[文章编号] 1007 - 7405(2022)04 - 0365 - 05　　DOI:10.19715/j.jmuzr.2022.04.11

单位圆盘外单叶调和映射的面积定理

石擎天[1]，林珍连[2]

（1. 泉州师范学院数学与计算机科学学院，福建 泉州 362000；2. 华侨大学数学科学学院，福建 泉州 362021）

[摘要] 设 Σ_H 是所有单位圆盘外部 Δ^* 上单叶保向的规范化调和映射。利用 Green 定理得到了 Σ_H 类的面积定理，并运用该面积定理和 Cauchy-Green 公式，对具有拟共形延拓性的 Σ_H 类函数的系数进行估计。所得结果推广了经典的 Σ 类相应结果。

[关键词] 单叶调和映射；拟共形延拓；面积定理；Green 定理

[中图分类号] O 174.51

Area Theorem of Univalent Harmonic Mappings Outside Unit Disk

SHI Qingtian[1], LIN Zhenlian[2]

(1. School of Mathematics and Computation Science, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362000, China;
2. School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Let Σ_H be the class of all sense preserving univalent and normalization harmonic mappings on the exterior of the unit disk Δ^*. Using the Green theorem, the area theorem of Σ_H was obtained. Then applying this area theorem and Cauchy-Green formula, the coefficients estimation of Σ_H with quasiconformal extension to the plane was studied. The results generalize the corresponding results of the classical Σ.

Keywords: univalent harmonic mappings; quasiconformal extension; area theorem; Green theorem

0　引言

设 $\Delta = \{z: |z| < 1\}$ 是复平面 C 上单位圆盘，$\Delta^* = C/\Delta$ 是单位圆盘外区域。记 Σ 为 Δ^* 到 C 上共形映照 f（满足规范化条件 $f'(\infty) = 1$ 和 $f(\infty) = \infty$）的全体，即 $f \in \Sigma$ 可表示为

$$f(z) = z + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n z^{-n}), \qquad z \in \Delta^*。 \tag{1}$$

20 世纪 80 年代以来，Σ 类函数的面积估计、拟共形延拓、像域特征的刻画等问题得到深入研究[1-2]。记 $\Sigma' = \{f \in \Sigma: f(z) \neq 0\}$，$\Sigma'$ 类函数可与 S 类建立一一对应关系，即 $f \in S$ 当且仅当 $g \in \Sigma'$，其中 $g(z) = 1/f(1/z)$。1914 年，为了证明 S 类中系数估计 $|a_2| \leqslant 2$，Gronwall[3] 借助 S 类与 Σ 类间这种紧密联系，运用 Parseval 公式得到经典的面积定理，即定理 1。

定理 1[3]　设 $f \in \Sigma$，则有精确估计 $\sum_{n=1}^{\infty}(n|a_n|^2) \leqslant 1$。

1971 年，Lehto[4] 推广了定理 1，即定理 2。

[收稿日期] 2021 - 09 - 06
[基金项目] 福建省自然科学基金青年创新项目（2020J05157）；福建省中青年教师教育科研项目（JAT190508）
[作者简介] 石擎天（1986—），男，讲师，博士，从事复分析研究。E-mail:stq5267@163.com

定理 2[4] 设 $f \in \Sigma$，若 f 可 K-拟共形延拓到复平面 C 上，则有 $\sum_{n=1}^{\infty}(n|a_n|^2) \leqslant k^2$，其中 $k = (K-1)/(K+1) \in [0,1)$，等号成立当且仅当

$$f(z) = \begin{cases} z + a_0 + a_1/z, & |z| > 1, \\ z + a_0 + a_1\bar{z}, & |z| \leqslant 1, \end{cases} \tag{2}$$

其中 a_1 是复常数，且 $|a_1| < 1$。

对于 $\Delta_r = \{z: |z| < r\}$ 上全纯函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n z^n)$，定义 f 的 Dirichlet 积分为 $A(r,f) = \iint_{\Delta_r}|f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$z = x + iy \in \Delta_r$。应用 Parseval 公式并令 $r \to 1$ 可得，$A(1,f) = \iint_{\Delta}|f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty}(n|a_n|^2)$。

Dirichlet 积分是研究拟共形映射极值性和调和映射存在性的重要工具[5-6]。受定理 1 和定理 2 的启发，本文将 Σ 类推广到调和映射中。

设 Σ_H 是 Δ^* 上单叶保向调和映射全体，且满足规范化条件为

$$f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n z^{-n}) + \overline{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n z^{-n})} + A\lg|z|, \qquad z \in \Delta^*, \tag{3}$$

其中，A 是复常数[7]。二阶连续可微函数 f 在区域 Ω 上保向，当且仅当不等式 $|f_{\bar{z}}(z)| < |f_z(z)|$ 对所有 $z \in \Omega$ 均成立。若存在常数 $K \geqslant 1$，使得 Ω 上单叶函数 f 的偏导数满足不等式 $|f_{\bar{z}}(z)| \leqslant k|f_z(z)|$，则称 f 是 Ω 上 K-拟共形映射，其中 $k = (K-1)/(K+1) \in [0,1)$。

拟共形映射是复分析中非常重要的研究对象，是共形映射的推广，且与调和映射既有紧密联系又有较大差异，因此，它吸引了广大学者们进行深入研究[8-11]。Σ_H 类是调和映射理论研究中非常重要的函数类，其面积偏差、单叶半径、星象与凸像特征刻画、Lipschitz 连续性等问题的研究备受关注，并得到了一些较好的结果[7,12-16]。

本文在定理 1 和定理 2 的研究方法基础上，结合 Σ_H 类函数的性质，对相应面积定理进行分析，结果推广了定理 1 和定理 2，为深入研究 Σ_H 类的系数估计、Lipschitz 连续性、拟共形性等提供了一定的理论参考。

1 主要结果及其证明

为了给出具有拟共形延拓性的单叶调和映射的系数估计，先分析 Σ_H 类的面积估计。

引理 1 若 $f \in \Sigma_H$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n(|a_n|^2 - |b_n|^2)] \leqslant 1。\tag{4}$$

证明 设 E 是复平面 C 中紧致连通集使得 $\omega = f(z)$ 在 Δ^* 上的函数值不取 E 中的点，即 $f(\Delta^*) \in C \setminus E$。对于 $r > 1$，设 C_r 是 f 在圆周 $|z| = r$ 上的像。因为 f 是单叶的，所以 C_r 是一条简单闭曲线，且其围成的闭域 $E_r \supset E$。由 Green 定理可得 E_r 的面积为

$$A_r = \int_{C_r}\bar{\omega}\mathrm{d}\omega/(2i) = \int_{C_r}\overline{f(z)}(f_z(z)\mathrm{d}z + f_{\bar{z}}(z)\mathrm{d}\bar{z})/(2i) =$$

$$\int_0^{2\pi}[r\mathrm{e}^{-i\theta} + \bar{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\bar{a}_n r^{-n}\mathrm{e}^{in\theta}) + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n r^{-n}\mathrm{e}^{-in\theta}) + \bar{A}\ln r] \cdot$$

$$[(1 - \sum_{n=1}^{\infty}(na_n r^{-n-1}\mathrm{e}^{-i(n+1)\theta}) + Ar^{-1}\mathrm{e}^{-i\theta}/2)ir\mathrm{e}^{i\theta} - ir\mathrm{e}^{-i\theta}(-\sum_{n=1}^{\infty}(n\bar{b}_n r^{-n-1}\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}) + Ar^{-1}\mathrm{e}^{i\theta}/2)]\mathrm{d}\theta/(2i) =$$

$$\pi\left[r^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(n\left(|a_n|^2 - |b_n|^2\right)r^{-2n}\right)\right]。\tag{5}$$

当 $r\to 1^+$ 时，则式（5）可推出 $m(E):=\pi\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\left(|a_n|^2-|b_n|^2\right)\right)\right]$ 是 E 的外测度，从而非负，即证得式（4）。

注 1　由引理 1 的证明可知，式（4）中等号成立当且仅当 $f\in\sum_H$ 且 $m(E)=0$。特别地，当 $A=0$ 且 $b_n=0$ 对所有 $n=1,2,\cdots$ 时，引理 1 恰为定理 1。因此，引理 1 是共形映射 $f\in\Sigma$ 的面积定理的推广。

应用上述面积定理，得到了具有拟共形延拓性的单叶调和映射的系数估计如下。

定理 3　设 $f(z)=z+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nz^{-n})+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{b_nz^{-n}}+A\log|z|$ 是 Δ^* 上单叶保向调和映射，其中 A 是一个复常数。若 f 可 K-拟共形延拓到复平面 C 上，且对所有 $z\in\Delta^*$ 满足

$$\mathrm{Re}\left[\left(zf_z(z)-\bar{z}f_{\bar{z}}(z)\right)\bar{A}\right] < |z|^2\left(|f_z(z)|^2-|f_{\bar{z}}(z)|^2\right),\tag{6}$$

则有 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\left(|a_n|^2-|b_n|^2\right)\right)\leqslant k^2$。等号成立当且仅当

$$f(z)=\begin{cases}z+a_0+a_1/z, & z\in\Delta^*,\\ z+a_0+a_1\bar{z}, & z\in\Delta,\end{cases}\tag{7}$$

其中，a_0,a_1 是复常数且 $|a_1|=k<1$。

证明　证明过程可分 $A=0$ 和 $A\neq 0$ 两种情况。

1）$A=0$。设 E 是复平面 C 中紧致连通集使得 $\omega=f(z)$ 在 Δ^* 上的函数值不取 E 中的点，即 $f(\Delta^*)\in C\setminus E$。应用引理 1，$E$ 的面积为 $\pi\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\left(|a_n|^2-|b_n|^2\right)\right)\right]$。因为 f 可 K-拟共形延拓到复平面 C，则 $f(\Delta)=E$ 的面积满足 $\iint_{\Delta}\left(|f_z(z)|^2-|f_{\bar{z}}(z)|^2\right)\mathrm{d}\sigma=\pi\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\left(|a_n|^2-|b_n|^2\right)\right)\right]$，其中 $\mathrm{d}\sigma$ 为欧氏面积微分。

因为 f 是单位圆盘 Δ 上 K- 拟共形映射，即 $|f_{\bar{z}}(z)|\leqslant k|f_z(z)|$ 对几乎处处所有 $z\in\Delta$ 都成立，由此可推出

$$\iint_{\Delta}|f_{\bar{z}}(z)|^2\mathrm{d}\sigma/\pi\leqslant k^2/(1-k^2)\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\left(|a_n|^2-|b_n|^2\right)\right)\right]。\tag{8}$$

另外，对于 $\rho>1$，对 f 运用 Cauchy-Green 公式可得，

$$f(z)-z=\int_{|\xi|=\rho}\left[\left(f(\xi)-\xi\right)/(\xi-z)\right]\mathrm{d}\xi/(2\pi i)-\iint_{|\xi|<\rho}\left[f_{\bar{\xi}}(\xi)/(\xi-z)\right]\mathrm{d}\sigma/\pi,\qquad |z|<\rho。$$

当 $|\xi|=\rho\to\infty$ 时，则有

$$\begin{aligned}f(z)-z=&\lim_{\rho\to\infty}\left[\int_{|\xi|=\rho}\left[\left(f(\xi)-\xi\right)/(\xi-z)\right]\mathrm{d}\xi/(2\pi i)-\iint_{|\xi|<\rho}\left[f_{\bar{\xi}}(\xi)/(\xi-z)\right]\mathrm{d}\sigma/\pi\right]=\\&\lim_{\rho\to\infty}\left\{\int_{|\xi|=\rho}\Big(a_0/(\xi-z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n/\left((\xi-z)^2\xi^n\right)\right]+\right.\\&\left.\sum_{n=1}^{\infty}\bar{b}_n/\left[(\xi-z)^2\bar{\xi}^n\right]\Big)\mathrm{d}\xi/(2\pi i)-\iint_{|\xi|<\rho}f_{\bar{\xi}}(\xi)/(\xi-z)\mathrm{d}\sigma/\pi\right\}=\\&a_0-\iint_C f_{\bar{\xi}}(\xi)/(\xi-z)\mathrm{d}\sigma/\pi。\end{aligned}\tag{9}$$

对式（9）关于 z 求导，可得 $f_z(z)-1=-\iint_C f_{\bar{\xi}}(\xi)/(\xi-z)^2\mathrm{d}\sigma/\pi:=Hf_{\bar{z}}(z)$ 几乎处处成立，其中 H 表示二维 Hilbert 变换。因为 Hilbert 变换在 L^2 中等距[4,17]，即 $\iint_C|f_{\bar{z}}(z)|^2\mathrm{d}\sigma=\iint_C|Hf_{\bar{z}}(z)|^2\mathrm{d}\sigma$，所以，

$$\iint_{\Delta}|f_z(z)|^2\mathrm{d}\sigma/\pi=\iint_{\Delta^*}|f_z(z)-1|^2\mathrm{d}\sigma/\pi+\iint_{\Delta}|f_z(z)-1|^2\mathrm{d}\sigma/\pi-\iint_{\Delta^*}|f_z(z)|^2\mathrm{d}\sigma/\pi\geqslant$$
$$\iint_{\Delta^*}|f_z(z)-1|^2\mathrm{d}\sigma/\pi-\iint_{\Delta^*}|f_z(z)|^2\mathrm{d}\sigma/\pi=$$
$$\int_1^{\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[n(|a_n|^2-|b_n|^2)r^{-2(n+1)}]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r/\pi=\sum_{n=1}^{\infty}(n(|a_n|^2-|b_n|^2)),\ z=re^{i\theta}\in\Delta^*。\quad(10)$$

将式（8）代入式（10）可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n(|a_n|^2-|b_n|^2))\leqslant k^2。\quad(11)$$

2）$A\neq 0$。不妨假设 $A>0$，否则只需考虑 $H=\mathrm{e}^{i\theta}f$，其中 $\theta=\pi-\arg A$ 为某个常数，使得 $H=\mathrm{e}^{i\theta}(z+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nz^{-n})+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{b_nz^{-n}})+A\mathrm{e}^{i\theta}\log|z|$，此时 $A\mathrm{e}^{i\theta}>0$。因此，令 $F(z)=f(z)-A\log|z|$，$z\in\Delta^*$，则有 $F_z=f_z-(A/2)\cdot(1/z)$，$F_{\bar z}=f_{\bar z}-(A/2)\cdot(1/\bar z)$。因为

$$|F_z|^2-|F_{\bar z}|^2=|f_z-(A/2)\cdot(1/z)|^2-|f_{\bar z}-(A/2)\cdot(1/\bar z)|^2=$$
$$\{|z|^2(|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2)-\mathrm{Re}[(zf_z-zf_{\bar z})\bar A]\}/|z|^2。$$

由 f 满足式（6）可得 $|F_{\bar z}|<|F_z|$，从而 $F(z)$ 在 Δ^* 上保向。

接下来将证明 $F(z)$ 在 Δ^* 上单叶，即对 Δ^* 内任意两点 z_1,z_2 且 $z_1\neq z_2$，验证 $F(z_1)\neq F(z_2)$。当 $|z_1|=|z_2|$ 时，$F(z_1)-F(z_2)=f(z_1)-f(z_2)\neq 0$，从而 $F(z)$ 在 Δ^* 上单叶；当 $|z_1|\neq|z_2|$ 时，不妨设 $\arg z_1=\arg z_2$ 且 $|z_1|<|z_2|$（否则，若 $\arg z_1\neq\arg z_2$，则考虑用 $\mathrm{e}^{i\theta}z_1$ 代替 z_1，使之满足 $\arg\mathrm{e}^{i\theta}z_1=\arg z_2$，其中 θ 是某个常数）。由于

$$|F(z_1)-F(z_2)|=\left|\int_{\gamma}F_z\mathrm{d}z+F_{\bar z}\mathrm{d}\bar z\right|\geqslant\int_{|z_1|}^{|z_2|}(|F_z|-|F_{\bar z}|)|\mathrm{d}z|>0,$$

其中 γ 是 Δ^* 内连接 z_1,z_2 的可求长曲线，所以 $F(z)$ 也在 Δ^* 上单叶。令

$$g(z)=\begin{cases}f^*(z), & z\in\Delta,\\ F(z), & z\in\Delta^*,\end{cases}$$

其中 f^* 是 f 在 Δ 上的拟共形延拓，则 g 可拟共形延拓到复平面 C 且复特征满足 $|\omega(z)|\leqslant k$。基于 $A=0$ 情形的证明可知，f 的系数也满足式（11）。

最后说明等号取等的条件。若 f 定义如式（7），则 $b_n=0,n=1,2\cdots$ 且 $a_n=0,n=2,3\cdots$，此时 f 在 Δ^* 内 1-拟共形，在 Δ 内 K- 拟共形，这里，$k=|a_1|=(K-1)/(K+1)<1$，即式（11）显然成立。

另一方面，式（10）中等号成立仅当 $f_z(z)\equiv 1$ 在 Δ 内几乎处处成立，从而 $f_{\bar z}(z)\equiv\mu$。由文献［4］知，μ 是［0,1）内常数。因此，f 具有式（7）的表示式。故定理 3 得证。

注 2 当 $A=0$ 且 $b_n=0$，$n=1,2,\cdots$，即当 $f_{\bar z}(z)\equiv 0$ 且 $f\in\Sigma$ 时，式（6）恒成立。因此，定理 3 是定理 2 的推广。

例 1 函数 $f(z)=z+a_1/z+A\lg|z|$，其中 $|a_1|<1$ 满足式（6）。

事实上，因为当 $|a_1|<1$ 时，$f_1(z)=z+a_1/z$ 在 Δ^* 内单叶。由定理 3 的证明知，$f(z)$ 在 Δ^* 内单叶。因为 $f_z=1-a_1/z^2+A/(2z)$，$f_{\bar z}=A/(2\bar z)$，则有

$$|z|^2(|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2)-\mathrm{Re}\{(zf_z-\bar zf_{\bar z})\bar A\}=|z|^2\{1+|a_1^2/z^4|+2\mathrm{Re}[A(1-a_1/z^2)/(2\bar z)-a_1/z^2]\}-$$
$$\mathrm{Re}\{(z-a_1/z)\bar A\}=|z|^2+|a_1|^2/|z|^4-2\mathrm{Re}(\bar za_1/z)\geqslant|z|^2+|a_1|^2/|z|^4-2|a_1|=$$
$$(|z|-|a_1|/|z|^2)^2>0$$

对所有 $z\in\Delta^*$ 都成立。

［参考文献］

［1］BHOWMIK B，SATPATI G，SUGAWA T. Quasiconformal extension of meromorphic functions with nonzero pole［J］.

Proc Amer Math Soc，2016，144(6)：2593-2601.

[2] DUREN P L. Univalent function [M]. New York：Springer-Verlag，1983.

[3] GRONWALL T. Some remarks on conformal representation [J]. Ann Math，1914，16(1)：72-76.

[4] LEHTO O. Schlicht functions with a quasiconformal extension [J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A I，1971，500：1-10.

[5] WEI H. On the uniqueness problem of harmonic quasiconformal mappings [J]. Proc Amer Math Soc，1996，124(8)：2337-2341.

[6] YAO G. ∂-energy integral and uniqueness of harmonic maps [J]. Math Nachr，2005，278(9)：1086-1096.

[7] HENGARTNER W，SCHOBER G. Univalent harmonic functions [J]. Trans Amer Math Soc，1987，299(1)：1-31.

[8] CHUAQUI M. Quasiconformal extensions of harmonic mappings [J]. J Geom Anal，2021，31(5)：5108-5130.

[9] KALAJ D，PAVLOVIC M. On quasiconformal self-mappings of the unit disk satisfying Poisson's equation [J]. Trans Amer Math Soc，2011，363(8)：4043-4061.

[10] MATELJEVIC M，SVETLIK M. Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mappings [J]. Appl Anal Discr Math，2020，14(1)：150-168.

[11] CHEN S L，PONNUSAMY S，WANG X T. On planar harmonic Lipschitz and planar harmonic Hardy classes [J]. Ann Acad Sci Fenn Math，2011，36：567-576.

[12] 胡春英，黄心中. 单叶调和函数及其反函数为调和拟共形的充要条件 [J]. 华侨大学学报（自然科学版），2010，31(5)：586-589.

[13] 胡春英，黄心中. 非平凡双向单叶调和映照的微分方程 [J]. 华侨大学学报（自然科学版），2012，33(1)：107-111.

[14] 张兆功，刘礼泉. 单叶调和映照的反函数 [J]. 数学进展，1996，25(3)：270-276.

[15] 朱剑峰，黄心中. 两类调和函数的拟共形性质 [J]. 华侨大学学报（自然科学版），2011，32(6)：705-709.

[16] JAHANGIRI J M，SILVERMAN H. Meromorphic univalent harmonic functions with negative coefficients [J]. Bull Korean Math Soc，1999，36(4)：763-770.

[17] GUMENYUK P，HOTTA I. Univalent functions with quasiconformal extensions：Becker's class and estimates of the third coefficient [J]. Proc Amer Math Soc，2020，148(9)：3927-3942.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）