第 27 卷 第 6 期
2022 年 11 月
集美大学学报（自然科学版）
Journal of Jimei University(Natural Science)
Vol. 27 No. 6
Nov. 2022

[文章编号] 1007 - 7405(2022)06 - 0553 - 06 DOI:10.19715/j.jmuzr.2022.06.10

博饼游戏中骰子投掷次数的概率分布与数学期望

储理才

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[**摘要**] 用马尔可夫链的方法研究博饼游戏中骰子投掷次数的概率分布和数学期望，得到它们的精确值。且通过数值拟合发现，骰子投掷次数近似服从对数正态分布。

[**关键词**] 马尔可夫链；博饼；骰子；投掷次数；概率分布；数学期望

[**中图分类号**] O 211.6

Probability Distribution and Mathematical Expectation of the Number of Dice Rolls in Moon Cake Gambling Game

CHU Licai

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, the probability distribution and mathematical expectation of the numbers of dice rolls in Moon cake gambling game were studied by means of Markov chain. It was found that their precise values was not only was obtained, but also through the numerical fitting, the numbers of dice rolls in the game approximately obey a lognormal distribution.

Keywords: Markov chain; Moon cake gambling game; dice; numbers of rolls; probability distribution; mathematical expectation

0 引言

游戏从一开始就伴随着人类文明的发展史，最简单的游戏中都可能蕴含着基本的数学原理[1-2]。从最原始的赌博游戏到现在各种复杂的电脑手机游戏，游戏的持续时间一直是人们关注的焦点。对于游戏的持续时间现在已发展了一系列研究方法，如马尔科夫链方法[3]、鞅方法[4]等。

中秋博饼是流行于闽南厦漳泉以及台湾、东南亚地区的一项民俗活动[5]。传统的“博饼”活动设有大小不同、形态各异的月饼作为奖品，分为 6 个等级，由高到低分别设“状元” 1 个、“对堂” 2 个、“三红” 4 个、“四进” 8 个、“二举” 16 个、“一秀” 32 个。全套月饼共 63 块，称为“会饼”。当前在闽南地区比较通用的获奖规则如下：1）状元，6 枚骰子中出现 5 个以上相同点数或有 4 个以上为 4 点；2）对堂，6 枚骰子的点数恰好为 1，2，3，4，5，6；3）三红，6 枚骰子中出现 3 个 4 点；4）四进，6 枚骰子中出现 4 个相同的不为 4 的点数；5）二举，6 枚骰子中出现 2 个 4 点；6）一秀，6 枚骰子中出现 1 个 4 点；7）罚黑，若结果不符合以上任何一个条件，则称为罚黑，不取得任何奖品。获奖等级采取就高不就低原则。根据以上规则，可以计算出各个等级的获奖概

[**收稿日期**] 2020 - 07 - 31
[**基金项目**] 福建省自然科学基金项目（2018J01418）
[**作者简介**] 储理才（1969—），男，副教授，博士，从事应用数学方向研究，E-mail:chulc@jmu.edu.cn。

率[6-8]，即：罚黑为 14 300/46 656，状元为 561/46 656，对堂为 720/46 656，三红为 2 500/46 656，四进为 1 875/46 656，二举为 9 300/46 656，一秀为 17 400/46 656。本文研究博饼游戏的持续时间分布问题，在这个游戏中，持续时间与游戏中投掷骰子的次数成正比。经查阅文献，发现此问题与概率统计学中著名的“赌徒输光”[9-13]问题有相通之处。因此，本文应用马尔可夫链方法，通过计算机编程计算，获得了投掷次数为 800 以内的概率分布，发现该分布可以用对数正态分布进行拟合，并进一步给出了精确计算数学期望的方法，获得了数学期望的精确有理数表示。

1 符号说明

为叙述方便，引入以下符号：设 A_0，A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 分别表示随机事件“罚黑”、“状元”、“对堂”、“三红”、“四进”、“二举”、“一秀”，记 $p_j = P(A_j), j = 0, 1, \cdots, 6$ 。一局游戏刚开始时，各类奖品都未分发出去，随着游戏的进行，剩余奖品数越来越少，直至所有奖品分发完毕，游戏结束。定义状态向量（i_1，i_2，i_3，i_4，i_5，i_6），其分量 i_1，i_2，i_3，i_4，i_5，i_6 分 别表示状元、对堂、三红、四进、二举、一秀奖项的剩余奖品数，则状态空间 $T = \{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6) \mid 0 \leqslant i_1 \leqslant 1, 0 \leqslant i_2 \leqslant 2, 0 \leqslant i_3 \leqslant 4, 0 \leqslant i_4 \leqslant 8, 0 \leqslant i_5 \leqslant 16, 0 \leqslant i_6 \leqslant 32, i_1, \cdots, i_6 \text{为整数}\}$ 。易知，状态空间包含 151 470（$2 \times 3 \times 5 \times 9 \times 17 \times 33$）个状态点，游戏初始状态为$(1,2,4,8,16,32)$，游戏结束状态为$(0,0,0,0,0,0)$。

由博饼游戏的规则可知，某个时刻的状态只依赖于前一个时刻的状态，从当前状态转移到其他状态或自身都有确定的概率。因此，奖品剩余状态向量构成一个典型的离散马尔可夫过程，即马尔可夫链。从一个状态经过一步转移可达到的状态称为该状态的一步可达状态。

2 投掷次数的概率分布

2.1 概率分布的计算算法

定义随机事件 $B_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}$ 表示“剩余奖品状态为（i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6）到游戏结束还需要的骰子投掷次数不超过 k”的随机事件，其中（i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6）$\in T, k = 0,1,2,\cdots$，$B_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}$ 发生的概率记为 $p_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)} = P(B_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)})$ 。

设随机变量 Z 表示一局游戏需要的投掷次数。一局游戏开始，所有奖品都未分发，所以有：

$$P\{Z \leqslant k\} = P(B_k^{(1,2,4,8,16,32)}) = p_k^{(1,2,4,8,16,32)}。 \tag{1}$$

考虑 $k=0$ 的情形。显然，只有当奖品全分完时，才不需要投掷骰子，所以有：

$$p_0^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)} = \begin{cases} 1, & i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = i_5 = i_6 = 0, \\ 0, & i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6 > 0。 \end{cases} \tag{2}$$

再考虑 $k>0$ 的情形。在奖品剩余状态为$(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)$时，设想第 1 次的投掷结果必定为事件 $A_i(i = 0,1,\cdots,6)$ 中的某一个发生，显然事件 $A_i(i = 0,1,\cdots,6)$ 两两互不相交，它们构成样本空间的一个完备事件组，有全概率公式为：

$$p_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)} = P(B_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}) = \sum_{j=0}^{j=6} P(A_j) P(B_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)} \mid A_j)。 \tag{3}$$

如果投掷结果是事件 A_0（罚黑）发生，则奖品剩余状态不会改变，因为已经掷了一次骰子，则剩下的投掷次数不能超过 $k-1$。因此 A_0 发生的条件下事件 $B_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}$ 发生的概率为：

$$P(B_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)} \mid A_0) = P(B_{k-1}^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}) = p_{k-1}^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}。 \tag{4}$$

如果投掷结果是事件 $A_j(1 \leqslant j \leqslant 6)$ 发生，为论述方便，不失一般性，假设 $j=1$。分成 2 种情况：1）如果此前状元奖品还有剩余，即 $i_1 \geqslant 1$，则奖品剩余状态变为（i_1-1，i_2，i_3，i_4，i_5，i_6）；2）如果此前状元奖品已分完，即 $i_1 = 0$，奖品剩余状态为$(0,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)$，此时玩家无奖可领，奖品剩余

状态不变，仍然为 $(0,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)$。因此，A_1 发生的条件下事件 $B_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}$ 发生的概率为：

$$P(B_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}|A_1)=\begin{cases}P(B_{k-1}^{(i_1-1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)})=p_{k-1}^{(i_1-1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)},\ i_1\geqslant 1,\\ P(B_{k-1}^{(0,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)})=p_{k-1}^{(0,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)},\ i_1=0。\end{cases} \tag{5}$$

为表达简洁，引进记号$\lfloor i\rfloor$（注意：此记号在某些场合表示向下取整，但此处并非如此），$\lfloor i\rfloor=\begin{cases}i,i\geqslant 0,\\0,i<0。\end{cases}$则式（5）可写为：

$$P(B_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}|A_1)=p_{k-1}^{(\lfloor i_1-1\rfloor,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}。\tag{6}$$

类似地分析，有：

$$P(B_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}|A_2)=p_{k-1}^{(i_1,\lfloor i_2-1\rfloor,i_3,i_4,i_5,i_6)},\tag{7}$$

$$P(B_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}|A_3)=p_{k-1}^{(i_1,i_2,\lfloor i_3-1\rfloor,i_4,i_5,i_6)},\tag{8}$$

$$P(B_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}|A_4)=p_{k-1}^{(i_1,i_2,i_3,\lfloor i_4-1\rfloor,i_5,i_6)},\tag{9}$$

$$P(B_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}|A_5)=p_{k-1}^{(i_1,i_2,i_3,i_4,\lfloor i_5-1\rfloor,i_6)},\tag{10}$$

$$P(B_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}|A_6)=p_{k-1}^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,\lfloor i_6-1\rfloor)}。\tag{11}$$

将式（4）和式（6）~ 式(11) 代入式（3），得：

$$\begin{aligned}p_k^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}=&p_0p_{k-1}^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}+p_1p_{k-1}^{(\lfloor i_1-1\rfloor,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}+p_2p_{k-1}^{(i_1,\lfloor i_2-1\rfloor,i_3,i_4,i_5,i_6)}+\\&p_3p_{k-1}^{(i_1,i_2,\lfloor i_3-1\rfloor,i_4,i_5,i_6)}+p_4p_{k-1}^{(i_1,i_2,i_3,\lfloor i_4-1\rfloor,i_5,i_6)}+p_5p_{k-1}^{(i_1,i_2,i_3,i_4,\lfloor i_5-1\rfloor,i_6)}+\\&p_6p_{k-1}^{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,\lfloor i_6-1\rfloor)}。\end{aligned}\tag{12}$$

对任意正整数 k，要计算式（1），只需以式（2）为初始条件，按式（12）进行迭代即可，具体算法可描述为算法 1。

算法 1　计算累计概率分布：$P\{Z\leqslant k\},k=0,1,2,\cdots,K$。

Input：转移概率 $p_0,p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6$，正整数 K。

Output：$P\{Z\leqslant k\}=P(k),k=0,1,2,\cdots,K$。

预分配 2 个 6 维数组 $P1$、$P2$ 和一个 1 维数组 P；

初始化：$P1(0,0,0,0,0,0)\leftarrow 1,P1(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)\leftarrow 0$，其他；

$P(0)\leftarrow P1(1,2,4,8,16,32)$；

for $k\leftarrow 1,k<=K,k++$ do

　for each $(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)\in T$ do

　　$P2(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)\leftarrow p_0P1(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)+p_1P1(\lfloor i_1-1\rfloor,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)+$
　　$p_2P1(i_1,\lfloor i_2-1\rfloor,i_3,i_4,i_5,i_6)+p_3P1(i_1,i_2,\lfloor i_3-1\rfloor,i_4,i_5,i_6)+p_4P1(i_1,i_2,i_3,\lfloor i_4-1\rfloor,i_5,i_6)+$
　　$p_5P1(i_1,i_2,i_3,i_4,\lfloor i_5-1\rfloor,i_6)+p_6P1(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,\lfloor i_6-1\rfloor)$；

　end

　$P(k)\leftarrow P2(1,2,4,8,16,32)$；

　for each $(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)\in T$ do

　　$P1(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)\leftarrow P2(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)$；

　end

end

2.2　概率分布的计算结果

对给定的正整数 K，按节 2.1 方法计算 Z 在 $\{0，1，2，\cdots，K\}$ 上的概率分布。由于状态空间中的元素数目多达 151 470，需计算机编程计算。以下是 $K=800$ 的计算结果。

表 2 是 Z 的累计概率分布表。从表 2 中可以看出，投掷数不超过 220 的概率为 0.522 067，而投掷数不超过 640 的概率高达 0.999 031。由 Z 的累积概率分布，很容易计算 Z 取某个整数值的概率

$P\{Z=k\}=P\{Z\leqslant k\}-P\{Z\leqslant k-1\}$。

表 2 投掷次数 Z 的累积概率分布表（$P\{Z\leqslant k\}$）

Tab. 2 Cumulative probability distribution of $Z(P\{Z\leqslant k\})$

k	0	100	200	300	400	500	600	700
0	0	0. 005 757	0. 406 702	0. 844 422	0. 969 373	0. 993 333	0. 998 341	0. 999 564
5	0	0. 010 903	0. 436 141	0. 856 254	0. 971 733	0. 993 796	0. 998 449	0. 999 592
10	0	0. 017 817	0. 465 275	0. 867 265	0. 973 901	0. 994 225	0. 998 550	0. 999 619
15	0	0. 026 396	0. 493 960	0. 877 497	0. 975 893	0. 994 623	0. 998 645	0. 999 643
20	0	0. 036 609	0. 522 067	0. 886 992	0. 977 724	0. 994 992	0. 998 733	0. 999 666
25	0	0. 048 503	0. 549 483	0. 895 793	0. 979 408	0. 995 334	0. 998 815	0. 999 687
30	0	0. 062 151	0. 576 112	0. 903 939	0. 980 957	0. 995 651	0. 998 892	0. 999 707
35	0	0. 077 611	0. 601 874	0. 911 472	0. 982 381	0. 995 946	0. 998 964	0. 999 726
40	0	0. 094 905	0. 626 701	0. 918 430	0. 983 692	0. 996 220	0. 999 031	0. 999 744
45	0	0. 114 012	0. 650 543	0. 924 853	0. 984 898	0. 996 474	0. 999 094	0. 999 760
50	0	0. 134 868	0. 673 362	0. 930 776	0. 986 010	0. 996 711	0. 999 153	0. 999 775
55	0	0. 157 372	0. 695 133	0. 936 234	0. 987 033	0. 996 931	0. 999 207	0. 999 790
60	0	0. 181 393	0. 715 841	0. 941 262	0. 987 977	0. 997 135	0. 999 258	0. 999 803
65	0. 000 000	0. 206 773	0. 735 483	0. 945 889	0. 988 847	0. 997 326	0. 999 306	0. 999 816
70	0. 000 000	0. 233 336	0. 754 064	0. 950 146	0. 989 650	0. 997 503	0. 999 351	0. 999 827
75	0. 000 000	0. 260 894	0. 771 597	0. 954 062	0. 990 391	0. 997 669	0. 999 393	0. 999 838
80	0. 000 014	0. 289 249	0. 788 102	0. 957 662	0. 991 075	0. 997 822	0. 999 432	0. 999 849
85	0. 000 143	0. 318 202	0. 803 605	0. 960 971	0. 991 708	0. 997 966	0. 999 468	0. 999 858
90	0. 000 747	0. 347 555	0. 818 136	0. 964 012	0. 992 292	0. 998 100	0. 999 503	0. 999 867
95	0. 002 439	0. 377 116	0. 831 729	0. 966 806	0. 992 833	0. 998 224	0. 999 535	0. 999 876

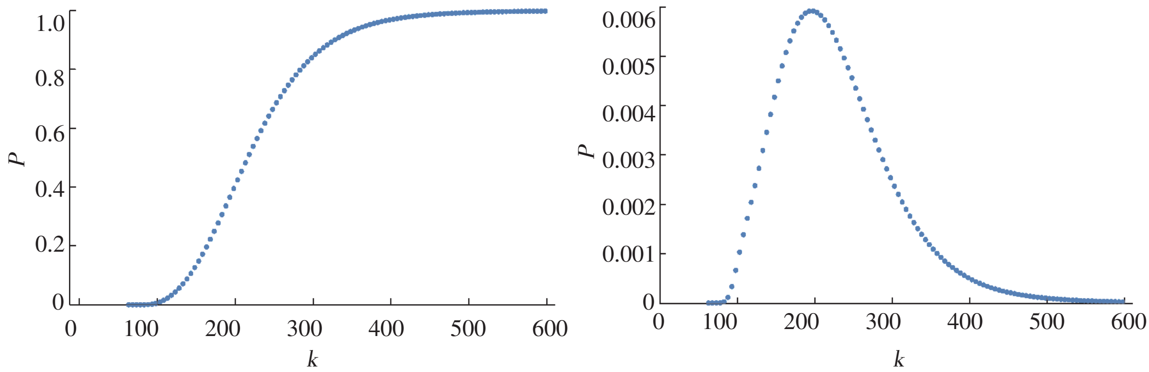
因为奖品总数为 63，所以对 $k<63$，$P\{Z=k\}=0$。特别地，63 个奖品恰好只用 63 次就瓜分完毕的概率 $P\{Z=63\}=63!/(1!2!48!16!32!)p_1^1p_2^2p_3^4p_4^8p_5^{16}p_6^{32}\approx 3.64\times 10^{-15}$，与上述算法的计算结果是一致的。

定义概率最大的投掷次数为最可能出现的投掷次数，则最可能出现的投掷次数为 196，其概率 $P\{Z=196\}=P\{Z\leqslant 196\}-P\{Z\leqslant 195\}=0.005\,920\,890$，即 1 000 局游戏中大约会出现 6 局是以 196 次投掷次数结束游戏的。

2.3 投掷次数 Z 的拟合分布

投掷次数 Z 的概率分布表虽已得出，但使用起来有些不便，能否使用已知的概率分布对其进行拟合呢?

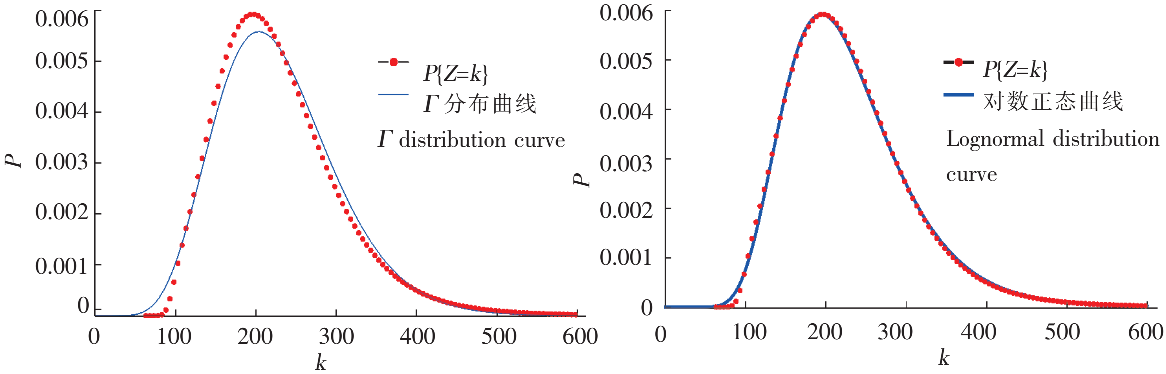
图 1 是投掷次数 Z 的概率分布图。由图 1b 可以看出，Z 的分布是一种偏态分布，分别选择 Γ-分布和对数正态分布对 Z 的概率分布用最小二乘法进行拟合，得出相应的参数。拟合效果见图 2，其中 Γ-分布的形状参数 $\alpha=9.289$，尺度参数 $\beta=24.603$，对数正态分布的参数 $\mu=5.377\,8$，$\sigma=0.328\,4$。从拟合效果来看，显然对数正态分布要优于 Γ-分布。容易计算该对数正态分布的数学期望为 228. 543，方差为 5 947. 990，可作为 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $\mathrm{Var}(Z)$ 近似值，即平均要投 228. 543 次就可将奖品分配完毕。



(a) $P\{Z \leqslant k\}$　　(b) $P\{Z=k\}$

图 1　投掷次数 Z 的概率分布图

Fig.1　Probability distribution curve of Z



(a) Γ 分布 Γ distribution　　(b)对数正态分布 Lognormal distribution

图 2　投掷次数 Z 的拟合概率分布图

Fig.2　Fitted probability distribution curves of Z

3　投掷次数的数学期望

本节考虑 $E(Z)$ 的精确计算问题。设奖品剩余状态为 $(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)$ 时还需要的投掷次数的数学期望为 $E_{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}$，类似节 2.1 的分析可得：

$$E_{(0,0,0,0,0,0)} = 0, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} E_{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)} = {} & 1 + p_0 E_{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)} + p_1 E_{(\lfloor i_1-1\rfloor,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)} + p_2 E_{(i_1,\lfloor i_2-1\rfloor,i_3,i_4,i_5,i_6)} + \\ & p_3 E_{(i_1,i_2,\lfloor i_3-1\rfloor,i_4,i_5,i_6)} + p_4 E_{(i_1,i_2,i_3,\lfloor i_4-1\rfloor,i_5,i_6)} + p_5 E_{(i_1,i_2,i_3,i_4,\lfloor i_5-1\rfloor,i_6)} + p_6 E_{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,\lfloor i_6-1\rfloor)} 。\end{aligned} \tag{14}$$

由式（14）可以解出 $E_{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}$。例如，当 i_1，i_2，i_3，i_4，i_5，i_6 全大于 0 时，有：

$$E_{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)} = \left.\left(\begin{aligned} 1 + p_1 E_{(i_1-1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)} + p_2 E_{(i_1,i_2-1,i_3,i_4,i_5,i_6)} + \\ p_3 E_{(i_1,i_2,i_3-1,i_4,i_5,i_6)} + p_4 E_{(i_1,i_2,i_3,i_4-1,i_5,i_6)} + \\ p_5 E_{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5-1,i_6)} + p_6 E_{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6-1)} \end{aligned}\right)\right/ (1 - p_0) 。 \tag{15}$$

当 $(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)$ 中出现 0 时，不失一般性，假设 $i_1 = i_3 = i_5 = 0$，i_2，i_4，$i_6 > 0$，有：

$$\begin{aligned} E_{(0,i_2,0,i_4,0,i_6)} = {} & (1 + p_2 E_{(0,i_2-1,0,i_4,0,i_6)} + p_4 E_{(0,i_2,0,i_4-1,0,i_6)} + \\ & p_6 E_{(0,i_2,0,i_4,0,i_6-1)}) / (1 - p_0 - p_1 - p_3 - p_5) 。\end{aligned} \tag{16}$$

由式(15)~ 式(16) 可见，状态点 $(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)$ 处的数学期望可以由一步可达状态点的数学期望递推算出，为此将状态空间 T 分层，对整数 $0 \leqslant k \leqslant 63$，定义

$$T_k = \{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6) \in T \mid i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6 = k\} 。 \tag{17}$$

显然，$T_0 = \{(0,0,0,0,0,0)\}$，$T_{63} = \{(1,2,4,8,16,32)\}$，$T_k$ 中的状态点的一步可达状态点一定

在 T_{k-1} 中，计算 $E(Z) = E_{(1,2,4,8,16,32)}$ 的精确值的算法为算法 2。

算法 2 计算 $E(Z) = E(1,2,4,8,16,32)$。

输入参数：$p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$；

初始化：$E_{(0,0,0,0,0,0)} \leftarrow 0$；

按式(17)构造 $T_k, k = 0, 1, \cdots, 63$；

for $k \leftarrow 1$, $k <= 63$, $k++$ do

  for each$(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6) \in T_k$ do

    由式（14）计算 $E_{(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)}$

  end

end

输出：$E_{(1,2,4,8,16,32)}$。

按算法 2 用数学软件 Mathematica 编程，计算得到 $E(Z)$ 的精确值为：

$$E(Z) = (729\ 282\ 124 \cdots 214\ 477\ 889)/(3\ 191\ 150 \cdots 807\ 040\ 000)。 \tag{18}$$

式（18）中分子为 4 770 位整数，分母为 4 768 位整数。由于篇幅所限，中间数位的数字略去。保留六位小数为：$E(Z) = (729\ 282\ 124 \cdots 214\ 477\ 889)/(3\ 191\ 150 \cdots 807\ 040\ 000) \approx 228.532\ 698$，与用对数正态分布计算的结果相比较，二者之间只差 0.01，再一次说明对数正态分布能很好地拟合投掷次数的概率分布。

［参考文献］

［1］ BEASLEY J D. The mathematics of games［J］. The Mathematical Gazette, 1990, 74(469): 223-234.

［2］ RONALD J G. Mathematics in games, sports, and gambling［J］. Mathematical Intelligencer, 2011, 33(1): 111.

［3］ EL-SHEHAWEY M A. On the gambler's ruin problem for a finite Markov chain［J］. Statistics and Probability Letters, 2009, 79(14): 1590-1595.

［4］ 辛宗普，吕方. 用鞅方法计算一类游戏的期望持续时间［J］. 辽宁大学学报（自然科学版），2014, 41(1): 9-12.

［5］ 潘荫庭. 浅析闽台地区中秋“博饼”风俗的起源、演化及文化内涵［J］. 闽台文化研究, 2015(4): 20-28.

［6］ 张扬文. 博饼规则的概率趣谈［J］. 统计教育, 2006(1): 20-21.

［7］ 周璟源，曾艺卿. 计算机算法解决博饼的期望结束次数和时间［J］. 厦门科技, 2012(1): 60-62.

［8］ 李艳芳. 中秋博饼中的数学问题［J］. 赤峰学院学报（自然科学版），2010, 26(12): 17-18.

［9］ ELSHEHAWEY M A, ALMATRAFI B N. On a gambler's ruin problem［J］. Mathematica Slovaca, 1997, 13(4): 483-488.

［10］ SHOESMITH E. Huygens' solution to the gambler's ruin problem［J］. Historia Mathematica, 1986, 13(2): 157-164.

［11］ LOREK P. Generalized gambler's ruin problem: explicit formulas via Siegumd duality［J］. Methodology and Computing in Applied Probability, 2016, 19(2): 1-11.

［12］ KATRIEL G. Gambler's ruin: the duration of play［J］. Communications in Statistics: Stochastic Models, 2014, 30(3): 251-271.

［13］ XU M P, XU Y W. Mean ruin time for gambler's ruin problem［C］// International Conference on Business Computing and global Informatization. Shanghai: IEEE, 2011: 311-314.

（责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤）