第27卷 第4期 集美大学学报（自然科学版） Vol. 27 No. 4
2022年7月 Journal of Jimei University (Natural Science) Jul. 2022

[文章编号] 1007－7405(2022)04－0359－06 DOI:10.19715/j.jmuzr.2022.04.10

完全分裂图的临界理想

李晓琳，王洪波，陈海燕

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 一个图 G 的 k-阶临界理想是由它的广义拉普拉斯矩阵的所有 k-阶子式生成的理想，可被看作是图 G 的邻接特征多项式和拉普拉斯特征多项式的推广。临界理想与图的许多指标密切相关。利用线性代数的方法，得到完全分裂图的临界理想的具体表达式，然后利用此表达式完全确定其临界群的结构。

[关键词] 广义拉普拉斯矩阵；完全分裂图；临界理想；临界群

[中图分类号] O 157.1

Critical Ideals of the Complete Split Graph

LI Xiaolin, WANG Hongbo, CHEN Haiyan

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The k-order critical ideal of a graph G is an ideal generated by all minors of size k of its generalized Laplacian matrix, which is considered as the generalization of the characteristic polynomials of its adjacency matrix and Laplacian matrix. The critical ideal was closely connected to many graph indices. In this paper, explicit expressions for critical ideals of a complete split graph were obtained by using linear algebra method. Furthermore, based on these expressions, the structure of the critical group of the complete split graph was determined.

Keywords: generalized Laplacian matrix; complete split graph; critical ideal; critical group

0 引言

令 $G=(V,E)$ 是 n 个顶点的连通图，m_{ij} 表示顶点 v_i 和 v_j 之间连边的数目，图 G 的广义拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}(G,X_G)$ 定义为 $\boldsymbol{L}(G,X_G)_{ij}=\begin{cases}x_i, & i=j,\\ -m_{ij}, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 $X_G=\{x_i \mid v_i\in V(G)\}$ 是对应 G 中顶点的未定元集。当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时，G 的 k-阶临界理想定义为

$$I_k(G,X_G)=(\{\det \boldsymbol{M} \mid \boldsymbol{M}\text{ 为 }\boldsymbol{L}(G,X_G)\text{ 的 }k\text{-阶子矩阵}\})\subset Z[X_G], \tag{1}$$

其中 $Z[X_G]$ 表示整数环上的多项式环，即一个图 G 的 k-阶临界理想就是由它的广义拉普拉斯矩阵的所有 k-阶子式生成的理想。平凡理想记为式（1）。

临界理想作为图临界群的推广是由文献［1］首先提出的，它也被看作是图的邻接特征多项式和拉普拉斯特征多项式的推广。随后人们发现，临界理想与图 G 的其他很多性质密切相关，如零迫数、团数等[2-4]。众所周知，确定一类图临界群的结构是比较困难的，作为临界群的推广，确定图的临界理想显得更为困难。到目前为止，只有完全图、路、圈、树、完全多部图等几类非常特殊图类的临界

[收稿日期] 2021－07－18
[基金项目] 国家自然科学基金项目（11771181，12071180）
[作者简介] 李晓琳（1996—），女，硕士生，从事图论方向研究。通信作者：王洪波（1973—），男，讲师，从事组合图论研究。E-mail:hxlabb@126.com

理想得到了研究[1,5-6]，研究的方法基本上是组合方法。本文将利用线性代数的方法研究完全分裂图的临界理想。下面首先给出它的定义。

设图 H_1 与图 H_2 是两个顶点不交的图，$G = H_1 \vee H_2$ 是 H_1 与 H_2 的联图，即 $V(G) = V(H_1) \cup V(H_2)$，$E(G) = E(H_1) \cup E(H_2) \cup \{uv \mid u \in V(H_1), v \in V(H_2)\}$。令 K_m 表示 m 个顶点的完全图，$\overline{K_n}$ 表示 n 个顶点的空图，则 $\overline{K_n} \vee K_m$ 称为完全分裂图，记为 $S_{n,m}$，如图 1 的完全分裂图 $S_{4,5}$。

文献［7］研究了完全分裂图上沙堆模型的所有常返构型和其他各种组合对象之间的关系。本文首先用代数方法得到完全分裂图临界理想的一个具体表达式，然后应用此表达式完全确定了其临界群的结构。

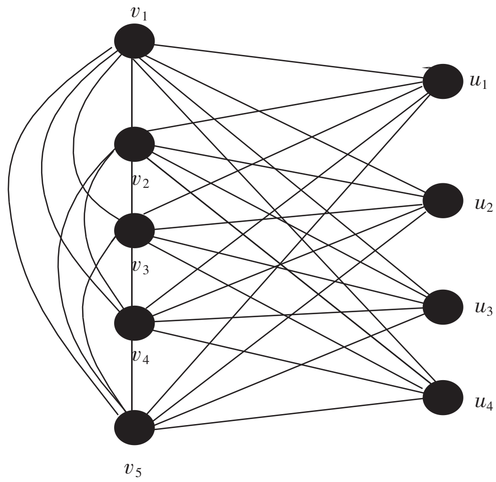

图 1 完全分裂图 $S_{4,5}$

Fig.1 The complete split graph $S_{4,5}$

1 完全分裂图的临界理想

给定一个完全分裂图 $S_{n,m}(n,m \geqslant 2)$，由定义 $V(S_{n,m}) = V(\overline{K_n}) \cup V(K_m)$，设 $U = V(\overline{K_n}) = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 为对应的未定元集，$V = V(K_m) = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$，对应未定元集为 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，则 $S_{n,m} = \overline{K_n} \vee K_m$ 的广义拉普拉斯矩阵为

$$\boldsymbol{L}(S_{n,m};Y,X) = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & y_2 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & y_3 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_n & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & x_1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & x_2 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{L}(\overline{K_n},Y) & -\boldsymbol{J}_{n\times m} \\ -\boldsymbol{J}_{m\times n} & \boldsymbol{L}(K_m,X) \end{pmatrix},$$

其中：$\boldsymbol{L}(\overline{K_n},Y)$ 是空图 $\overline{K_n}$ 的广义拉普拉斯矩阵；$\boldsymbol{L}(K_m,X)$ 是完全图 K_m 的广义拉普拉斯矩阵；$\boldsymbol{J}_{s\times t}$ 为全 1 矩阵。

设 $\boldsymbol{M}$ 是 $\boldsymbol{L}(S_{n,m};Y,X)$ 的任意一个 k-阶子矩阵（$1 \leqslant k \leqslant n+m$）。令 $R = R_1 \cup R_2$、$C = C_1 \cup C_2$ 分别表示它的行指标和列指标集，其中，$R_1 = R \cap U$，$C_1 = C \cap U$，$R_2 = R \cap V$，$C_2 = C \cap V$。首先注意到，当 $|R_i \setminus C_i| \geqslant 2 (i = 1,2)$ 时，$\boldsymbol{M}$ 中至少有两行元素相同，所以 $\det(\boldsymbol{M}) = 0$。因此，计算完全分裂图 $S_{n,m}$ 的 k-临界理想 $I_k(S_{n,m};Y,X) = (\{\det \boldsymbol{M} \mid \boldsymbol{M}$ 为 $\boldsymbol{L}(S_{n,m};Y,X)$ 的 k-阶子矩阵$\}) = (\{\det \boldsymbol{M} \neq 0 \mid \boldsymbol{M}$ 为 $\boldsymbol{L}(S_{n,m};Y,X)$ 的 k-阶子矩阵$\})$，只需考虑 $|R_i \setminus C_i| \leqslant 1$、$|C_i \setminus R_i| \leqslant 1 (i = 1,2)$ 的情形。为清楚起见，令 $r_i = |R_i|$，$c_i = |C_i|$，$i = 1,2$，则 $\boldsymbol{M}$ 有如下的分块形式：

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{r_1\times c_1} & -\boldsymbol{J}_{r_1\times c_2} \\ -\boldsymbol{J}_{r_2\times c_1} & \boldsymbol{Q}_{r_2\times c_2} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中：$\boldsymbol{P}_{r_1\times c_1}$ 是 $\boldsymbol{L}(\overline{K_n},Y)$ 的子矩阵；$\boldsymbol{Q}_{r_2\times c_2}$ 是 $\boldsymbol{L}(K_m,X)$ 的子矩阵。

注意到，式（2）中 $r_1 + r_2 = c_1 + c_2 = k$ 且 $|r_i - c_i| \leqslant 1$，$i = 1, 2$。所以只有 3 种可能：1）$r_1 = c_1 (r_2 = c_2)$；2）$r_1 = c_1 + 1 (r_2 = c_2 - 1)$；3）$r_1 = c_1 - 1 (r_2 = c_2 + 1)$。

为简单起见，下面省略矩阵的下标，令 $\boldsymbol{j}=(1,1,\cdots,1)$ 表示全 1 行向量，$\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}$ 表示它的转置，则对矩阵 $\boldsymbol{M}$，有如下结论。

引理 1[2]　设 $\boldsymbol{M}$ 是式（2）中的矩阵，则

$$\det(\boldsymbol{M})=\begin{cases}\det(\boldsymbol{P})\cdot\det(\boldsymbol{Q})-\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{j} & 0\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{j}\\ -\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}, & r_1=c_1,\\ \det(\boldsymbol{P}\quad \boldsymbol{j}^{\mathrm{T}})\cdot\det\begin{pmatrix}-\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}, & r_1=c_1+1,\\ \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{j}\end{pmatrix}\cdot\det(-\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{Q}), & c_1=r_1+1。\end{cases}$$

为了给出 $\det(\boldsymbol{M})$ 的具体表达式，根据指标集 R_i、C_i 的选取，把 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Q})$ 分为 4 类：1）类型 b，$R_1=C_1(R_2=C_2)$，对应的矩阵记作 $\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{Q}_b)$；2）类型 u，$|R_1\setminus C_1|=|C_1\setminus R_1|=1(|R_2\setminus C_2|=|C_2\setminus R_2|=1)$，对应的矩阵记作 $\boldsymbol{P}_u(\boldsymbol{Q}_u)$；3）类型 r，$C_1\subset R_1$，$|R_1\setminus C_1|=1(C_2\subset R_2,|R_2\setminus C_2|=1)$，对应的矩阵记作 $\boldsymbol{P}_r(\boldsymbol{Q}_r)$；4）类型 c，$R_1\subset C_1$，$|C_1\setminus R_1|=1(R_2\subset C_2,|C_2\setminus R_2|=1)$，对应的矩阵记作 $\boldsymbol{P}_c(\boldsymbol{Q}_c)$。

下面分别计算出不同类型引理 1 中出现的行列式的值。很显然，$\boldsymbol{P}_c=\boldsymbol{P}_r^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}_c=\boldsymbol{Q}_r^{\mathrm{T}}$，所以只需给出前面 3 类对应子式的值。每种类型只需计算一个，其他都可由对称性得到。不失一般性，给定下面的指标集：类型 b，$R_1=C_1=\{u_1,u_2,\cdots,u_{r_1}\}(R_2=C_2=\{v_1,v_2,\cdots,v_{r_2}\})$；类型 u 或 r，$R_1\cap C_1=\{u_1,u_2,\cdots,u_{r_1-1}\}(R_2\cap C_2=\{v_1,v_2,\cdots,v_{r_2-1}\})$。

对上面给定的指标集，有 $\boldsymbol{P}_b=\begin{pmatrix}y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & y_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & y_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{r_1}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}_b=\begin{pmatrix}x_1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & x_2 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & x_{r_2}\end{pmatrix}$。所以，

$$\det(\boldsymbol{P}_b)=\prod_{i=1}^{r_1}y_i,\ \det(\boldsymbol{Q}_b)=\prod_{j=1}^{r_2}(x_j+1)(1-\sum_{j=1}^{r_2}(1/(x_j+1)))。\tag{3}$$

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_b & \boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{j} & 0\end{pmatrix}=-\prod_{i=1}^{r_1}y_i\sum_{i=1}^{r_1}(1/y_i)。\tag{4}$$

$$\det\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{j}\\ -\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}_b\end{pmatrix}=-\prod_{j=1}^{r_2}(x_j+1)\sum_{j=1}^{r_2}(1/(x_j+1))。\tag{5}$$

$$\boldsymbol{P}_u=\begin{pmatrix}y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & y_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & y_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{r_1-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},\tag{6}$$

$$\boldsymbol{Q}_u=\begin{pmatrix}x_1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ -1 & x_2 & \cdots & -1 & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & x_{r_2-1} & -1\\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1\end{pmatrix}。\tag{7}$$

所以，

$$\det(\boldsymbol{P}_u)=0,\ \det\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{j}\\ -\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}_u\end{pmatrix}=\det(\boldsymbol{Q}_u)=\prod_{j=1}^{r_2-1}(x_j+1)。\tag{8}$$

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_u & \boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{j} & 0\end{pmatrix}=\prod_{i=1}^{r_1-1}y_i。\tag{9}$$

$$\boldsymbol{P}_r=\begin{pmatrix}y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & y_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & y_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{r_1-1}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}_{r_1\times(r_1-1)},\tag{10}$$

$$\boldsymbol{Q}_r=\begin{pmatrix}x_1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & x_2 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & -1 & x_3 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & -1 & \cdots & x_{r_2-1}\\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1\end{pmatrix}_{r_2\times(r_2-1)},\tag{11}$$

$$\det(\boldsymbol{P}_r\quad \boldsymbol{j}^{\mathrm{T}})=\prod_{i=1}^{r_1-1}y_i,\tag{12}$$

$$\det(-\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{Q}_r)=(-1)^{r_2}\prod_{j=1}^{r_2-1}(x_j+1)。\tag{13}$$

设 $\boldsymbol{M}$ 是式（2）中的矩阵，则根据其中 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 类型，$\boldsymbol{M}$ 可分为 (b,b)，(b,u)，(u,b)，(u,u)，$(r,c)((c,r))$。

引理2 设 $\boldsymbol{M}$ 是式（2）中的矩阵，$R=R_1\cup R_2$ 是它的行指标集，$C=C_1\cup C_2$ 是它的列指标集，1）当 $\boldsymbol{M}$ 是类型 (b,b) 时，$\det\boldsymbol{M}(b,b)=\prod_{i\in R_1}y_i\prod_{j\in R_2}(x_j+1)(1-\sum_{j\in R_2}(1/(r_j+1))-\sum_{i\in R_1}(1/y_j)\sum_{j\in R_2}(1/(x_j+1))$；2）当 $\boldsymbol{M}$ 是类型 (b,u) 时，$\det\boldsymbol{M}(b,u)=-\prod_{i\in R_1}y_i\prod_{j\in R_2\cap C_2}[(x_j+1)(1+\sum_{i\in R_1}(1/y_i)]$；3）当 $\boldsymbol{M}$ 是类型 (u,b) 时，$\det\boldsymbol{M}(u,b)=-\prod_{i\in R_1\cap C_1}y_i\prod_{j\in R_2}(x_j+1)\sum_{j\in R_2}(1/(x_j+1))$；4）当 $\boldsymbol{M}$ 是类型 (u,u) 时，$\det\boldsymbol{M}(u,u)=-\prod_{i\in R_1\cap C_1}y_i\prod_{j\in R_2\cap C_2}(x_j+1)$；5）当 $\boldsymbol{M}$ 是类型 (r,c) 时，$\det\boldsymbol{M}(r,c)=(-1)^{r_2}\times\prod_{i\in R_1\cap C_1}y_i\prod_{j\in R_2\cap C_2}(x_j+1)$。

证明 1）当 $\boldsymbol{M}$ 是类型 (b,b) 时，$r_1=c_1$。由引理1和式（3）~式（5）得，$\det\boldsymbol{M}=\det(\boldsymbol{P}_b)\cdot\det(\boldsymbol{Q}_b)-\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_b & \boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{j} & 0\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{j}\\ -\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}_b\end{pmatrix}=-\prod_{i\in R_1}y_i\prod_{j\in R_2}(x_j+1)(1-\sum_{j\in R_2}(1/(x_j+1))-\sum_{i\in R_1}(1/y_i)\times\sum_{j\in R_2}(1/(x_j+1))$。

2）当 $\boldsymbol{M}$ 是类型 (b,u) 时，$r_1=c_1$。由引理1、式（3）~式（4）、式（8）得，$\det\boldsymbol{M}=\det(\boldsymbol{P}_b)\cdot\det(\boldsymbol{Q}_u)-\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_b & \boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{j} & 0\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{j}\\ -\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}_u\end{pmatrix}=-\prod_{i\in R_1}y_i\prod_{j\in R_2\cap C_2}[(x_j+1)(1+\sum_{i\in R_1}(1/y_i))]$。

3）当 $\boldsymbol{M}$ 是类型 (u,b) 时，$r_1=c_1$。由引理1和式（3）、式（5）~式(9) 得，$\det\boldsymbol{M}=\det(\boldsymbol{P}_u)\cdot$

$\det(\boldsymbol{Q}_b) - \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_u & \boldsymbol{j}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{j} & 0 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{j} \\ -\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}_b \end{pmatrix} = -\prod_{i \in R_1 \cap C_1} y_i \prod_{j \in R_2} (x_j + 1) \sum_{j \in R_2} (1/(x_j + 1))$。

4）当 $\boldsymbol{M}$ 是类型 (u,u) 时，$r_1 = c_1$。由引理 1 和式（8）~式（9）得，$\det \boldsymbol{M} = \det(\boldsymbol{P}_u) \cdot \det(\boldsymbol{Q}_u) - \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_u & \boldsymbol{j}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{j} & 0 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{j} \\ -\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}_u \end{pmatrix} = -\prod_{i \in R_1 \cap C_1} y_i \prod_{j \in R_2 \cap C_2} (x_j + 1)$。

5）当 $\boldsymbol{M}$ 是类型 (r,c) 时，$r_1 = c_1 + 1$。由引理 1 和式（12）~式（13）得，$\det \boldsymbol{M} = \det(\boldsymbol{P}_r \quad \boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}) \cdot \det\begin{pmatrix} -\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{Q}_c \end{pmatrix} = (-1)^{r_2} \prod_{i \in R_1 \cap C_1} y_i \prod_{j \in R_2 \cap C_2} (x_j + 1)$。

为了方便叙述，引进下面的记号。对任意的整数 k，定义集合 $T_{y,k} = \{y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_k}, 0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n\}, 0 < k \leqslant n$；$T_{x,k} = \{(x_{i_1}+1)(x_{i_2}+1)\cdots(x_{i_k}+1), 0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant m\}, 0 < k \leqslant m$；$H_{y,k} = \{y_{i_1}, \cdots, y_{i_k}(1/y_{i_1} + \cdots + 1/y_{i_k}), 0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n\}, 0 < k \leqslant n$；$H_{x,k} = \{(x_{i_1}+1)\cdots(x_{i_k}+1)(1/(x_{i_1}+1) + \cdots + 1/(x_{i_k}+1), 0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant m\}, 0 < k \leqslant m$。当 $k < 0$ 时，令 $T_{x,k} = T_{x,k} = H_{y,k} = H_{x,k} = \{0\}$，且令 $T_{x,0} = T_{x,0} = H_{y,0} = H_{x,0} = \{1\}$。

为简单起见，下面用一些关于 T 和 H 代数表达式。两个集合的乘积是指它们指标集的卡氏积，而集合相加是指具有相同指标集的两两相加。

下面给出本文的主要结果。

定理 1 对完全分裂图 $S_{n,m}(n,m \geqslant 2)$，其 k-阶临界理想为

$$I_k(S_{n,m};Y,X) = \begin{cases} (1), & 1 \leqslant k \leqslant 2, \\ (T_{y,s}T_{x,t}, s + t = k - 2, s \leqslant n - 2, t \leqslant m - 2; (T_{y,n} + H_{y,n})T_{x,k-n-1}, T_{y,k-m-1}H_{x,m}), & 3 \leqslant k \leqslant n + m - 2, \\ (T_{y,n-1}T_{x,m-1}, T_{y,n-2}H_{x,m}, (T_{y,n} + H_{y,n})T_{x,m-2}), & k = n + m - 1, \\ (T_{y,n}T_{x,m} - (T_{y,n} + H_{y,n})H_{x,m}), & k = n + m。\end{cases}$$

证明 当 $k = 1$，2 时，很容易看出 $I_k(S_{n,m};Y,X) = (1)$。当 $k = n + m$ 时，由引理 2 的 1）知，$I_{n+m}(S_{n,m};Y,X) = (\det(\boldsymbol{L}(S_{n,m};Y,X))) = (\prod_{i=1}^{n} y_i \prod_{j=1}^{m} (x_j + 1)(1 - \sum_{j=1}^{m} (1/(x_j + 1)) - \sum_{i=1}^{n} (1/y_i) \sum_{j=1}^{m} (1/(x_j + 1)))) = (T_{y,n}T_{x,m} - (T_{y,n} + H_{y,n})H_{x,m})$。

下面考虑 $3 \leqslant k \leqslant n + m - 1$ 的情形。首先指出下面的事实，对任意的 $s \leqslant s'$，$t \leqslant t'$，有

$$\begin{cases} (T_{y,s'}T_{x,t'}) \subseteq (T_{y,s}T_{x,t}), (T_{y,s'}H_{x,t'+1}) \subseteq (T_{y,s}T_{x,t}), \\ (H_{y,s'+1}T_{x,t'}) \subseteq (T_{y,s}T_{x,t}), (H_{y,s'+1}H_{x,t'+1}) \subseteq (T_{y,s}T_{x,t})。\end{cases} \tag{14}$$

1）当 $3 \leqslant k \leqslant n + m - 2$ 时，令 $\mathscr{M}(u,u)$ 表示 $\boldsymbol{L}(S_{n,m};Y,X)$ 所有 k-阶 (u,u) 型子式构成集合，则由引理 2 得，$\mathscr{M}(u,u) = \{T_{y,s}T_{x,t}, s + t = k - 2, s \leqslant n - 2, t \leqslant m - 2\}$。同理可得，$\mathscr{M}(b,b) = \{T_{y,s}T_{x,t} - (T_{y,s} + H_{y,s})H_{x,t}, s + t = k, s \leqslant n, t \leqslant m\}$；$\mathscr{M}(b,u) = \{(T_{y,s} + H_{y,s})T_{x,t}, s + t = k - 1, s \leqslant n, t \leqslant m - 2\}$；$\mathscr{M}(u,b) = \{T_{y,s}H_{x,t}, s + t = k - 1, s \leqslant n - 2, t \leqslant m\}$；$\mathscr{M}(r,c) = \mathscr{M}(c,r) = \{T_{y,s}T_{x,t}, s + t = k - 1, s \leqslant n - 1, t \leqslant m - 1\}$。由式（14）得，$\mathscr{M}(b,b)$ 和 $\mathscr{M}(r,c)$ 中的每一个元素都可由 $\mathscr{M}(u,u)$ 中的元素生成，而 $\mathscr{M}(b,u)$ 中除了 $(T_{y,n} + H_{y,n})T_{x,k-n-1}$，$\mathscr{M}(u,b)$ 中除了 $T_{y,k-m-1}H_{x,m}$，其他元素都可由 $\mathscr{M}(u,u)$ 中的元素生成，所以，$I_k(S_{n,m};Y,X) = (T_{y,s}T_{x,t}, s + t = k - 2, s \leqslant n - 2, t \leqslant m - 2; (T_{y,n} + H_{y,n})T_{x,k-n-1}, T_{y,k-m-1}H_{x,m})$。

2）当 $k = n + m - 1$ 时，此时 $\mathscr{M}(u,u) = \varnothing$，$\mathscr{M}(b,b) = \{T_{y,n}T_{x,m-1} - (T_{y,n} + H_{y,n})H_{x,m-1}, T_{y,n-1}T_{x,m} - (T_{y,n-1} + H_{y,n-1})H_{x,m}\}$；$\mathscr{M}(b,u) = \{(T_{y,n} + H_{y,n})T_{x,m-2}\}$；$\mathscr{M}(u,b) = \{T_{y,n-2}H_{x,m}\}$；$\mathscr{M}(r,c) = \mathscr{M}(c,r) = \{T_{y,n-1}T_{x,m-1}\}$。同样由式（14）得，$I_{n+m-1}(S_{n,m};Y,X) = (T_{y,n-1}T_{x,m-1}, T_{y,n-2}H_{x,m}, (T_{y,n} + H_{y,n})T_{x,m-2})$。

2　完全分裂图的临界群

首先给出临界群的定义，详见文献［8］。设 G 是一个 n 个顶点的连通图，$\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{L}(G,X_G)|_{X_G=D}$ 是它的拉普拉斯矩阵，这里 $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$ 是图 G 的顶点度集合。令

$$f_k=\Delta_k/\Delta_{k-1},\qquad k=1,2,\cdots,n,\tag{15}$$

它表示 $\boldsymbol{L}(G)$ 的不变因子，其中 Δ_k 表示 $\boldsymbol{L}(G)$ 的 k-阶行列式因子，即所有 k-阶子式的最大公因子，约定 $\Delta_0=1$。则 G 的临界群 $K(G)=\oplus_{k=1}^{n-1}Z_{f_k}$，其中 Z_{f_k} 表示 f_k 阶循环加群。很显然 $\Delta_k=\gcd I_k(\boldsymbol{L}(G,X_G)|_{X_G=D})$，这里 $\gcd(A)$ 表示集合 A 中所有元素的最大公因子。所以由定理 1 可以得到完全分裂图的临界群结构。

定理 2　对完全分裂图 $S_{n,m}(n,m\geqslant 2)$，则

$$K(S_{n,m})=\begin{cases}Z_a^{m-2}\oplus Z_m^{n-m}\oplus Z_{m(n+m)/a}^{m-2}\oplus Z_{m(n+m)}, & m\leqslant n,\\ Z_a^{n-2}\oplus Z_{n+m}^{m-n}\oplus Z_{m(n+m)/a}^{n-2}\oplus Z_{m(n+m)}, & m>n。\end{cases}$$

其中 $a=\gcd(n,m)$。

证明　由完全分裂图 $S_{n,m}$ 的定义，它的度集合 $D=\{m,\cdots,m;m+n-1,\cdots,m+n-1\}$，所以，$T_{y,s}|_D=\{m^s\}$，$T_{x,s}|_D=\{(m+n)^s\}$，$H_{y,s}|_D=\{sm^{s-1}\}$，$H_{x,s}|_D=\{s(m+n)^{s-1}\}$。

由定理 1 可得 $\Delta_1=\Delta_2=1$，$\Delta_{n+m-1}=m^{n-1}(n+m)^{m-1}$。对 $3\leqslant k\leqslant n+m-2$，不妨设 $n\geqslant m$，计算可得 Δ_k，

$$\Delta_k=\begin{cases}\gcd(m,n+m)^{k-2}, & 3\leqslant k\leqslant m,\\ \gcd(m,n+m)^{m-2}m^{k-m}, & m+1\leqslant k\leqslant n,\\ \gcd(m,n+m)^{n+m-k-2}m^{k-m}(n+m)^{k-n}, & n+1\leqslant k\leqslant n+m-2。\end{cases}$$

由式（15）可得，$f_3=f_4=\cdots=f_m=\gcd(m,n+m)=a$，$f_{m+1}=\cdots=f_n=m$，$f_{n+1}=\cdots=f_{n+m-2}=m(n+m)/\gcd(m,n+m)=m(n+m)/a$，$f_{n+m-1}=m(n+m)$。结果得证。同理可证 $m>n$ 的情况。

令 $\mu(G)$ 表示临界群 $K(G)$ 最小生成元的个数，则由定理 2 可得下面的推论 1。

推论 1　对完全分裂图 $S_{n,m}(n,m\geqslant 2)$，则

$$\mu(S_{n,m})=\begin{cases}\max\{m,n\}-1, & \gcd(m,n)=1,\\ n+m-3, & \gcd(m,n)\neq 1。\end{cases}$$

［参考文献］

［1］CORRALES H，VALENCIA C E. On the critical ideals of graphs［J］. Linear Algebra and Its Applications，2013，439(12)：3870-3892. DOI：10.1016/j.laa.2013.10.011.

［2］ALFARO C A，CORRALES H，VALENCIA C E. Critical ideals of signed graphs with twin vertices［J］. Advances in Applied Mathematics，2017，86：99-131. DOI：10.1016/j.aam.2017.01.005.

［3］ALFARO C A，LIN J C H. Critical ideals，minimum rank and zero forcing number［J］. Applied Mathematics and Computation，2019，358：305-313. DOI：10.1016/j.amc.2019.04.043.

［4］ALFARO C A，VALENCIA C E. Graphs with few trivial critical ideals［J］. Electronic Notes in Discrete Mathematics，2015，50：391-396. DOI：10.1016/j.endm.2015.07.065.

［5］CORRALES H. Critical ideals of graphs［D］. Mexico：Center of Research and Advanced Studies of the National Polytechnic Institute，Department of Mathematics，2014.

［6］GAO Y B. On the critical ideals of complete multipartite graphs［J］. Electronic Journal of Linear Algebra Ela，2020，36(36)：94-105. DOI：10.13001/ela.2020.5123.

［7］DUKES M. The sandpile model on the complete split graph，Motzkin words，and tiered parking functions［J］. Journal of Combinatorial Theory Series A，2021，180(1)：105418. DOI：10.1016/j.jcta.2021.105418.

［8］CORRY S，PERKINSON D. Divisors and sandpiles［M］. Appleton，Wisconsin：Lawrence University，2018：19-39.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）