文 献]

[1] CLARK C W. Mathematical bio-economics: the optimal management of renewable resources [M]. 2nd ed. New York: Wiley, 1990.

[2] FAN M, WANG K. Optimal harvesting policy for single population with periodic coefficients [J]. Math Biosci, 1998, 152:165-177.

[3] ZHANG X, SHUAI Z, WANG K. Optimal impulsive harvesting policy for single population [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2003, 4:639-651.

[4] SONG X, CHEN L. Optimal harvesting and stability for a predator-prey system with stage structure [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series), 2002, 18(3): 423-430.

[5] BEDDINGTON J R, MAY R M. Harvesting natural populations in a randomly fluctuating environment [J]. Science, 1977, 197:463-465.

[6] LIU C, YU L, ZHANG Q, et al. Dynamic analysis of a hybrid bioeconomic plankton system with double time delays and stochastic fluctuations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 316:115-137.

[7] LI W, WANG K. Optimal harvesting policy for general stochastic Logistic population model [J]. J Math Anal Appl, 2010, 368:420-428.

[8] LIU M, BAI C. Optimal harvesting policy for a stochastic predator-prey model [J]. Appl Math Lett, 2014, 34:22-26.

[9] 王克. 随机生物数学模型 [M]. 北京: 科学出版社, 2010:166.

[10] LI X, MAO X. Population dynamical behavior of non-autonomous Lotka-Volterra competitive system with random perturbation [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2009, 24:523-545.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)