第 27 卷　第 3 期　集美大学学报（自然科学版）　Vol. 27　No. 3
2022 年 5 月　Journal of Jimei University (Natural Science)　May 2022

[文章编号] 1007 - 7405(2022)03 - 0267 - 07　DOI:10.19715/j.jmuzr.2022.03.10

运算次序的交换问题

詹华税[1]，许文彬[2]

（1. 厦门理工学院数学与统计学院，福建 厦门 361024；2. 集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 讨论一些经典的运算次序的交换问题、二次极限与二重极限的关系问题，以及二重积分能否化为二次积分的问题。利用控制收敛定理，证明一类各向异性退化抛物方程弱解的稳定性。

[关键词] 运算次序；二次极限；二重积分；控制收敛定理；各向异性退化抛物方程；弱解

[中图分类号] O 172.2；O 175.29

On the Problem of the Exchange of Operation Order

ZHAN Huashui[1], XU Wenbin[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Xiamen University of Technology, Xiamen 361024, China;
2. School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, the problems related to some classical exchanges of operation order, the relationship between the double limit and the repeated limit, the relationship between the double integral and the repeated integral were discussed. Meanwhile, the stability of weak solutions to an anisotropic degenerate parabolic equation was proved with the dominated convergent theorem.

Keywords: operation order; repeated limit; double integral; dominated convergent theorem; anisotropic degenerate parabolic equation; weak solution

0　引言

众所周知，分析学的严密性理论大都是建立在交换运算次序的基础之上的，最简单的就是积分微分这两个互为“逆”运算的交换问题：$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + c, (\int f(x)\,\mathrm{d}x)' = f(x)$。

许多有关交换运算次序的数学问题和数学方法，比如二次极限的交换问题、二重积分的交换问题等，更多的是涉及 2 个不同类型的运算的交换问题。比如：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 在什么条件下成立？含参变量积分的许多问题都涉及极限运算与积分运算是否能够交换？这些运算交换的问题也是实分析（泛函分析）研究的重要课题，比如控制收敛定理，还有下面 2 个重要的不等式。

1）Jessen 不等式。设测度空间 (X,μ) 满足 $\mu(X) = 1$，若 $f \in L^1(X,\mu)$ 取值于 (a,b)，而 ψ 是 (a,b) 上的凸函数，那么式（1）的右边有意义，且

$$\psi\left(\int f\mathrm{d}\mu\right) \leqslant \int \psi \circ f\mathrm{d}\mu。\tag{1}$$

[收稿日期] 2020 - 07 - 27
[作者简介] 詹华税（1966—），男，教授，博士，从事微分几何与偏微分方程研究。E-mail:2012111007@xmut.edu.cn

2）弱收敛之有界性定理。设 $U\subset \mathbf{R}^n$ 是一有界光滑子集，$f_k\rightarrow f$ 弱收敛于 $L^q(U)$ 中，则 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 $L^q(U)$ 中有界，并且有 $\|f\|_{L^q(U)}\leqslant \lim\limits_{k\rightarrow\infty}\inf\|f_k\|_{L^q(U)}$。

这 2 个不等式在实分析和偏微分方程研究中都发挥着重要的作用。本文综述了数学分析中的一些运算交换问题，并利用控制收敛定理证明一类退化抛物方程解的稳定性。

1　二重极限与二次极限

设 $f(x,y)$ 是在原点 $(0,0)$ 附近有定义的函数，比如在 $[-2,2]\times[-2,2]$ 上有定义。熟知，二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\rightarrow 0\\ y\rightarrow 0}}f(x,y)$ 的存在性与 2 个二次极限 $\lim\limits_{x\rightarrow 0}\lim\limits_{y\rightarrow 0}f(x,y)$、$\lim\limits_{y\rightarrow 0}\lim\limits_{x\rightarrow 0}f(x,y)$ 的存在性是没有任何关系的。一般的教材[1-2]都是举几个例子来说明这个问题。实际上，如果用图解的方法解释一下 x 与 y 同时趋于0，先 x 趋于0后 y 趋于0，先 y 趋于0后 x 趋于0，它们之间的存在性没有任何关系就显得更加的直观。

但是对于二重数列，相应的问题就不好直接用图示来说明了。当然，也很容易举例说明二重极限 $\lim\limits_{\substack{n\rightarrow\infty\\ m\rightarrow\infty}}f(m,n)$ 的存在性与 2 个二次极限 $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\lim\limits_{m\rightarrow\infty}f(m,n)$、$\lim\limits_{m\rightarrow\infty}\lim\limits_{n\rightarrow\infty}f(m,n)$ 的存在性没有任何关系。一般的数学分析的教材没有讨论这种数列的二重极限，在此给出一些补充。

定义 1　若对任意给定的 $\varepsilon>0$，如果存在足够大的整数 N，当 $m,n>N$ 时，有 $|f(m,n)-a|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{\substack{n\rightarrow\infty\\ m\rightarrow\infty}}f(m,n)=a$。

定理 1　设二重极限 $\lim\limits_{\substack{n\rightarrow\infty\\ m\rightarrow\infty}}f(m,n)$ 与 2 个二次极限 $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\lim\limits_{m\rightarrow\infty}f(m,n)$、$\lim\limits_{m\rightarrow\infty}\lim\limits_{n\rightarrow\infty}f(m,n)$ 都存在，则有

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\lim_{m\rightarrow\infty}f(m,n)=\lim_{\substack{n\rightarrow\infty\\ m\rightarrow\infty}}f(m,n)=\lim_{m\rightarrow\infty}\lim_{n\rightarrow\infty}f(m,n)。\tag{2}$$

证明　设 $\lim\limits_{\substack{m\rightarrow\infty\\ n\rightarrow\infty}}f(m,n)=a$，则对 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N_1，使得当 $m,n>N_1$ 时，有 $|f(m,n)-a|<\varepsilon/3$。设 $\lim\limits_{m\rightarrow\infty}\lim\limits_{n\rightarrow\infty}f(m,n)=b$，即 $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}f(m,n)=g(m)$，$\lim\limits_{m\rightarrow\infty}g(m)=b$。于是对 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N_2,N_3，使得对固定的 m，当 $n>N_2$ 时，有 $|f(m,n)-g(m)|<\varepsilon/3$，且当 $m>N_3$ 时，有 $|g(m)-b|<\varepsilon/3$。

设 $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\lim\limits_{m\rightarrow\infty}f(m,n)=c$，即 $\lim\limits_{m\rightarrow\infty}f(m,n)=h(n)$，$\lim\limits_{n\rightarrow\infty}h(n)=c$。于是对 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N_4,N_5，使得对固定的 n，当 $m>N_4$ 时，有 $|f(m,n)-h(n)|<\varepsilon/3$。且当 $n>N_5$ 时，有 $|h(n)-c|<\varepsilon/3$。

取 $N=\max\{N_1,N_2,N_3,N_4,N_5\}$，则当 $m,n>N$ 时，有：

$$|a-b|=|[a-f(m,n)]+[f(m,n)-g(m)]+[g(m)-b]|\leqslant$$
$$|f(m,n)-a|+|f(m,n)-g(m)|+|g(m)-b|<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon;$$
$$|a-c|=|[a-f(m,n)]+[f(m,n)-h(n)]+[h(n)-c]|\leqslant$$
$$|f(m,n)-a|+|f(m,n)-h(n)|+|h(n)-c|<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon。$$

故 $a=b$ 且 $a=c$，即 $\lim\limits_{\substack{m\rightarrow\infty\\ n\rightarrow\infty}}f(m,n)=\lim\limits_{m\rightarrow\infty}\lim\limits_{n\rightarrow\infty}f(m,n)=\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\lim\limits_{m\rightarrow\infty}f(m,n)$。

2　二重积分与累次积分

定理 2　设 $f(x,y)$ 在 X 型区域 $D:a\leqslant x\leqslant b,\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)$ 上可积，若 $I(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$ 存在，则累次积分 $\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$ 也存在，且

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y。\tag{3}$$

但是，很多高等数学的教材直接提到式（3），而没有强调 $I(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的存在前提[1]。对于一般数学分析的教材，虽然给出了定理 2，也强调了 $I(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的存在前提条件，但一般也就是简单介绍[2-3]，并没有进行深入的讨论。其实，这里面所涉及的数学思想和方法还是值得研究的。首先，式（3）的本质也是二重极限与二次极限的关系问题，把式（3）的两边以积分的定义写出来，看起来与式（2）类似。所以，式（3）要成立，简单一点，考虑矩形区域 $D: a \leqslant x \leqslant b$，$c \leqslant y \leqslant d$，那么由定理 1 可以推出

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{4}$$

要成立，式（4）的这 3 个积分必须都存在。

下面根据文献［4］对式（4）有关运算次序的交换分 3 种情况进行讨论。

1）设函数 $f(x,y)$ 在矩形 $(P) = [a,b;c,d]$ 上连续。以 (x,y) 表示这一矩形上的任意点，考察由二重积分所表示的函数 $F(x,y) = \int_a^x\int_c^y f(u,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u$。如将它表作逐次积分 $F(x,y) = \int_a^x \mathrm{d}u \int_c^y f(u,v)\,\mathrm{d}v$，则先对 x 微分，然后对 y 微分，依次得 $\partial F/\partial x = \int_c^y f(x,v)\,\mathrm{d}v$，$\partial^2 F/(\partial x\partial y) = f(x,y)$，得到与单积分对变上限微分定理的一类似定理。同样可建立 $\partial^2 F/(\partial y\partial x) = f(x,y)$。

以上分析说明：只要函数 $f(x,y)$ 在矩形 $(P) = [a\ b;c,d]$ 上连续，则

$$\partial^2 F(x,y)/(\partial x\partial y) = f(x,y) = \partial F(x,y)/(\partial y\partial x)。\tag{5}$$

此时式（4）的 3 个积分都存在且相等。

2）设 $f(x,y)$ 在矩形 $(P) = [a,b;c,d]$ 上可积，但不一定连续。如对这一函数存在一“原”函数 $\Phi(x,y)$，即 $\partial^2\Phi(x,y)/(\partial x\partial y) = f(x,y)$，则

$$\iint_{(P)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \Phi(b,d) - \Phi(b,c) - \Phi(a,d) + \Phi(a,c)。\tag{6}$$

这与用原函数表示通常定积分的公式相类似。

证明　将矩形 $[a,b;c,d]$ 分为部分矩形 $[x_i,x_{i+1};y_k,y_{k+1}](i = 0,1,\cdots,n-1;k = 0,1,\cdots,m-1)$。两次应用有限增量的公式到式子 $\Phi(x_{i+1},y_{k+1}) - \Phi(x_{i+1},y_k) - \Phi(x_i,y_{k+1}) + \Phi(x_i,y_k)$，将它表作 $\Phi''_{xy}(\xi_{ik},\eta_{ik})\Delta x_i\Delta y_k = f(\xi_{ik},\eta_{ik})\Delta x_i\Delta y_k$，其中 $x_i \leqslant \xi_{ik} \leqslant x_{i+1}, y_k \leqslant \eta_{ik} \leqslant y_{k+1}$。对 i 及 k 相加，得 $\sum_{i,k}(f(\xi_{ik},\eta_{ik})\Delta x_i\Delta y_k) = \Phi(b,d) - \Phi(b,c) - \Phi(a,d) + \Phi(a,c)$。最后，取极限即得到式（6）。

可见，推理的结构、证明积分学中的基本公式与用原函数表简单定积分时完全一样。同时，2）的结果说明，二重积分 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的存在与两个累次积分 $\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$、$\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的存在与否、相等与否没有本质的关系。下面的例 1 更加说明了这一点，同时也说明了交换积分次序不是随便可以交换的。

例 1　如 x 是一有理数，则将它表作正分母的既约分数后，表分母为 q_x。在正方形 $(P) = [0,1;0,1]$ 上定义一函数 $f(x,y)$，令 $f(x,y) = \begin{cases} 1/q_x + 1/q_y, x\text{ 和 }y\text{ 都是有理数}, \\ 0,\text{其他。} \end{cases}$ 函数在正方形中有理坐标的一切点处不连续，而在其余的点处连续。

因为，不论 $\varepsilon > 0$ 是怎样一个数，只有在可数个点处可能 $f > \varepsilon$，而且由文献［4］知道 $f(x,y)$ 满足可积条件，因此二重积分 $\iint_{(P)} f(x,y)\,\mathrm{d}P$ 存在，且等于 0。

对无理数的值 y，函数 $f(x,y)$ 对所有的 x 为 0，所以 $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x = 0$。而如 y 为有理数时，则对无理数的值 x，$f(x,y) = 0$，对有理数的 x，有 $f(x,y) = 1/q_x + 1/q_y$。这个 x 的函数在 x 的任何区间上有振动大于 $1/q_y$，因此，它对 x 的积分不存在。也就是说，不可能来谈逐次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$。同样可证明积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 也不存在。

3）令 $f(x,y) = \begin{cases} 1, x \text{ 和 } y \text{ 都是有理数且 } q_x = q_y, \\ 0, \text{其他。} \end{cases}$ 因为在正方形的任何部分内，函数 f 的振动等于 1，故二重积分 $\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,\mathrm{d}P$ 不存在。

同时，对固定的 y，函数 $f(x,y)$ 或恒等于 0（如 y 为无理数），或仅对有限个值 x 可能异于 0（如 y 为有理数）。在这 2 种情况下，$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x = 0$。就是说，逐次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x = 0$ 存在。同样，积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ 也存在。

3 一类退化抛物方程解的稳定性

引理 1（控制收敛定理）[5] 设 (X,μ) 是一实可测空间，f_n 是一实可测函数列，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), x \in X$，存在可积函数 g，使得 $|f_n(x)| \leqslant g(x), \forall x \in X, n = 1,2,\cdots$，那么，$f \in L^1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_X \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu$。

实际上可以看出，控制收敛定理就是极限运算与积分运算相互交换的问题。本节将利用控制收敛定理来探讨一类各向异性的退化抛物方程的解的稳定性。

考虑如下方程

$$u_t = \sum_{i=1}^{N} D_i(a_i(x)|D_i u|^{p_i(x)} D_i u) + \sum_{i=1}^{N} D_i(b_i(u,x,t)), \tag{7}$$

其中：$\Omega \in \mathbf{R}^N$ 是 C^2 上具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域；$p_i(x) \in C(\overline{\Omega})$；$D_i = \partial/\partial x_i$；$b_i(u,x,t) \in C^1([-c,c] \times \overline{\Omega} \times [0,T])$，其中 c 是任意正数。这个方程来自一种所谓的电流变流体[6-8]，是近年来偏微分方程理论和应用研究的热点问题之一。考虑方程（7）具有初始条件[9-13]

$$u|t = 0 = u_0(x), x \in \Omega, \tag{8}$$

和部分边界条件

$$u(x,t) = 0, (x,t) \in \sum\nolimits_p \times (0,T), \tag{9}$$

其中，部分边界 $\sum_p \subseteq \partial\Omega$ 的具体表达式后面再详细给出。

记 $\sum_p{}' = \partial\Omega / \sum_p$，$p_i^+ = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} p_i(x)$，$p_i^- = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} p_i(x), i = 1,2,\cdots,N$，$p^0 = \max\{p_1^+, p_2^+, \cdots, p_N^+\}$，$p_0 = \min\{p_1^-, p_2^-, \cdots p_N^-\} > 1$。并假设当 $x \in \Omega$ 时，$a_i(x) > 0, i = 1,2,\cdots,N$，且 $a_{i_1}(x) \geqslant c_1 > 0$，$a_{i_2}(x) \geqslant c_2 > 0, \cdots, a_{i_k} \geqslant c_k > 0$，$x \in \overline{\Omega}$，$a_{j_1}(x) = a_{j_2}(x) = \cdots = a_{j_l}(x) = 0$，$x \in \partial\Omega$。其中 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k, j_1, j_2, \cdots, j_l\}$ 是 $\{1,2,\cdots,N\}$ 的一个排列。

定义 2 函数 $u(x,t)$ 称为具有初值（7）的方程（6）的弱解，如果 $u \in L^\infty(Q_T)$，$a_i(x)|u_{x_i}|p_i(x) \in L^1(Q_T)$，$u_t \in L^{p^{0\prime}}(0,T; W^{-1,p^{0\prime}}(\Omega))$，其中，$p^{0\prime} = p^0/(p^0 - 1)$，且对于任何函数 $\varphi \in C_0^1(Q_T)$，有

$$\langle u_t,\varphi\rangle + \sum_{i=1}^{N}\iint_{Q_T}[a_i(x)|u_{x_1}|^{p_i(x)-2}u_{x_i} + b_i(u,x,t)]\varphi_{x_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0。\tag{10}$$

初值条件在

$$\lim_{t\to 0}\int_{\Omega}|u(x,t) - u_0(x)|\mathrm{d}x = 0\tag{11}$$

的意义上成立。

定义 3　设 $u(x,t)$ 为具有初值（8）的方程（7）的弱解。如果 u 在迹意义下满足部分边界条件（9），则称 $u(x,t)$ 为具有初始边界条件（8）、（9）的方程（7）的弱解。

当 $p_i(x) = p_i$ 时，方程（7）的初边值问题解的存在唯一性已由文献［14］给出，故本文在此不再重复。下面就利用控制收敛定理将文献［14］的稳定性结论推广到变指数的情形。首先来介绍一下由文献［14］所提出的弱特征函数方法。

设 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 空间的一个有界光滑区域，$\varphi(x)$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的非负连续函数，若 $\varphi(x) > 0$，$x\in\Omega$；$\varphi(x) = 0$，$x\in\partial\Omega$，则称 $\varphi(x)$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的一个弱特征函数。显然，弱特征函数不唯一。所谓弱特征函数方法就是选取合适的弱特征函数作为检验函数来证明方程解的稳定性。

下面记 $\Omega_\eta = \{x\in\Omega:\varphi(x) > \eta\}$，$\sum_p = \{x\in\partial\Omega: |\varphi_{x_{i_r}}(x)|^{p_{i_r}(x)}/|\varphi(x)|^{p_{i_r}(x)-1}\neq 0\}$。文献[13]已经说明，使得 $|\varphi_{x_{i_r}}(x)|^{p_{i_r}(x)}/|\varphi(x)|^{p_{i_r}(x)-1}$ 为有界量的弱特征函数 $\varphi(x)$ 是一定存在的。

本文的主要结论是定理 3。

定理 3　设 $u(x,t)$、$v(x,t)$ 为方程(6)的弱解具有初始条件 $u_0(x)$，$v_0(x)$ 和边界条件

$$u(x,t) = v(x,t) = 0,\ (x,t)\in\sum_p\times(0,T)\tag{12}$$

的 2 个解，且弱特征函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\sum_{s=1}^{l}(1/\eta)\Big(\int_{\Omega/\Omega_\eta}a_{j_s}(x)|\varphi_{x_{j_s}}(x)|^{p_{j_s}(x)}\mathrm{d}x\Big)^{1/p_{j_s}^{+}}\leqslant c。\tag{13}$$

若

$$|b_i(u,x,t) - b_i(v,x,t)|\leqslant ca_i(x)^{1/p_i(x)}|u-v|,i = 1,2,\cdots,N,\tag{14}$$

则有

$$\int_{\Omega}|u(x,t) - v(x,t)|\mathrm{d}x\leqslant c\int_{\Omega}|u_0(x) - v_0(x)|\mathrm{d}x。\tag{15}$$

证明　对于适当小的正数 η，令 $h_\eta(s) = (2/\eta)(1 - |s|/\eta)_+$，$S_\eta(s) = \int_0^s h_\eta(\tau)\mathrm{d}\tau$。显然，$h_\eta(s)\in C(R)$，且有 $h_\eta(s)\geqslant 0$，$|sh_\eta(s)|\leqslant 1$，$|S_\eta(s)|\leqslant 1$，$\lim\limits_{\eta\to 0}S_\eta(s) = \mathrm{sgn}\, s$，$\lim\limits_{\eta\to 0}sh_\eta(s) = 0$。对任意给定的满足式（11）的 Ω 上的弱特征函数，令 $\varphi_\eta(x) = \begin{cases}1, x\in\Omega_\eta,\\ \varphi(x)/\eta, x\in\Omega/\Omega_\eta。\end{cases}$ 同时选取 $\chi_{[\tau,s]}(t)\varphi_\eta(x)S_\eta(u-v)$ 作为检验函数，其中 $\chi_{[\tau,s]}(t)$ 是 $[\tau,s]\subset(0,T)$ 上的特征函数，则：

$$\begin{aligned}&\int_\tau^s\mathrm{d}t\int_\Omega\varphi_\eta S_\eta(u-v)[\partial(u-v)/\partial t]\mathrm{d}x +\\ &\sum_{i=1}^{N}\int_\tau^s\mathrm{d}t\int_\Omega a_i(x)[|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p_i(x)-2}v_{x_i}](u-v)_{x_i}h_\eta(u-v)\varphi_\eta\mathrm{d}x +\\ &\sum_{r=1}^{k}\int_\tau^s\mathrm{d}t\int_\Omega a_{i_r}(x)[|u_{x_{i_r}}|^{p_{i_r}(x)-2}u_{x_{i_r}} - |v_{x_{i_r}}|^{p_{i_r}(x)-2}v_{x_{i_r}}]S_\eta(u-v)\varphi_{\eta x_{i_r}}\mathrm{d}x +\\ &\sum_{r=1}^{l}\int_\tau^s\mathrm{d}t\int_\Omega a_{j_r}(x)[|u_{x_{j_r}}|^{p_{j_r}(x)-2}u_{x_{j_r}} - |v_{x_{j_r}}|^{p_{j_r}(x)-2}v_{x_{j_r}}]S_\eta(u-v)\varphi_{\eta x_{j_r}}\mathrm{d}x +\\ &\sum_{i=1}^{N}\int_\tau^s\mathrm{d}t\int_\Omega[b_i(u,x,t) - b_i(v,x,t)](u-v)_{x_i}h_\eta(u-v)\varphi_\eta\mathrm{d}x +\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\tau}^{s}\mathrm{d}t\int_{\Omega}[b_i(u,x,t)-b_i(v,x,t)]S_{\eta}(u-v)\varphi_{\eta x_i}\mathrm{d}x=0。\tag{16}$$

根据文献［15］的引理 3.1，有：

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{\tau}^{s}\mathrm{d}t\int_{\Omega}\varphi_{\eta}S_{\eta}(u-v)[\partial(u-v)/\partial t]\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\Omega}|u(x,s)-v(x,s)|\mathrm{d}x-\int_{\Omega}|u(x,\tau)-v(x,\tau)|\mathrm{d}x。\tag{17}$$

同时，由 $p_i(x)$-Laplace 算子的单调性，有：

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\tau}^{s}\mathrm{d}t\int_{\Omega}a_i(x)[|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i}-|v_{x_i}|^{p_i(x)-2}v_{x_i}](u-v)_{x_i}h_{\eta}(u-v)\varphi_{\eta}\mathrm{d}x\geqslant 0。\tag{18}$$

由于

$$\left|\int_{\Omega}[b_i(u,x,t)-b_i(v,x,t)](u-v)_{x_i}h_{\eta}(u-v)\varphi_{\eta}\mathrm{d}x\right|\leqslant$$
$$c\int_{\Omega}|a_i^{1/p_i(x)}(u-v)_{x_i}||h_{\eta}(u-v)(u-v)|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$c\left[\int_{\Omega}a_i(x)(|u_{x_i}|^{p_i(x)}+|v_{x_i}|^{p_i(x)})\mathrm{d}x\right]^{1/p_{1i}}\left[\int_{\Omega}|h_{\eta}(u-v)(u-v)|^{q_i(x)}\mathrm{d}x\right]^{1/q_i^+}\leqslant$$
$$c\left[\int_{\Omega}|h_{\eta}(u-v)(u-v)|^{q_i(x)}\mathrm{d}x\right]^{1/q_i^+}。\tag{19}$$

其中：$q_i(x)=p_i(x)/[p_i(x)-1]$；$q_i^+=\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}q_i(x)$。当 $p_{1i}=p_i^+$ 时，$\int_{\Omega}a_i(x)(|u_{x_i}|^{p_i(x)}+|v_{x_i}|^{p_i(x)})\mathrm{d}x\leqslant 1$；当 $p_{1i}=p_i^-$ 时，$\int_{\Omega}a_i(x)(|u_{x_i}|^{p_i(x)}+|v_{x_i}|^{p_i(x)})\mathrm{d}x>1$。

利用控制收敛定理，由 $\lim\limits_{\eta\to 0}sh_{\eta}(s)=0$，有

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{\tau}^{s}\mathrm{d}t\int_{\Omega}[b_i(u,x,t)-b_i(v,x,t)](u-v)_{x_i}h_{\eta}(u-v)\varphi_{\eta}\mathrm{d}x=0。\tag{20}$$

同时，类似于文献［14］，利用部分边界条件（12）和控制收敛定理，可以得到

$$\lim_{\eta\to 0}\sum_{r=1}^{k}\int_{\tau}^{s}\mathrm{d}t\int_{\Omega}a_{i_r}(x)[|u_{x_{i_r}}|^{p_{i_r}(x)-2}u_{x_{i_r}}-|v_{x_{i_r}}|^{p_{i_r}(x)-2}v_{x_{i_r}}]S_{\eta}(u-v)\varphi_{\eta x_{i_r}}\mathrm{d}x=0。\tag{21}$$

类似于文献［13］，利用定理的条件（13）和控制收敛定理，可以得到

$$\lim_{\eta\to 0}\sum_{r=1}^{l}\int_{\tau}^{s}\mathrm{d}t\int_{\Omega}a_{j_r}(x)[|u_{x_{j_r}}|^{p_{j_r}(x)-2}u_{x_{j_r}}-|v_{x_{j_r}}|^{p_{j_r}(x)-2}v_{x_{j_r}}]S_{\eta}(u-v)\varphi_{\eta x_{j_r}}\mathrm{d}x=0。\tag{22}$$

类似于文献［14］，利用部分边界条件（12）、定理的条件（13）和控制收敛定理，可以得到

$$\lim_{\eta\to 0}\left|\sum_{i=1}^{N}\int_{\tau}^{s}\mathrm{d}t\int_{\Omega}[b_i(u,x,t)-b_i(v,x,t)]S_{\eta}(u-v)\varphi_{\eta x_i}\mathrm{d}x\right|\leqslant c\left(\int_{\tau}^{s}\mathrm{d}t\int_{\Omega}|u(x,t)-v(x,t)|\mathrm{d}x\right)^{r},\tag{23}$$

其中，$r<1$ 是个常数。

由式（16）~式（23），得到

$$\int_{\Omega}|u(x,s)-v(x,s)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega}|u(x,\tau)-v(x,\tau)|\mathrm{d}x+c\left(\int_{\tau}^{s}\mathrm{d}t\int_{\Omega}|u(x,t)-v(x,t)|\mathrm{d}x\right)^{r}。$$

利用推广的 Gronwall 不等式，有

$$\int_{\Omega}|u(x,s)-v(x,s)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega}|u(x,\tau)-v(x,\tau)|\mathrm{d}x。$$

让 $\tau\to 0$，有

$$\int_{\Omega}|u(x,s)-v(x,s)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega}|u_0(x)-v_0(x)|\mathrm{d}x。$$

当然，如果选择不同的弱特征函数，部分边界条件（12）的表达式也不同，这就涉及如何选取最优部分边界条件的问题。这一问题在文献［14］中已经有了一些讨论，在此不再重复，本节所研

究的内容，就是利用控制收敛定理将文献［14］的结果推广到了变指数情形。

［参考文献］

［1］上海交通大学，集美大学. 高等数学［M］. 北京：科学出版社，2010.

［2］刘玉琏，傅沛仁，林玎，等. 数学分析讲义［M］. 北京：高等教育出版社，2008.

［3］王成强. 关于二重积分的一题多解教学问题探析［J］. 成都师范学院学报，2020，36(3)：105-113.

［4］菲赫金哥尔茨. 微积分学教程（第三卷第二分册)［M］. 吴亲仁，路见可，译. 北京：人民教育出版社，1957.

［5］历则治. 实变与泛函［M］. 厦门：厦门大学出版社，1991.

［6］RUZICKA M. Electrorheological fluids：modeling and mathematical theory［M］. Berlin：Springer，2000.

［7］ACERBI E，MINGIONE G. Regularity results for stationary electrorheological fluids［J］. Arch Ration Mech Anal，2002，164：213-259.

［8］ANTONTSEV S，DIAZ J L，SHMAREV S，et al. Energy methods for free boundary problems：applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics［J］. Applied Mechanics Reviews，2002，55(4)：74-75. DOI:10.1115/1.1483358.

［9］ANTONTSEV S，SHMAREV S. Anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity［J］. Publ Mat，2009，53：355-399.

［10］KONATE I，OUARO S. Good Radon measure for anisotropic problems with variable exponent［J］. Electron J Differential Equations，2016，221：1-19.

［11］ZHAN H S. The stability of the solutions of an anisotropic diffusion equation［J］. Letters in Mathematical Physics，2019，109：1145-1166.

［12］ANTONTSEV S，SHMAREV S. Anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity［J］. Publ Mat，2009，53：355-399.

［13］ZHANG Q，RADULESCU V D. Double phase anisotropic variational problems and combined effects of reaction and absorption terms［J］. J Math Pures Appl，2018，118(9)：159-203.

［14］ZHAN H S，FENG Z S. The well-posedness problem of an anisotropic parabolic equation［J］. Journal of Differential Equations，2020，268：389-413.

［15］ZHAN H S. The uniqueness of the solution to the diffusion equation with a damping term［J］. Appl Anal，2019，98(7)：1333-1246.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）