

带有 Ornstein-Uhlenbeck 过程的随机 logistic 种群模型

师婉影, 魏春金, 张树文

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究带有均值回复 Ornstein-Uhlenbeck 过程的随机 logistic 种群模型的动力学行为。证明收获努力 E^* 可以控制随机微分方程模型的随机灭绝和持续: 若 $E \geq E^*$ 并且满足一些其他条件, 则种群灭绝; 若 $E < E^*$, 则种群持续。同时得到小的回复速率 θ 或大的波动强度 ξ 会抑制种群增长, 大的回复速率 θ 或小的波动强度 ξ 有利于种群增长。

[关键词] Ornstein-Uhlenbeck 过程; 灭绝性; 持久性; 种群模型

[中图分类号] O 211.63

A Stochastic Logistic Population Model Incorporating Ornstein-Uhlenbeck Process

SHI Wanying, WEI Chunjin, ZHANG Shuwen

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, the dynamics of a stochastic logistic population model incorporating Ornstein-Uhlenbeck process were investigated, and it was proved that the harvesting effort E^* could be used to govern the stochastic extinction and persistence for stochastic model: if $E \geq E^*$ under extra conditions, $N(t)$ will die out, while if $E < E^*$, $N(t)$ will persist. Furthermore, it was proved that smaller speed of reversion θ or bigger intensity of volatility ξ could suppress the population growth, while bigger speed of reversion θ or smaller intensity of volatility ξ could benefit the population growth.

Keywords: Ornstein-Uhlenbeck process; extinction; persistence; population model

0 引言

众所周知, 自然环境中物种的生长不可避免地会受到环境噪声的影响, 生态种群也会受到随机环境波动的扰动, 这种随机环境下种群动力学成为生物数学的一个重要研究方向。因此, 有许多生物数学工作者研究了随机种群动力学问题, 并得到了丰富的研究成果^[1-6]。

考虑具有线性收获的单种群模型

$$dN(t)/dt = rN(1 - N/K) - EN, N(0) = N_0. \quad (1)$$

其中: $N(t)$ 表示种群在 t 时刻的数量; r 表示种群的内在增长率; K 表示种群的环境容纳量; E 表示收获努力。模型 (1) 的解是: $N = N_0 K(r - E) / [rN_0 + [K(r - E) - rN_0]e^{(E-r)t}]$ 。对于模型 (1) 的直接结果是: 1) 模型 (1) 有一个灭绝平衡点 $N_* = 0$ 和一个持续平衡点 $N^* = K(1 - E/r)$; 2) 若 $E \geq r$,

[收稿日期] 2020-09-14

[基金项目] 国家自然科学基金项目(11971405); 福建省自然科学基金项目(J01418); 集美大学国家自然科学基金培育项目(ZP2020064)。

[作者简介] 师婉影(1996—), 女, 硕士生, 从事生物数学方向研究。通信作者: 张树文(1963—), 男, 教授, 硕导, 从事生物数学方向研究。E-mail: zhangsw_123@163.com

则 $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$, 若 $E < r$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = N^*$ 。

为刻画环境随机性的干扰, Yang 等^[1]假设内禀增长率 r 受到高斯白噪声的线性函数扰动, 即:

$$r \rightarrow r + \sigma dB(t)/dt, \tag{2}$$

其中: σ 是噪声强度; $B(t)$ 是一维标准布朗运动, 定义在带有滤子 F_t 并且满足通常条件 (即 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 是右连续单调递增, 且 F_0 包含所有零测集) 的完备概率空间 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上^[7]。将式 (2) 代入常微分方程 (1) 中, 得到随机微分方程为:

$$dN(t) = N(r - E - rN/K)dt + \sigma N(1 - N/K)dB(t)。 \tag{3}$$

对于模型 (3), Yang 等^[1]建立了随机阈值定理来判断种群是否持续存在, 即对任意给定初值 $N_0 \in (0, K)$, 若 $E \geq r - \sigma^2/2$, 则种群灭绝; 若 $E < r - \sigma^2/2$, 则种群持续。

所谓参数扰动法是从常微分方程模型推导随机微分方程模型的经典方法, 这是由 Bedding 等^[2]首先提出的, 并得到广泛应用^[8-11]。这种反映在随机种群模型的特定参数中的环境噪声可以指示种群规模是增加还是减少, 这确实是将环境噪声引入现实生物种群模型中的一种公认方法^[12]。

除了参数扰动法之外, 还有一种方法, 即假设参数 r 满足均值回复随机过程^[13-15]。也就是说, 对于模型 (1), r 在随机环境中的第二个可能模型是均值回复过程 (Ornstein-Uhlenbeck 过程), 其形式为:

$$dr(t) = \theta(r_e - r(t))dt + \xi dB(t), \tag{4}$$

其中: θ 为回复速率; ξ 为环境波动强度; r_e 为均值回复水平或增长率, θ, r_e, ξ 均为正常数。

对 Ornstein-Uhlenbeck 过程 (4) 积分可得:

$$r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\theta t} + \xi \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dB(s), \tag{5}$$

其中 $r_0 = r(0)$ 。由 Itô 积分的性质易知, $r(t)$ 的期望为:

$$E[r(t)] = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\theta t}, \tag{6}$$

$r(t)$ 的方差为:

$$\text{Var}[r(t)] = \xi^2(1 - e^{-2\theta t})/(2\theta)。 \tag{7}$$

由式 (6) 和式 (7) 可推导出 $\xi \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dB(s)$ 服从正态分布 $N(0, \xi^2(1 - e^{-2\theta t})/(2\theta))$, 它等价于修正 $\xi \sqrt{1 - e^{-2\theta t}} dB(t) / (\sqrt{2\theta} dt)$, 其中 $dB(t)/dt$ 是一个高斯白噪声, 故式 (5) 可写成:

$$r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\theta t} + \sigma(t)dB(t)/dt, \tag{8}$$

其中 $\sigma = \xi \sqrt{1 - e^{-2\theta t}} / \sqrt{2\theta}$ 。把式 (8) 代入式 (1) 可得:

$$dN(t) = N(t)[(r_e + (r_0 - r_e)e^{-\theta t})(1 - N(t)/K) - E]dt + \sigma(t)N(t)(1 - N(t)/K)dB(t)。 \tag{9}$$

$N(0) = N_0 \in (0, K)$, 当 $\theta \rightarrow \infty$ 时, 随机微分方程模型 (9) 将趋于常微分方程模型 (1)^[3]。

1 全局正解的存在唯一性

下面将证明随机微分方程模型 (9) 存在唯一一个全局正解。

定理 1 对任意给定初值 $N_0 \in (0, K)$, 系统 (9) 对所有 $t \geq 0$ 以概率 1 存在唯一一个全局正解 $N(t) \in (0, K)$, 即 $P\{N(t) \in (0, K) : \forall t \geq 0\} = 1$ 。

证明 考虑下面模型

$$dY(t) = [r_e - E - r_e e^{Y(t)}/K - \xi^2(1 - e^{Y(t)}/K)^2/(4\theta)]dt + \sigma(1 - e^{Y(t)}/K)dB(t) + [(r_0 - r_e)e^{-\theta t}(1 - e^{Y(t)}/K) + \xi^2 e^{-2\theta t}(1 - e^{Y(t)}/K)^2/(4\theta)]dt, \tag{10}$$

初值 $Y_0 = \ln N_0$ 。显然模型 (10) 的系数满足局部 Lipschitz 条件, 则模型 (10) 存在唯一一个局部解 $Y(t)$, $t \in (0, \tau_e)$, τ_e 是爆炸时间。可用 Itô 公式检验 $N(t) = e^{Y(t)}$ 是模型 (9) 具有初值 N_0 的正解。为了证明这个解是全局的, 只需证明 $\tau_e = \infty$ 。令 $k_0 > 0$ 充分大, 使得 $N_0 \in (1/k_0, K - 1/k_0)$, 对任意

整数 $k > k_0$, 定义停时 $\tau_k = \inf\{t \in [0, \tau_e) : N(t) \notin (1/k, K - 1/k)\}$, 本文假设 $\inf \emptyset = \infty$ (\emptyset 为通常的空集)。显然当 $k \rightarrow \infty$ 时, τ_k 增加。设 $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$, 则 $\tau_\infty \leq \tau_e$, 若可证 $\tau_\infty = \infty$, 则对 $\forall t \geq 0, \tau_e = \infty$ 且 $N(t) \in (0, K)$, 所以只要证 $\tau_e = \infty$ 。假设不成立, 则存在一对常数 $T > 0$ 和 $\varepsilon \in (0, 1)$, 使得 $P\{\tau_\infty \leq T\} > \varepsilon$ 。因此存在一个整数 $k_1 \geq k_0$, 使得 $P\{\tau_k \leq T\} \geq \varepsilon, \forall k \geq k_1$ 。

定义一个二次连续可微函数 $V: (0, K) \rightarrow \mathbf{R}^+, V(N) = K/N + K/(K - N)$ 。由 Itô 公式, 对 $\forall t \in [0, T]$ 和 $k \geq k_1$, 有:

$$EV(N(t \wedge \tau_k)) = V(N_0) + E \int_0^{t \wedge \tau_k} LV(N(s)) ds, \tag{11}$$

以及

$$\begin{aligned} LV(N) &= (-K/N^2 + K/(K - N^2))N((r_e + (r_0 - r_e)e^{-\theta t})(1 - N/K) - E) + \\ & (K/N^3 + K/(K - N)^3)\sigma^2 N^2 (K - N)^2 / K^2 = -(r_e + (r_0 - r_e)e^{-\theta t})(K - N)/N + KE/N + \\ & (r_e + (r_0 - r_e)e^{-\theta t})N/(K - N) - KNE/(K - N)^2 + \sigma^2 K((1 - N/K)^2/N + (N/K)^2/(K - N)) \leq \\ & KE/N + (r_e + (r_0 - r_e)e^{-\theta t})K/(K - N) + \sigma^2(K/N + K/(K - N)). \end{aligned}$$

若 $r_0 \leq r_e$, 则 $r_e + (r_0 - r_e)e^{-\theta t} \leq r_e$; 若 $r_0 > r_e$, 则 $r_e + (r_0 - r_e)e^{-\theta t} \leq r_0$ 。故有 $LV(N) \leq KE/N + (r_0 \vee r_e)K/(K - N) + \sigma^2(K/N + K/(K - N)) \leq E \vee (r_0 \vee r_e)(K/N + K/(K - N)) + \sigma^2(K/N + K/(K - N)) = CV(N)$, 其中 $C = E \vee (r_0 \vee r_e) + \sigma^2$ 。把 $LV(N) \leq CV(N)$ 代入式 (11) 得, $EV(N(t \wedge \tau_k)) \leq V(N_0) + E \int_0^{t \wedge \tau_k} CV(N(s)) ds \leq V(N_0) + C \int_0^{t \wedge \tau_k} EV(N(s \wedge \tau_k)) ds$, 由 Gronwall 不等式得:

$$EV(N(T \wedge \tau_k)) \leq V(N_0)e^{CT}. \tag{12}$$

设 $\Omega_k = \{\tau_k \leq T\}$, $k \geq k_1$, 且由 $P\{\tau_k \leq T\} \geq \varepsilon, \forall k \geq k_1$, 可得 $P\{\Omega_k\} \geq \varepsilon$ 。因为 $\forall \omega \in \Omega_k, N(\tau_k, \omega)$ 等价于 $1/k$ 或 $K - 1/k$, 因此, $V(N(\tau_k, \omega)) \geq Kk_0$ 。由式 (12) 可得, $V(N_0)e^{CT} \geq E[I_{\Omega_k}(\omega)V(N(\tau_k, \omega))] \geq KkP\{\Omega_k\} \geq \varepsilon Kk$, 其中 I_{Ω_k} 是 Ω_k 的指标函数。令 $k \rightarrow \infty$, 则 $\infty > V(N_0)e^{CT} = \infty$ 矛盾, 故 $\tau_\infty = \infty$ 。

2 种群的随机动力学

2.1 种群的随机灭绝

定理 2 若系统 (9) 满足 $E \geq r_e - \xi^2/(4\theta)$ 且

$$\xi^2 \leq 2\theta r_e, \tag{13}$$

或

$$\xi^2 > \max\{2\theta r_e, \theta r_e^2/E\}, \tag{14}$$

则对于任意给定初值 $N_0(0, K)$, 系统 (9) 的解满足 $P\{\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0\} = 1$, 即种群以概率 1 灭绝。

证明 令 $Y(t) = \ln N(t)$, 由 Itô 公式可得 $dY(t) = [r_e - E - r_e N(t)/K - \xi^2(1 - N(t)/K)^2/(4\theta) + (r_0 - r_e)e^{-\theta t}(1 - N(t)/K) + \xi^2 e^{-2\theta t}(1 - N(t)/K)^2/(4\theta)]dt + \sigma(t)(1 - N(t)/K)dB(t)$, 则:

$$\ln N(t) = \ln N_0 + \int_0^t f(N(s)) ds + \varphi(t) + \int_0^t \sigma(s)(1 - N(s)/K) dB(s), \tag{15}$$

其中: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = r_e - E - r_e x/K - \xi^2(1 - x/K)^2/(4\theta); \varphi(t) = \int_0^t ((r_0 - r_e)e^{-\theta s}(1 - N(s)/K) + \xi^2 e^{-2\theta s}(1 - N(s)/K)^2/(4\theta)) ds$ 。易知 $\varphi(t) \leq |r_0 - r_e| \int_0^t e^{-\theta s} ds + \xi^2 \int_0^t e^{-2\theta s} ds/(4\theta) = |r_0 - r_e|(1 - e^{-\theta t})/\theta + \xi^2(1 - e^{-2\theta t})/(8\theta^2)$, $f(N(s)) = -\xi^2(N(s))^2/(4\theta K^2) + (\xi^2/(2\theta K) - r_e/K)N(s) + r_e - E - \xi^2/(4\theta)$ 。

i) 若 $\xi^2 \leq 2\theta r_e$, 则 $\xi^2/(2\theta K) \leq r_e/K$, 故 $f(N(s)) < r_e - E - \xi^2/(4\theta)$, 又 $E \geq r_e - \xi^2/(4\theta)$, 所以

$f(N(s)) < 0$ 。对于 $N(s) \in (0, K)$, 由式 (15) 可得 $\ln N(t) < \ln N_0 + \varphi(t) + \int_0^t \sigma(s)(1 - N(s)/K) dB(s)$ 。

易知:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)/t = 0. \tag{16}$$

又 $\int_0^t \sigma(s)(1 - N(s)/K) dB(s) = \xi \int_0^t \sqrt{1 - e^{-2\theta s}} (1 - N(s)/K) dB(s) / \sqrt{2\theta}$ 是一个局部鞅, 由局部鞅的强大数定律 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \sigma(s)(1 - N(s)/K) dB(s)/t = 0$, 而 $\ln N(t)/t < \ln N_0/t + \varphi(t)/t + \int_0^t \sigma(s)(1 - N(s)/K) dB(s)/t$, 故 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \ln N(t)/t < 0$ 。

ii) 若 $\xi^2 > \{2\theta r_e, \theta r_e^2/E\}$, 易知 $f_{\max}(N(s)) = f(K(1 - 2\theta r_e/\xi^2)) = \theta r_e^2/\xi^2 - E < 0$, 所以 $f(N(s)) \leq \theta r_e^2/\xi^2 - E < 0$ 。对于 $N(s) \in (0, K)$, 同理可证 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \ln N(t)/t < 0$ 。综上 $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$ 。

2.2 种群的随机持续

定理 3 若系统 (9) 满足 $E < r_e - \xi^2/(4\theta)$, 则对于任意给定初值 $N_0 \in (0, K)$, 系统 (9) 的解满足:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \geq \rho, \tag{17}$$

且

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \rho, \tag{18}$$

其中,

$$\rho = (\xi^2 K - 2\theta K r_e + 2K\sqrt{\theta(r_e^2\theta - \xi^2 E)})/\xi^2 \tag{19}$$

是 $f(\rho) = r_e - E - r_e \rho/K - \xi^2(1 - \rho/K)^2/(4\theta)$ 在 $(0, K)$ 上的唯一根。也就是说, $N(t)$ 将以概率 1 无限次上升或超过水平 ρ , 即种群以概率 1 持续存在。

证明 因 $f(0) = r_e - E - \xi^2/(4\theta) > 0$, $f(K) = -E < 0$, 故 ρ 为 $f(\rho)$ 在 $(0, K)$ 上的唯一根。又 $f(x)$ 的对称轴为 $x = (\xi^2 K - 2\theta K r_e)/\xi^2$, 易知当 $x \in (0, K)$ 时, 有:

$$f(x) > 0, \text{ 在 } (0, 0 \vee ((\xi^2 K - 2\theta K r_e)/\xi^2)) \text{ 上严格递增}; \tag{20}$$

$$f(x) > 0, \text{ 在 } (0 \vee ((\xi^2 K - 2\theta K r_e)/\xi^2), \rho) \text{ 上严格递减}; \tag{21}$$

$$f(x) < 0, \text{ 在 } (\rho, K) \text{ 上严格递减}. \tag{22}$$

首先证明式 (17)。若式 (17) 不成立, 则存在充分小的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 使得 $P\{\Omega_1\} > \varepsilon$, 其中 $\Omega_1 = \{\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) < \rho - \varepsilon\}$, 因此, $\forall \omega \in \Omega_1, \exists T = T(\omega) > 0$, 使得:

$$N(t, \omega) < \rho - \varepsilon, t \geq T(\omega). \tag{23}$$

由式 (21) 及式 (23) 可得:

$$f(N(t, \omega)) > f(\rho - \varepsilon) > 0, t \geq T(\omega). \tag{24}$$

另外, 由鞅的强大数定律 $\exists \Omega_2 \in \Omega, P(\Omega_2) = 1$, 使得 $\forall \omega \in \Omega_2$, 则有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \sigma(s)(1 - N(s, \omega)/K) dB(s, \omega) = 0. \tag{25}$$

又由式 (16), $\exists \Omega_3 \in \Omega, P(\Omega_3) = 1$, 使得 $\forall \omega \in \Omega_3, \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \omega)/t = 0$ 。固定 $\forall \omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$, 由式 (24) 及式 (25) 可得, $\ln N(t, \omega) > \ln N_0 + \int_0^{T(\omega)} f(N(s, \omega)) ds + f(\rho - \varepsilon)(t - T(\omega)) + \varphi(t, \omega) + \int_0^t \sigma(s)(1 - N(s, \omega)/K) dB(s, \omega)$ 。故有 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \ln N(t, \omega)/t \geq f(\rho - \varepsilon) > 0$, 所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t, \omega) = \infty$, 与式 (23) 矛盾, 故式 (17) 成立。

下证式 (18)。假设式 (18) 不成立, 则存在一个充分小的 $\delta \in (0, 1)$, 使得 $P\{\Omega_4\} > \delta$, 其中 $\Omega_4 = \{\liminf_{t \rightarrow \infty} \ln N(t) > \rho + \delta\}$, 因此, 对 $\forall \omega \in \Omega_4, \exists T_1 = T_1(\omega) > 0$, 使得:

$$N(t, \omega) > \rho + \delta, t \geq T_1(\omega). \tag{26}$$

由式 (22) 及式 (26) 可知:

$$f(N(t, \omega)) < f(\rho + \delta) < 0. \tag{27}$$

固定 $\forall \omega \in \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4$, 由式 (25) 及式 (27), 对于 $t \geq T_1(\omega)$, $\ln N(t, \omega) < \ln N_0 + \int_0^{T_1(\omega)} f(N(s, \omega)) ds + f(\rho + \delta)(t - T_1(\omega)) + \varphi(t, \omega) + \int_0^t \sigma(s)(1 - N(s, \omega)/K) dB(s, \omega)$, 故 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \ln N(t, \omega)/t < f(\rho + \delta) < 0$, 所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t, \omega) = 0$, 与式 (26) 矛盾, 故式 (18) 成立。

注 1 定理 2 和定理 3 表明, $E^* = r_e - \xi^2/(4\theta)$ 可用来控制随机微分方程模型 (9) 的随机动力学。若 $E \geq E^*$, 并且满足 $\xi^2 \leq 2\theta r_e$ 或 $\xi^2 > \max\{2\theta r_e, \theta r_e^2/E\}$, 则种群灭绝; 若 $E < E^*$, 则种群持续。当 $\theta \rightarrow \infty$ 时, $E^* \rightarrow r_e$, 这与确定性情形经典结果一致。

下面进一步研究回复速率 θ 和波动强度 ξ 对水平 ρ 的影响。

定理 4 假设 $E < r_e - \xi^2/(4\theta)$, 并将式 (19) 中定义的 ρ 看作 ξ 的函数, 且

$$0 < \xi < 2\sqrt{\theta(r_e - E)} = \xi^*. \tag{28}$$

那么 ρ 是严格递减的, 并且有 $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \rho = K(1 - E/r_e)$, $\lim_{\xi \rightarrow \xi^*} \rho = \begin{cases} 0, & r_e/2 \leq E < r_e, \\ K(1 - 1/(r_e/E - 1)), & E < r_e/2. \end{cases}$

证明 $d\rho/d\xi = (2KE\xi^2\theta + 4\theta Kr_e\sqrt{\theta(r_e^2\theta - \xi^2E)} - 4K\theta^2r_e^2)/(\xi^3\sqrt{\theta(r_e^2\theta - \xi^2E)}) = -2K(\sqrt{\theta(r_e^2\theta - \xi^2E)} - \theta r_e)/(\xi^3\sqrt{\theta(r_e^2\theta - \xi^2E)})$ 。又 ξ 为正常数, 分母不为 0, 所以 $d\rho/d\xi < 0$, 故 ρ 随着 ξ 的增加而严格减小。由洛必达法则, $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \rho = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} (2K - 2K\theta E/\sqrt{\theta(r_e^2\theta - \xi^2E)})/2 = K - KE/r_e = K(1 - E/r_e)$ 。 $\lim_{\xi \rightarrow \xi^*} \rho = ((\xi^*)^2 K - 2\theta Kr_e + 2K\sqrt{\theta(r_e^2\theta - (\xi^*)^2E)})/(\xi^*)^2 = (4K\theta(r_e - E) - 2K\theta r_e + 2K\sqrt{\theta^2 r_e^2 - 4\theta(r_e - E)E\theta})/(4\theta(r_e - E)) = (Kr_e - 2KE + K\sqrt{(r_e - 2E)^2})/(2(r_e - E)) = (K(r_e - 2E) + K|r_e - 2E|)/(2(r_e - E)) = (K(r_e/E - 2) + K|r_e/E - 2|)/(2(r_e/E - 1))$, 因 $E < r_e - \xi^2/(4\theta)$, 所以 $r_e/E - \xi^2/(4\theta E) > 1$, 故 $r_e/E > 1$, 所以当 $1 < r_e/E \leq 2$ 时, 即 $r_e/2 \leq E < r_e$ 时, $\lim_{\xi \rightarrow \xi^*} \rho = 0$; 当 $r_e/E > 2$ 时, 即 $E < r_e/2$ 时, $\lim_{\xi \rightarrow \xi^*} \rho = K(1 - 1/(r_e/E - 1))$ 。

定理 5 假设 $E < r_e - \xi^2/(4\theta)$, 并将式 (19) 中定义的 ρ 看作 θ 的函数, 且

$$\theta > \xi^2/(4(r_e - E)) = \theta^*, \tag{29}$$

那么 ρ 是严格递增的, 并且有 $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \rho = K(1 - E/r_e)$, $\lim_{\theta \rightarrow \theta^*} \rho = \begin{cases} 0, & r_e/2 \leq E < r_e, \\ K(1 - 1/(r_e/E - 1)), & E < r_e/2. \end{cases}$

证明 类似定理 4 的证明可知 $d\rho/d\theta > 0$, 即 ρ 随着 θ 的增大而严格增大。又 $\rho = (\xi^2 K - 2\theta Kr_e + 2K\sqrt{r_e^2(\theta - \xi^2 E/(2r_e^2))^2 - \xi^4 E^2/(4r_e^2)})/\xi^2 \leq (\xi^2 K - 2\theta Kr_e + 2Kr_e(\theta - \xi^2 E/(2r_e^2)))/\xi^2 = (\xi^2 K - K\xi^2 E/r_e)/\xi^2 = K(1 - E/r_e)$, 故 ρ 严格单调递增有上界, 所以 $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \rho = K(1 - E/r_e)$ 。同样, 类似定理 4 的证明, 可得当 $r_e/2 \leq E < r_e$ 时, $\lim_{\theta \rightarrow \theta^*} \rho = 0$, 当 $E < r_e/2$ 时, $\lim_{\theta \rightarrow \theta^*} \rho = K(1 - 1/(r_e/E - 1))$ 。

注 2 小的回复速率 θ 或大的波动强度 ξ 会抑制种群增长, 大的回复速率 θ 或小的波动强度 ξ 有利于种群增长。

3 数值模拟

本节用 Milstein 高阶方法模拟系统 (9) 的复杂动力学行为, 验证回复速率 θ 和波动强度 ξ 对种群生长的影响。

3.1 波动强度 ξ 对种群生长的影响

首先取 $r_e = r_0 = 0.7$, $K = 120$, $E = 0.55$, $N(0) = 50$, 固定 $\theta = 0.6$, 若取 $\xi = 0.3$, 则 $E < r_e - \xi^2 / (4\theta) = 0.6625$, 由定理 3, 种群持续。另外, 计算 $\rho = (\xi^2 K - 2\theta K r_e + 2K\sqrt{\theta(r_e^2\theta - \xi^2 E)}) / \xi^2 \approx 21.372$, 故由定理 3, 系统 (9) 的解满足 $\liminf_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq 21.372 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} N(t)$ 。图 1a 的计算机模拟清楚地支持了这一结果, 说明了种群 $N(t)$ 在水平 21.372 附近的波动。若取 $\xi = 0.7$, 则 $E > r_e - \xi^2 / (4\theta) \approx 0.496$, 由定理 2, 种群灭绝, 数值结果见图 1b。

由定理 5 可知, ρ 随着 ξ 的增加而严格减少, 若选择 ξ 充分小, 如 $\xi = 0.001 \rightarrow 0^+$, 计算得 $\rho = 25.70$, 这是 ρ 的最大值。因此, 由定理 3 可知 $\liminf_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq 25.70 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} N(t)$ 。易知 $N^* = K(1 - E/r_e) \approx 25.71$ 是相应自治系统 (30) 的正平衡点

$$dN(t) = N(t)(r_e(1 - N(t)/K) - E)dt. \tag{30}$$

也就是说, 若 $\xi \rightarrow 0^+$, 则系统 (9) 的解接近于相应确定性系统 (30) 的极限, 这由定理 4 严格证明, 数值结果见图 1c。若选择 ξ 足够大, 如 $\xi = 0.5999 \rightarrow \xi^* = 0.6$, 此时 $E < r_e - \xi^2 / (4\theta)$, 并且 $r_e/2 \leq E < r_e$ 计算得 $\rho \approx 0.015 \rightarrow 0$, 数值结果类似于图 1b, 定理 4 给出严格证明。

由图 1 可以看出, 较低的波动强度有利于种群生长, 较高的波动强度不利于种群生长。

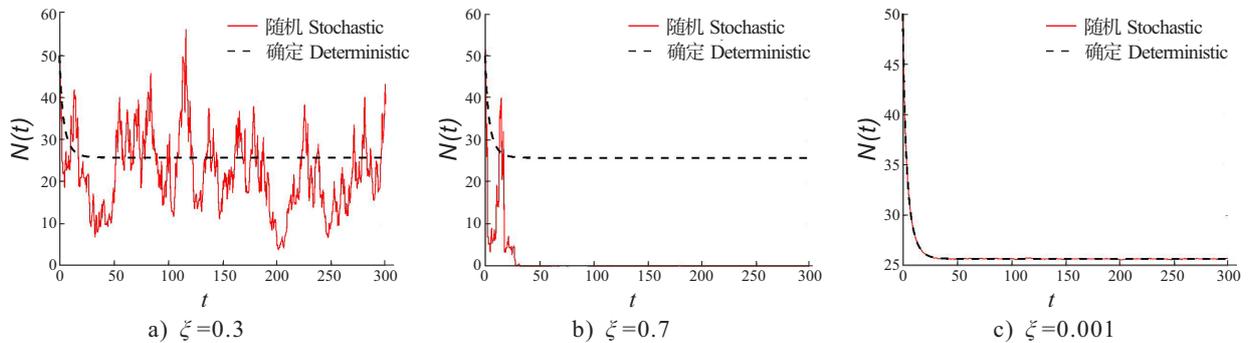


图1 系统(9)及其相应的确定性系统的解的轨迹 ($\theta=0.6$)

Fig.1 The solution trajectories of system (9) and its corresponding deterministic system ($\theta=0.6$)

3.2 回复速率 θ 对种群生长的影响

固定 $\xi = 0.55$, 若取 $\theta = 0.9$, 则 $E < E^* \approx 0.616$ 。由定理 3, 种群将持续, 计算 $\rho \approx 14.602$, 由定理 3 可得出结论, 对于 $N(0) = 50$, 系统 (9) 的解满足 $\liminf_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq 14.602 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} N(t)$ 。图 2a 的计算机模拟支持了这一结果, 显示了系统 (9) 的解在水平 14.602 附近的波动。若取 $\theta = 0.3$, 其他参数不变, 此时 $E > E^* \approx 0.448$, 由定理 2 可知, 种群将灭绝, 图 2b 的数值模拟支持了这一结果。

由图 2 可以看出, 大的回复速率 θ 有利于种群增长, 小的回复速率 θ 会抑制种群增长。

类似节 3.1 可以得到, 当 $\theta \rightarrow \infty$ 时, 系统 (9) 的解接近相应确定性系统 (30) 的极限值。

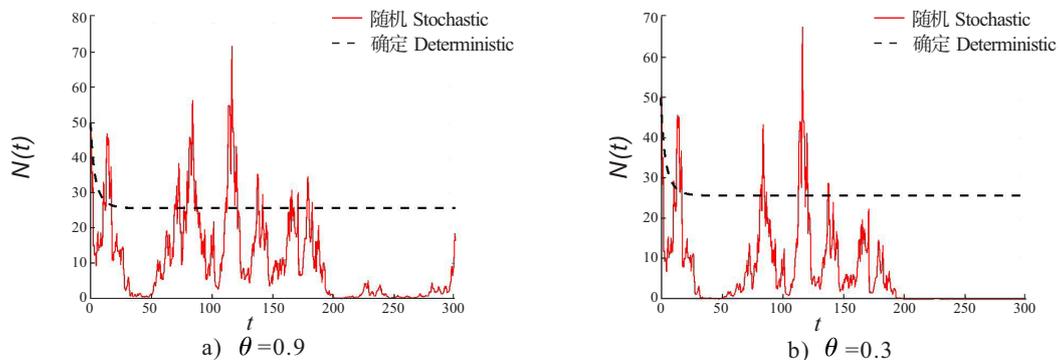


图2 系统(9)及其相应的确定性系统的解的轨迹 ($\xi=0.55$)

Fig.2 The solution trajectories of system (9) and its corresponding deterministic system ($\xi=0.55$)

3.3 平稳分布

为了进一步研究波动强度 ξ 和回复速率 θ 对系统 (9) 种群动力学的影响, 固定其他参数不变, 分别给出了 ξ 、 θ 变动时 $N(t)$ 的平稳分布, 数值结果见图 3 ~ 图 4。

图 3 模拟了回复速率 θ 对系统 (9) 平稳分布的影响。首先固定 $\xi = 0.15$, 并考虑 3 个不同的 θ 值: 0.5, 5, 10, 其他参数取 $r_e = r_0 = 0.7, K = 120, E = 0.55$, 此时均有 $E < E^*$ 。由定理 3, 在上述情况下种群持续。由图 3 可以看出, 当 $\theta = 10$ 时, 分布似乎更接近正态分布, 但随着 θ 减小到 0.5, 分布偏斜 (见图 3a)。由此可以得到, 对于较高的 θ (如 $\theta = 10$), 振荡分布更为对称, 而对于较低的 θ (如 $\theta = 0.5$), 解的分布呈偏态。

图 4 模拟了波动强度 ξ 对系统 (9) 平稳分布的影响。首先固定 $\theta = 1$, 并考虑 3 个不同的 ξ 值: 0.1, 0.2, 0.3, 其他参数取 $r_e = r_0 = 0.7, K = 120, E = 0.55$, 此时均有 $E < E^*$ 。由定理 3, 在上述情况下种群持续。由图 4 可以看出, 当 $\xi = 0.1$ 时, 分布似乎更接近正态分布, 但随着 ξ 增加到 0.3, 分布偏斜 (见图 4c)。由此可以得出, 对于较低的 ξ (如 $\xi = 0.1$), 振荡分布更为对称, 而对于较高 ξ (如 $\xi = 0.3$), 解的分布呈偏态。

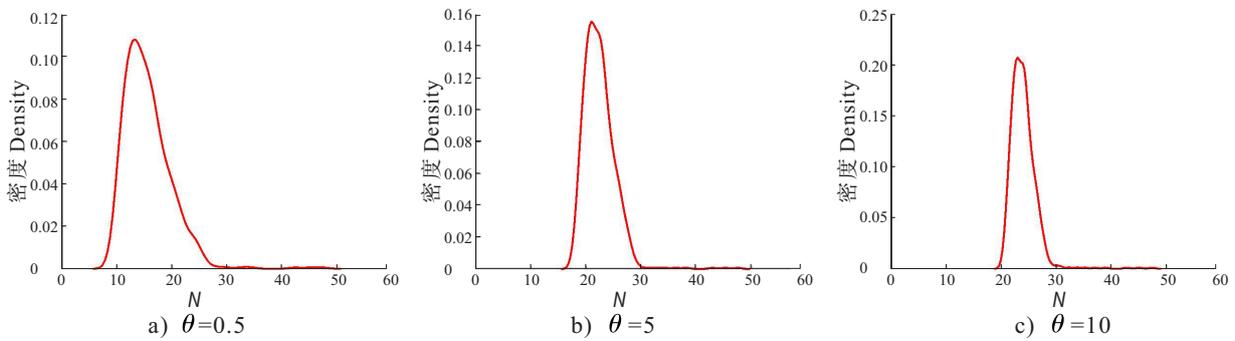


图3 θ 取不同值时 $N(t)$ 的平稳分布($\xi=0.15$)

Fig.3 The distribution of $N(t)$ with different θ ($\xi=0.15$)

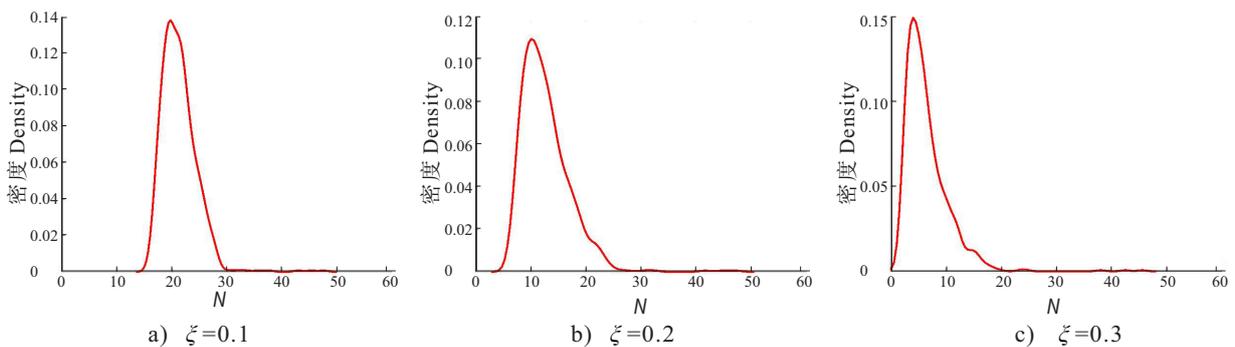


图4 ξ 取不同值时 $N(t)$ 的平稳分布($\theta=1$)

Fig.4 The distribution of $N(t)$ with different θ ($\theta=1$)

4 结论

本文在文献 [1] 的基础上, 提出了一个新的包含均值回复 Ornstein-Uhlenbeck 过程的随机种群模型。环境波动对种群生长的影响通过回复速率 θ 或波动强度 ξ 测量转化为随机微分方程模型 (9)。通过阈值 $E^* = r_e - \xi^2 / (4\theta)$ 可以控制随机微分方程模型 (9) 的随机动力学。当 $E \geq E^*$ 并且满足 $\xi^2 \leq 2\theta r_e$ 或 $\xi^2 > \max\{2\theta r_e, \theta r_e^2 / E\}$ 时, 种群灭绝; 当 $E < E^*$ 时, 种群持续。另外, 在种群持续的情况下, 本文研究了回复速率 θ 和波动强度 ξ 对水平 ρ 的影响, 得到: ρ 随着 ξ 的增大而严格减小; ρ 随着 θ 的

增大而严格增大。由式 (28) 和式 (29) 可知: $E \geq r_e - \xi^2 / (4\theta)$, 意味着 $\xi \geq \xi^*$ 或 $\theta \leq \theta^*$; $E < r_e - \xi^2 / (4\theta)$, 意味着 $\xi < \xi^*$ 或 $\theta > \theta^*$ 。从这个意义上说, θ^* 和 ξ^* 可用来控制随机微分方程模型 (9) 的动力学。更准确地说, 若 $\xi < \xi^*$ 或 $\theta > \theta^*$, 则种群持续; 若 $\xi \geq \xi^*$ 或 $\theta \leq \theta^*$, 则种群灭绝。可见, 小的回复速率 θ 或大的波动强度 ξ 会抑制种群增长, 而大的回复速率 θ 或小的波动强度 ξ 则有利于种群增长。

[参 考 文 献]

- [1] YANG B, CAI Y L, WANG K, et al. Optimal harvesting policy of logistic population model in a randomly fluctuating environment[J]. *Physica A Statistical Mechanics and Its Applications*, 2019, 526: 120817. DOI:10.1016/j.physa.2019.04.053.
- [2] BEDDINGTON J R, MAY R M. Harvesting natural populations in a randomly fluctuating environment[J]. *Science*, 1977, 197(4302): 463-465. DOI:10.1126/science.197.4302.463.
- [3] LIU M, WANG K, WU Q. Survival analysis of stochastic competitive models in a polluted environment and stochastic competitive exclusion principle[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2011, 73(9): 1969. DOI:10.1007/s11538-010-9569-5.
- [4] LIU M, WANG K. Persistence and extinction of a stochastic single-specie model under regime switching in a polluted environment[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2010, 267(3): 283-291. DOI:10.1016/j.jtbi.2010.08.030.
- [5] LIU Z H, LIU Q. Persistence and extinction of a stochastic delay predator-prey model in a polluted environment[J]. *Mathematica Slovaca*, 2016, 66(1): 95-106. DOI:10.1515/ms-2015-0119.
- [6] LIU M, WANG K. Persistence and extinction of a single-species population system in a polluted environment with random perturbations and impulsive toxicant input[J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2012, 45(12): 1541-1550. DOI:10.1016/j.chaos.2012.08.011.
- [7] 王克. 随机生物数学模型 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [8] CAI Y L, KANG Y, BANERJEE M, et al. A stochastic SIRS epidemic model with infectious force under intervention strategies [J]. *Journal of Differential Equations*, 2015, 259(12): 7463-7502. DOI:10.1016/j.jde.2015.08.024.
- [9] CAI Y L, JIAO J, GUI Z, et al. Environmental variability in a stochastic epidemic model[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, 329: 210-226. DOI:10.1016/j.amc.2018.02.009.
- [10] LIU Y, LI W, FENG J. Graph-theoretical method to the existence of stationary distribution of stochastic coupled systems[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2018, 30(2): 667-685. DOI:10.1007/s10884-016-9566-y.
- [11] LI D, CUI J A, LIU M, et al. The evolutionary dynamics of stochastic epidemic model with nonlinear incidence rate[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2015, 77(9): 1705-1743. DOI:10.1007/s11538-015-0101-9.
- [12] ZHAO Y, YUAN S, MA J. Survival and stationary distribution analysis of a stochastic competitive model of three species in a polluted environment[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2015, 77(7): 1285-1326. DOI:10.1007/s11538-015-0086-4.
- [13] CAI Y L, KANG Y, WANG W M. A stochastic SIRS epidemic model with nonlinear incidence rate[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, 305: 221-240. DOI:10.1016/j.amc.2017.02.003.
- [14] LAMBA H, MATTINGLY J C, STUART A M. An adaptive Euler-Maruyama scheme for SDEs: convergence and stability[J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2007, 27(3): 479-506. DOI:10.1093/imanum/drl032.
- [15] WANG W M, CAI Y L, DING Z Q, et al. A stochastic differential equation SIS epidemic model incorporating Ornstein-Uhlenbeck process[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2018, 509: 921-936. DOI:10.1016/j.physa.2018.06.099.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)