第 28 卷　第 1 期　　集美大学学报（自然科学版）　　Vol. 28　No. 1
2023 年 1 月　　Journal of Jimei University(Natural Science)　　Jan. 2023

［文章编号］1007 – 7405(2023)01 – 0075 – 08　　DOI:10.19715/j.jmuzr.2023.01.10

图有向自保形测度的重分形

郑水草

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

［**摘要**］讨论图有向自保形集的重分形，得到开集条件下自保形集关于图有向自保形测度的重分形分解公式，推广了无向图自保形重分形。同时，将图有向自保形集在强开集条件的结果减弱成为开集条件。

［**关键词**］自保形集；自保形测度；开集条件；重分形分解

［**中图分类号**］O 211.6

The Multifractals of Graph Directed Self-Conformal Measures

ZHENG Shuicao

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, the multifractals of self-conformal sets were investigated. Under the open set condition, with respect to the self-conformal measures, the multifractal formalism of these sets were obtained. The results generalized those of undirected graph self-conformal. Meanwhile, it also made the results of the graph directed self-conformal sets in the strong open set condition weaken to the open set condition.

Keywords: self-conformal sets; self-conformal measures; open set condition; multifractal decomposition

0　引言

通过迭代函数系统来产生分形集是一种常用方法。人们最早研究这类对象是从自相似集开始的[1-2]，而自保形集比自相似集的适用范围更广。关于自保形集的重分形，文献［3］获得了强开集条件下无向图的自保形测度的重分形分解公式，文献［4］证明了开集与强开集条件是等价的，文献［5］则简化了文献［4］的证明。综合这些结果可见，开集条件下关于无向图自保形重分形分解问题已得到解决。事实上，文献［6］进一步讨论得到了一些特殊的允许重叠的自保形集，其技巧是通过映射到更高维空间，将它转化为满足开集条件。本文探讨了有向图所产生的自保形重分形，它是无向图自保形的自然推广。文献［7］在强开集条件下获得的图有向自保形重分形与自相似分形相比，自保形集不必具备线性性质，但它有有界畸变性质。关于分形集的重分形分解问题，其困难主要来自于产生分形的机制上，即迭代过程不能出现太多重叠点，否则，想得到分解公式就变得很困难。因此，开集条件成为得到最广泛接受的自然条件。正是在开集条件下，本文获得了这类分形的重分形分解公式。

1　预备知识

设 (V,E) 是一个有限的连通有向图，其中，V 代表顶点集，E 是所有边的集合。对于 $u,v \in V$，

［**收稿日期**］2020 – 12 – 04
［**基金项目**］集美大学教育教学改革项目（C150352）
［**作者简介**］郑水草（1973—），男，副教授，从事随机过程与随机分形研究，E-mail:shuicaoz@sina.com。

记所有从 u 到 v 的边的全体为 E_{uv}，并记 $E_u = \bigcup_{v\in V} E_{uv}$。图中的一条路径是指由有限条边所组成的链 $\gamma = e_1e_2\cdots e_k$，这些边满足前一条边 e_i 的终点是后一条边 e_{i+1}的始点。为方便起见，记 $\gamma_i = \gamma(i) \triangleq e_i$，$1\leqslant i\leqslant k$，并用 $|\gamma|$ 表示链 γ 的长度，即 γ 所含边数。为叙述方便，规定 $\emptyset_u$ 也是一条路径（由 u 到 u 的空路径）。给定图中的一条无穷链 $e_1e_2\cdots$，如果对于任意的 $n\in\mathbf{N}$，$e_1e_2\cdots e_n$ 总是一条路径，则称该无穷链为一条无穷路径。设边 $e\in E$，分别用 $i(e)$ 和 $t(e)$ 来代表边 e 的始点和终点。

以下是一些常用记号。设 $u,v\in V$，$n\in\mathbf{N}$，记 $E_{uv}^{(n)} = \{e_1e_2\cdots e_n$ 是路径，它满足 $i(e_1) = u$ 且 $t(e_n) = v\}$，$E_{uv}^{(*)} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_{uv}^{(n)}$，$E_u^{(n)} = \bigcup_{v\in V} E_{uv}^{(n)}$，$E_u^{(*)} = \bigcup_{v\in V} E_{uv}^{(*)}$，$E^{(n)} = \bigcup_{u\in V} E_u^{(n)}$，$E^{(*)} = \bigcup_{u\in V} E_u^{(*)}$，$E_u^{\mathbf{N}} = \{e_1e_2\cdots$ 是无穷路径，它满足 $i(e_1) = u\}$，$E^{\mathbf{N}} = \bigcup_{u\in V} E_u^{\mathbf{N}}$。

对于每条路径 $\gamma\in E^{(*)}$，$[\gamma]$ 表示所有以 γ 为开头的无穷路径的全体，即 $[\gamma]$ 是以 γ 为底的“柱集”，简称 γ 柱集。集合 $\{[\gamma]:\gamma\in E_u^{(*)}\}$ 可作为 $E_u^{\mathbf{N}}$ 上的一个拓扑基[8]。设 $\alpha = \alpha_1\cdots\alpha_m$，$\beta = \beta_1\cdots\beta_n\in E^{(*)}$是两条路径，如果 $t(\alpha_m) = i(\beta_1)$，则用 $\alpha\beta = \alpha_1\cdots\alpha_m\beta_1\cdots\beta_n$ 表示 α 和 β 两路径的连接。类似地，如果 $\omega = \omega_1\omega_2\cdots\in E^{\mathbf{N}}$ 是一条无穷路径，且 $t(\alpha_m) = i(\omega_1)$，则记 α 与 ω 的连接为 $\alpha\omega = \alpha_1\cdots\alpha_m\omega_1\omega_2\cdots$。设 $\omega\in E^{\mathbf{N}}$ 是一条无穷路径，k 是一个自然数，定义 ω 的截尾 $\omega|k$ 为由 ω 的前 k 条边所组成的新路径，有时也称 ω 是 $\omega|k$ 的延伸，并记为 $\omega|k\prec\omega$。对有限路径 γ，若其长度大于或等于 k，截尾的概念 $\gamma|k$ 也照样适用。

给定一个有限的连通有向图 (V,E)，任给一个顶点 $u\in V$，将它与集合 $U_u, J_u, W_u\subset\mathbf{R}^d$ 关联起来。其中，它们由以下方式给定：设 U_u 为一个 $\mathbf{R}^d$ 中的开连通子集；J_u 是 U_u 的一个规则紧子集，即 $J_u = \overline{(J_u)^\circ}$，$J_u\subseteq U_u$；$W_u$ 为一开连通集，满足 $J_u\subseteq W_u\subseteq\overline{W_u}\subseteq U_u$。同时，对每条边 $e\in E$，将它与一个映射 T_e 和一个正数 $p_e\in(0,1)$相关联，后二者满足：i）对于某正数 $0<\eta<1$ 以及所有边 $e\in E$，$T_e: U_{t(e)}\to U_{i(e)}$ 是一个 $C^{1+\eta}$微分同胚，也就是 $T_e{}'$和 $T_e{}'^{-1}$均连续，其中，$i(e)$，$t(e)$ 分别表示边 e 的起点和终点；ii）对于所有的边 $e\in E$ 和 $x\in U_{t(e)}$，$0 < |T_e{}'(x)| < 1$，（$|\cdot|$ 是矩阵的范数）；iii）对于所有的顶点 $u\in V$，$\sum_{u\in V}\sum_{e\in E_{uv}} p_e = 1$。

记 $G = (V,E,(T_e)_{e\in E},(p_e)_{e\in E})$，它们满足上述条件，称之为一个带有概率的图有向自保形迭代函数系统（graph self-conformal iterative function system，GCIFS），并称 $\{J_u\}_{u\in V}$ 为 G 的种子集。

由 GCIFS 和 W_u 的定义知，存在数 $\gamma_{\min}$和 $\gamma_{\max}$，使得对于所有的 $e\in E$，$x\in W_{t(e)}$，即有：

$$0 < \gamma_{\min} \leqslant |T_e{}'(x)| \leqslant \gamma_{\max} < 1。\tag{1}$$

给定映射 $f:A\to B$，定义范数 $\|f\| = \sup_{x\in A}|f(x)|$。令 $p_{\min} = \min_{e\in E}p_e$，$p_{\max} = \max_{e\in E}p_e$。由假设，$G$ 中的图是有限条边和有限个顶点的，因此 $0<p_{\min}\leqslant p_{\max}<1$。

定义 1（开集条件） 称 $\{T_\gamma,\ \gamma\in E^{(*)}\}$ 满足开集条件，如果对于 $\{J_v\}_{v\in V}\subset\mathbf{R}^d$，以下条件满足：i）对于每条边 $e\in E$，$T_e(J_{t(e)})\subseteq J_{i(e)}$；ii）对于任意的顶点 $u,v,\omega\in V$，如果 $v\neq\omega$ 且 $e\in E_{u\omega}$，$\epsilon\in E_{u\omega}$，那么 $T_e(J_v^o)\cap T_\epsilon(J_\omega^o) = \emptyset$。

接下来，设 $\sigma = \sigma_1\cdots\sigma_n\in E^{(*)}$，$|\sigma| = n$，$\sigma(k) \hat{=} \sigma_k (1\leqslant k\leqslant n)$，对每个 $u\in V$，定义自然投影映射 π_u：$E_u^{\mathbf{N}}\to J_u$ 为 $\pi_u(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_{\omega|n}(J_{t(\sigma(n))})$。根据式（1），它有定义且与初始点 x 无关。进一步，π_u 连续。最后，为简单起见，对任意的 $\tau\in E^{(*)}$，记 $p_\tau = p_{\tau_1}\cdots p_{\tau|\tau|}$ 及 $J_\tau = T_\tau(J_{t(\tau(|\tau|))})$。

由文献［9］，存在唯一集类 $(K_u)_{u\in V}$和唯一 Borel 测度列 $(\mu_u)_{u\in V}$，满足 $K_u = \bigcup_{v\in V}\bigcup_{e\in E_{uv}} T_e(K_v)$，$\mu_u = \sum_{v\in V}\sum_{e\in E_{uv}}(p_e\cdot\mu_v\circ T_e^{-1})$，$\forall u\in V$。

集类 $(K_u)_{u\in V}$和 $(\mu_u)_{u\in V}$就是所谓的 G 的图有向自保形不变子集和图有向自保形不变测度，以下简称它们为图有向自保形集和图有向自保形测度。

定义左推移算子 $T:E^{\mathbf{N}} \to E^{\mathbf{N}}$，$T(\sigma_1\sigma_2\cdots) = (\sigma_2\sigma_3\cdots)$。如果 $t(\tau(|\tau|)) = i(\sigma_1)$，则定义 $\Delta_\tau: E^{\mathbf{N}} \cup E^{(*)} \to E^{\mathbf{N}} \cup E^{(*)}$，$\Delta_\tau\sigma = \tau\sigma$，$\forall_\tau \in E^{(*)}$。容易验证：对于任意的 $e \in E$，有：

$$T_e \circ \pi_{t(e)} = \pi_{i(e)} \circ \Delta_e。\tag{2}$$

因此，对每条边 $u \in V$，由 K_u 的唯一性，有 $K_u = \pi_u(E_u^{\mathbf{N}})$。

对于每条边 $u \in V$，定义 $E_u^{\mathbf{N}}$ 上的测度 $\hat{\mu}_u$ 为：$\hat{\mu}_u(\cdot) \equiv (\sum\limits_{v\in V}\sum\limits_{e\in E_{uv}} p_e \cdot \delta_e(\cdot))^{\mathbf{N}}$，也就是，通过概率测度 $\sum_{v\in V}\sum_{e\in E_{uv}} p_e\delta_e(\cdot)$ 所得到的 $E_u^{\mathbf{N}}$ 上的无穷乘积测度，其中，$\delta_e(\cdot)$ 为边 e 上的狄拉克测度。它的定义域为由柱集 $\{[\tau], \tau \in E_u^{(*)}\}$ 所产生的 σ-域。由定义，它们满足如下的不变性：

$$\hat{\mu}_u = \sum_{v\in V}\sum_{e\in E_{uv}} (p_e \cdot \hat{\mu}_v \circ \Delta_e^{-1})。\tag{3}$$

由式（2）和式（3），可以验证 $\hat{\mu}_u \circ \pi_u^{-1}$ 也是 G 的一个图有向不变测度，因此，由 μ_u 的唯一性可知，$\mu_u = \hat{\mu}_u \circ \pi_u^{-1}$。

2　一些辅助函数

接下来给出两个函数 $a(q)$ 和 $\beta(q)$，$q \in \mathbf{R}$，它们在获得重分形分解公式中起重要作用。这里将用到热力学动力系统这一工具。下面给出自保形变换的有界畸变性质。为此，先将文献［3］中的关于单点图的 2 个基本结论平行地推广到有向图上。

引理 1　设 G 为一个 GCIFS，总存在一个常数 $C_1 \geqslant 1$，使得 $\forall \sigma \in E^{(*)}$，如果 $x, y \in W_{t(\sigma(|\sigma|))}$，则

$$|T_\sigma'(x)| \leqslant C_1 |T_\sigma'(y)|。\tag{4}$$

证明　给定 $u \in V$，则对于任意的 $\tau \in E_u^{(*)}$，由文献［3］中的引理 1，存在一个常数 $C_u \geqslant 1$，使得式（4）成立。但顶点集 V 的元素个数是有限的，因此，若取 $C_1 = \max\{C_u : u \in V\}$，则对于任意的 $\tau \in E^{(*)}$，式（4）总成立。

引理 2　设 G 为一个 GCIFS，总存在一个常数 $C_2 \geqslant C_1$，使得对于任意的 $\tau \in E^{(*)}$，记 $n \doteq |\tau|$，并且对于任意的 $x, y \in W_{t(\tau(n)}$，有：

$$C_2^{-1} \| T_\tau' \| d(x,y) \leqslant d(T_\tau(x), T_\tau(y)) \leqslant C_2 \| T_\tau' \| d(x,y)。\tag{5}$$

证明　利用文献［3］中的引理 2，其证明类似引理 1。

推论 1　设 G 为一个 GCIFS。对于任意的 $\tau \in E^{(*)}$，记 $n \triangleq |\tau|$，i）对于任意的 $B \subset W_{t(\tau(n))}$，$C_2^{-1} \| T_\tau' \| \operatorname{diam} B \leqslant \operatorname{diam} T_\tau(B) \leqslant C_2 \| T_\tau' \| \operatorname{diam} B$，特别地，$\forall u \in V$，$\forall \tau \in E_u^{(*)}$，$C_2^{-1} \| T_\tau' \| \operatorname{diam} J_{t(\tau(n))} \leqslant \operatorname{diam} T_\tau(J_{t(\tau(n))}) \leqslant C_2 \| T_\tau' \| \operatorname{diam} J_{t(\tau(n))}$；ii）若 $x \in W_{t(\tau(n))}$，$r > 0$ 满足 $B(x,r) \subset W_{t(\tau(n))}$，则 $B(T_\tau(x), C_2^{-1} \| T_\tau' \| r) \leqslant T_\tau(B(x,r)) \leqslant B(T_\tau(x), C_2 \| T_\tau' \| r)$。

证明　由引理 2 可得，对于 $\sigma \in E^{(*)}$，记 $K_\sigma = T_\sigma(K_{t(o)})$，$d_\sigma = \operatorname{diam}(K_\sigma)$。由式（5），存在常数 $C_3 \geqslant 1$，使得：

$$C_3^{-1} \| T_\sigma' \| \leqslant d_\sigma \leqslant C_3 \| T_\sigma' \|,\ \sigma \in E^{(*)}。\tag{6}$$

由式（5）和式（6），存在 $C_4 \geqslant 1$，使得对所有满足 $t(\sigma) = i(\tau)$ 的 $\sigma, \tau \in E^{(*)}$，则有：

$$C_4^{-1} \max\{\| T_\sigma' \| d_\tau, \| T_\tau' \| d_\sigma\} \leqslant d_{\sigma\tau} \leqslant C_4 \min\{\| T_\sigma' \| d_\tau, \| T_\tau' \| d_\sigma\}。\tag{7}$$

注 1　性质(4)~(7)统称为有界畸变性质（bounded distortion property，BDP）。

接下来介绍函数 $\beta(q)$。为此，$\forall q$，$\beta \in \mathbf{R}$，$n \in \mathbf{N}$，令 $A_n(q,\beta) = \sum\limits_{\sigma\in E^{(n)}} p_\sigma^q \| T_\sigma' \|^\beta$。$\forall \sigma, \tau \in E^{(*)}$，当 $\sigma\tau$ 为图上的一条路径，则 $\forall x \in W_{t(\tau(|\tau|))}$。由引理 1，$\| T_\sigma' \| \leqslant C_1 |T_\sigma'(T_\tau(x))|$，且 $\| T_\tau' \| \leqslant C_1 |T_\tau'(x)|$。因此，$\| T_\sigma' \| \cdot \| T_\tau' \| \leqslant C_1^2 |T_\sigma'(T_\tau(x))| \cdot |T_\tau'(x)| = C_1^2 |T_{\sigma\tau}'(x)|$。

由 x 的任意性，有：

$$C_1^{-2} \| T_\sigma{}' \| \cdot \| T_\tau{}' \| \leqslant \| T_{\sigma\tau}{}' \| \leqslant \| T_\sigma{}' \| \cdot \| T_\tau{}' \| 。\tag{8}$$

记 $C_1^{(\beta)} = \begin{cases} C_1^\beta, & \beta \geqslant 0 \\ 1, & \beta < 0 \end{cases}$，$C_1^{(-\beta)} = (C_1^\beta)^{-1}$，因此，由式（8），对于任意的路径 $\sigma\tau \in E^{(*)}$，$C_1^{-(2\beta)} p_\sigma^q \| T_\sigma{}' \|^\beta p_\tau^q \| T_\tau{}' \|^\beta \leqslant p_{\sigma\tau}^q \| T_{\sigma\tau}{}' \|^\beta \leqslant C_1^{(-2\beta)} p_\sigma^q \| T_\sigma{}' \|^\beta p_\tau^q \| T_\tau{}' \|^\beta$。即：对于 $\forall n$，$m \in \mathbf{N}$ 和所有的 q，$\beta \in \mathbf{R}$，有：

$$C_1^{-(2\beta)} A_n(q,\beta) A_m(q,\beta) \leqslant A_{n+m}(q,\beta) \leqslant C_1^{(-2\beta)} A_n(q,\beta) A_m(q,\beta)。\tag{9}$$

引理3　设 G 为一个 GCIFS，则对于 $\forall q$，$\beta \in \mathbf{R}$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\log A_n(q,\beta)/n) = Q(q,\beta)$ 总存在。

证明　i）如果 $\beta \geqslant 0$，那么对于任意的 $n \in \mathbf{N}$，由式（9）中的第二个不等式，

$$A_{n+m}(q,\beta) \leqslant A_n(q,\beta) A_m(q,\beta)。\tag{10}$$

由定义，$\forall n \in \mathbf{N}$，$A_n(q,\beta)$ 总是非负的。记 $A_n \triangleq A_n(q,\beta)$。一方面，对于给定的 $m \in \mathbf{N}$，以及任意 $j \geqslant m$，j 总可以表示成 $j = km + n$，其中 $0 \leqslant n < m$。因此，重复使用式（10），得 $\log A_j/j \leqslant k \log A_m/(km+n) + \log A_n/(km+n)$。当 $j \to \infty$ 时，$k \to \infty$，因此，$\limsup\limits_{j\to\infty}(\log A_j/j) \leqslant \log A_m/m$。从而，

$$\limsup_{j\to\infty}(\log A_j/j) \leqslant \inf_m(\log A_m/m)。\tag{11}$$

另一方面，对于 $\forall j \in \mathbf{N}$，易见 $\log A_j/j \geqslant \inf\limits_m(\log A_m/m)$。因此，

$$\liminf_{j\to\infty}(\log A_j/j) \geqslant \inf_m(\log A_m/m)。\tag{12}$$

综合式（11）和式（12），当 $\beta \geqslant 0$ 时，$\lim\limits_{j\to\infty}(\log A_j/j) = \inf\limits_m(\log A_m/m)$。

ii）如果 $\beta < 0$，利用式（9）的第一个不等式，有 $A_{n+m}(q,\beta) \geqslant A_n(q,\beta) A_m(q,\beta)$。

类似上述的讨论有，当 $\beta < 0$ 时，$\lim\limits_{j\to\infty}(\log A_j/j) = \sup\limits_m(\log A_m/m)$。

由 i）、ii），引理3证明完毕。

下面讨论一些辅助测度。给定一个连续函数 $f: E^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}$，设 P 为 f 的压力函数，即 $P(f) = \sup\{h(v) + \int f\,\mathrm{d}v : v$ 为推移函数 T 的不变测度$\}$，而 $h(v)$ 是测度 v 的熵[10]。现在，给定 $q \in \mathbf{R}$，记 $\beta = \beta(q)$，其值满足 $Q(q,\beta(q)) = 0$。定义 $f_{q,\beta}: E^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}$，$f_{q,\beta}(\sigma) = \log(p_{\sigma_1}^q |T_{\sigma_1}{}'(\pi_{t(\sigma_1)}(T_\sigma))|^\beta)$。

引理4　设 $q \in \mathbf{R}$，则存在一个定义在 $E^{\mathbf{N}}$ 上，关于推移 T 不变的遍历测度 $\hat{\mu}_q$ 和一个常数 $C_q \geqslant 1$，使得对于任意的 $\sigma \in E^{(*)}$，

$$C_q^{-1} p_\sigma^q \| T_\sigma{}' \|^{\beta(q)} \leqslant \hat{\mu}_q([\sigma]) \leqslant C_q p_\sigma^q \| T_\sigma{}' \|^{\beta(q)}。\tag{13}$$

证明　在 $E^{\mathbf{N}}$ 上定义一个距离 $\rho: \rho(\tau,\sigma) = r_{\max}^{n\eta}(\forall \tau,\sigma \in E^{(*)}, n = \min\{i: \tau_i \neq \sigma_i\})$。由于 $\forall u \in V$，T_e 是 $\boldsymbol{C}^{l+\eta}$ 微分同胚的，因此，$|T_\sigma{}'|$ 是 η-Hölder 连续的，从而 $f_{q,\beta}$ 是 Lipschitz 的。根据文献［10］中的引理1.20和定理1.22，关于函数 $f_{q,\beta}$，存在 $E^{\mathbf{N}}$ 上的唯一一个遍历 Gibbs 测度 $\hat{\mu}_q$，使得 $P(f_{q,\beta}) = Q_{(q,\beta)} = 0$，且式（13）成立。

注2　称测度 $\hat{\mu}_q$ 为 G 的 q-平衡测度。

对于 $\forall u \in V$，设 $\hat{\mu}_q(E_u^{\mathbf{N}}) = \lambda_u$，由式（13），对每个 $u \in V$，$\lambda_u > 0$。记测度 $\hat{\mu}_q$ 在 $E_u^{\mathbf{N}}$ 的限制为 $\hat{\mu}_q | E_u^{\mathbf{N}}$。令 $\hat{\mu}_{u,q} = (1/\lambda_u) \cdot \hat{\mu}_q | E_u^{\mathbf{N}}$，$\mu_u, q = (1/\lambda_\mu) \cdot \hat{\mu}_q \circ \pi_u^{-1}$。特别地，由于 $\hat{\mu}_{u,1}$ 和 $\hat{\mu}_u$ 均为 $E_u^{\mathbf{N}}$ 上的 T-不变遍历概率测度，$\hat{\mu}_{u,1}$ 和 $\hat{\mu}_u$ 二者同一。从而，$\mu_{u,1} = \mu_u$。

现在定义停时。给定 $u \in V$，集类 $\Gamma_u \subset E_u^{(*)}$ 称为一个停时，若它满足：对于任意的 $\omega \in E_u^{\mathbf{N}}$，存在唯一一个 $\sigma \in \Gamma_u$，使得 $\sigma \prec \omega$，即：存在 $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$，使得 $\omega | k = \sigma$。特别地，对于任意的 $r \in (0,1)$，定义停时 $\Gamma_{u,r} = \{\sigma \in E_u^{(*)} : \| T_\sigma{}' \| < r \leqslant \| T'_{\sigma\,\|\sigma|-1} \|\}$。

注意到，对于 $r < r_{\min}$，$\{[\sigma]: \sigma \in \Gamma_{u,r}\}$ 总是为 $E_u^{\mathbf{N}}$ 一个有限不交覆盖。另外，由于在停时 $\Gamma_{u,r}$ 中，u 是固定的，常记 $\Gamma_{u,r}$ 为 Γ_r。

推论2　对于 $\forall q \in \mathbf{R}$，总存在一个常数 $\hat{C}_q$，使得对于任意的 $u \in V$，如果 $\Gamma \in E_u^{(*)}$ 是一个停时，

那么有：

$$\hat{C}_q^{-1} \leqslant \sum_{\sigma \in \Gamma} p_\sigma^q \| T_\sigma' \|^{\beta(q)} \leqslant \hat{C}_q。 \tag{14}$$

证明　由注 2，取 $\hat{C}_q = C_q / \lambda_u$，则对于式（13）中的相应项求和即得所要的结果。

下面给出另一个辅助函数 $\alpha(q)$。对于 $q \in \mathbf{R}$，定义：$\zeta(q) = \int \log |T_{\sigma_1}'(\pi_{t(\sigma_1)}(T(\sigma)))| \hat{\mu}(\mathrm{d}\sigma)$；$\xi(q) = \int \log p_{\sigma_1} \hat{\mu}_q(\mathrm{d}\sigma)$；$\alpha(q) = \xi(q)/\zeta(q)$。记 $\alpha_{\min} = \inf\{\alpha(q) : q \in \mathbf{R}\}$ 和 $\alpha_{\max} = \sup\{\alpha(q) : q \in \mathbf{R}\}$。

引理 5　$\beta(q)$ 可微且 $\alpha(q) = -\beta'(q)$。

证明　由文献［11］知，压力 P 解析且满足：$\mathrm{d}P(f+sg)/\mathrm{d}s \Big|_{s=0} = \int g \mathrm{d}\mu$，其中 μ 是 f-的平衡测度。注意到 $f_{q,\beta}(\sigma) = \log(p_{\sigma_1}^q \cdot |T_{\sigma_1}'(\pi_{t(\sigma_1)}(T\sigma))|^\beta) = q\log p_{\sigma_1} + \beta \log |T_{\sigma_1}'(\pi_{t(\sigma_1)}(T\sigma))|$。现在，如果取 $f = f_{q,\beta}$，$g(\sigma) = \log p_{\sigma_1}$，并记 $\beta = \beta(q)$。则由 $P(f_{q,\beta(q)}) = 0$ 得

$$\begin{aligned} \partial P(f_{q,\beta})/\partial q &= \lim_{s \to 0} \{ [P((q+s)\log p_{\sigma_1} + \beta \log |T_{\sigma_1}' \circ \pi_{t(\sigma_1)} \circ T|) - 0]/s \} = \\ &\lim_{s \to 0} \{ [P(q \log p_{\sigma_1} + \beta \log |T_{\sigma_1}' \circ \pi_{t(\sigma_1)} \circ T| + s\log p_{\sigma_1})]/s \} = \\ &\lim_{s \to 0} P(f_{q,\beta} + sg)/s) = \int \log p_{\sigma_1} \hat{\mu}_q(\mathrm{d}\sigma) = \xi(q)。\end{aligned}$$

类似地，如果取 $f = f_{q,\beta}$，$g(\sigma) = \log |T_{\sigma_1}'(\pi_{t(\sigma_1)}(T(\sigma)))|$，那么 $\partial P(f_{q,\beta})/\partial \beta = \zeta(q)$。因此，$\beta'(q) = \{ -(\partial P(f_{q,\beta(q)})/\partial q)/(\partial P(f_{q,\beta(q)})/\partial \beta) \} = -\xi(q)/\zeta(q) = -\alpha(q)$。证明完毕。

3　主要结果及其证明

本节给出了图有向自保形集 $(K_u)_{u \in V}$ 在开集条件下的重分形分解。分别记 dim 和 Dim 为 Hausdorff 维数和 Packing 维数。$\forall \alpha \in \mathbf{R}$，令 $\hat{K}_u^\alpha = \{\omega \in E_u^{\mathbf{N}}) : \lim_{k \to \infty} [\log p_{\omega|k} / \log \| T'_{\omega|k} \|] = \alpha\}$，$K_u^\alpha = \pi_u(\hat{K}_u^\alpha)$。记函数 $\beta(q)$ 的勒让德变换为 $\beta^*(\alpha) = \inf\{q\alpha + \beta(q) : q \in \mathbf{R}\}$。由于 β 是可微的并且是凸的，因此，可以验证：$\forall q \in \mathbf{R}$，$\beta^*(\alpha(q)) = q\alpha(q) + \beta(q)$。

引理 6　设 $\hat{\mu}_q$ 为 G 的 q-平衡测度，则 $\forall q \in \mathbf{R}$，关于测度 $\hat{\mu}_q$，对于几乎所有的 $\sigma \in E^{\mathbf{N}}$，有：i）$\lim_{n \to \infty} (\log \| T'_{\sigma|\mu} \| / n) = \zeta(q)$；ii）$\lim_{n \to \infty} (\log p_{\sigma|n} / n) = \xi(q)$。

证明　设 $\sigma \in E^{\mathbf{N}}$，则 $\forall n \in \mathbf{N}$，由引理 2，可得：

$$C_1^{-1} \| T'_{\sigma|n} \| \leqslant |T'_{\sigma|n}(\pi_{t(\sigma(n))}(T^n(\sigma)))| \leqslant \| T'_{\sigma|n} \|。 \tag{15}$$

由复合函数求导法，$|T'_{\sigma|n}(\pi_{t(\sigma(n))}(T^n(\sigma)))| = |T'_{\sigma(1)}(\pi_{t(\sigma(1))}(T^n(\sigma)))| \cdots |T'_{\sigma(n)}(\pi_{t(\sigma(n))}(T^n(\sigma)))|$。从而，由 Birkhoff 遍历定理[11] 知，关于 $\hat{\mu}_q$，对于几乎所有的 $\sigma \in E^{\mathbf{N}}$，当 $n \to \infty$ 时，$\log |T'_{\sigma|n}(\pi_{t(\sigma(n))}(T^n(\sigma)))| / n = \sum_{k=1}^{n} \log |T'_{\sigma(k)}(\pi_{t(\sigma(k))}(T^k(\sigma)))| / n \to \zeta(q)$。因此，由式（15）知，i）成立。ii）同理可证。

推论 3　设 G 为一个自保形迭代系统，则 $\forall q \in \mathbf{R}$，关于测度 $\hat{\mu}_q$ 成立：$\lim_{n \to \infty} (\log p_{\sigma|n} / \log \| T'_{\sigma|n} \|) = \alpha(q)$。

下面再给出一个几何方面的技术引理。

引理 7　设 $c_1 > 0$、$v \geqslant 1$ 为两个正常数，B 为 $\mathbf{R}^m$ 的任意子集，满足 diam $B = p > 0$。设 $\{B_i\}$ 为一族不交开球。假定每个 B_i 包含了一个半径为 $c_1\rho^v$ 的开球，且 B_i 本身包含于一个半径为 ρ 的球内，则存在一个正整数 M，使得 B 至多与 M 个 $\{\overline{B_i}\}$ 内的闭球相交。

证明　参见文献［12］的引理 7.2。

命题 1　设 G 为一个自保形迭代系统，$(K_u)_{u \in V}$ 为其不变子集，则对于任意的 $u \in V$，i）Dim $K_u \leqslant$

$\beta(0)$；ii）当 $\alpha\in(\alpha_{\min};\alpha_{\max})$ 时，有 $\mathrm{Dim}\,K_u^{\alpha}\leqslant\beta^*(\alpha)$。

证明 i）给定 $u\in V$，记 $\beta=\beta(0)$。设 $b\in(0,1)$ 是一个常数。对于每个 $k\in\mathbf{N}$，任给 K_u 的一个 b^k 填充 $\{B(x_i,r_i)\}_{i\in\mathbf{N}}$。对每个 r_i，选择 k_i，使得 $b^{k_i}<r_i\leqslant b^{k_i-1}$，从而 $k_i\geqslant k$，$\{B(x_i,b^{k_i})\}_{i\in\mathbf{N}}$ 是一个不交集。对于每个 $n\in\mathbf{N}$，记停时 $\Gamma(n)=\Gamma_{b^n}$，由于 $\{B(x_i;,b^{k_i})\}_{i\in\mathbf{N}}$ 两两互不相交，因此，由引理7知，存在正整数 M，使得对于任意的 $n\in\mathbf{N}$ 及任意的 $\tau\in\Gamma(n)$，有：

$$\#\{i:k_i=n,B(x_i,b^{k_i})\cap J_\tau\neq\emptyset\}\leqslant M。\tag{16}$$

从而，对于任意的 $\varepsilon>0$，由 $\Gamma(n)$ 的定义及式（14）、式（16），可得：

$$\sum_{i=1}^{\infty}(2r_i)^{\beta+\varepsilon}\leqslant(2/b)^{\beta+\varepsilon}\sum_{i=1}^{\infty}b^{k_i(\beta+\varepsilon)}\leqslant(2/b)^{\beta+\varepsilon}\sum_{i=1}^{\infty}b^{k_i(\beta+\varepsilon)}\sum_{\tau\in\Gamma(k_i)}1_{\{\tau\in\Gamma(k_i):J_\tau\cap B(x_i,b^{k_i})\neq\emptyset\}}(\tau)\leqslant$$

$$(2/b)^{\beta+\varepsilon}M\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{\tau\in\Gamma(n)}b^{n(\beta+\varepsilon)}\leqslant(2/b)^{\beta+\varepsilon}Mr_{\min}^{-\beta}\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{\tau\in\Gamma(n)}\|T_\tau'\|^{\beta}b^{n\varepsilon}\leqslant(2/b)^{\beta+\varepsilon}+Mr_{\min}^{-\beta}\hat{C}_0(1-b^{\varepsilon})^{-1}<\infty。$$

因此，对于所有的 $k\in\mathbf{N}$，$\overline{P}_{b^k}(K_u)\leqslant\beta+\varepsilon$，从而，$\mathrm{Dim}\,K_u\leqslant\beta+\varepsilon$。由 ε 的任意性知，$\mathrm{Dim}\,K_u\leqslant\beta(0)$。

ii）$\forall\alpha\in(\alpha_{\min};\alpha_{\max})$，总存在一个 q，使得 $\alpha=\alpha(q)$。若 $q=0$，则转换为 i）的情形，所以结论成立。下面假设 $q\neq0$。

1）当 $q>0$ 时，记 $\beta=\beta(q)$。固定 $\varepsilon>0$，对于每个 $n\in\mathbf{N}$，令 $\hat{K}_{u,n}^{\alpha}=\{\sigma\in E_u^{\mathbf{N}}:\log p_{\sigma|k}/\log\|T'_{\sigma|k}\|\leqslant\alpha+\varepsilon/q$，对所有的 $k\geqslant n\}$，$K_{u,n}^{\alpha}=\pi_u(\hat{K}_{u,n}^{\alpha})$。则按 K_u^{α} 定义，有 $K_u^{\alpha}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}K_{u,n}^{\alpha}$。

固定 $n\in\mathbf{N}$，下面来计算 $K_{u,n}^{\alpha}$ 的填充维数。类似 i)，设 $b\in(0,1)$ 为一个固定常数。令 $k(n)=\min\{l:b^l\leqslant\|T_\sigma'\|$，对于所有的 $\sigma\in E_u^n\}$。对于每个自然数 $k>\max\{n,k(n)\}$，任取 $K_{u,n}^{\alpha}$ 的一个 b^k 填充 $\{B(x_i,r_i)\}_{i\in\mathbf{N}}$。对每个 r_i，选择 k_i 使得 $b^{k_i}<r_i\leqslant b^{k_i-1}$。从而，$k_i\geqslant k$，$\{B(x_i,b^{k_i})\}_{i\in\mathbf{N}}$ 是一个不交集。由于 $\forall i$，$x_i\in K_{u,n}^{\alpha}$，因此，对于每个 $i\in\mathbf{N}$，存在 $\omega^{(i)}\in\hat{K}_{u,n}^{\alpha}$，使得 $\pi_u(\omega^{(i)})=x_i$。记 $\Gamma(k_i)=\Gamma_{b^{k_i}}$，设自然数 l_i 满足 $\omega^{(i)}|l_i\in\Gamma(k_i)$，即 $\|T'_{\omega^{(i)}|l_i}\|<b^{k_i}\leqslant\|T'_{\omega^{(i)}|l_i-1}\|$，则由 $k_i\geqslant k>k(n)$，有 $\|T'_{\omega^{(i)}|l_i}\|<b^{k(n)}$，故由 $k(n)$ 的定义知 $l_i\geqslant n$，从而 $\log p_{\omega^{(i)}|l_i}/\log\|T'_{\omega^{(i)}|l_i}\|\leqslant\alpha+\varepsilon/q$。

经简单计算可知：

$$P_{\omega^{(i)}|l_i}^{q}\geqslant\|T'_{\omega^{(i)}|l_i}\|^{q\alpha+\varepsilon}。\tag{17}$$

因此，由式(16)~(17)及式（14），可得：

$$\sum_{i=1}^{\infty}(2r_i)^{\alpha q+\beta+2\varepsilon}\leqslant(2/b)^{\alpha q+\beta+2\varepsilon}\sum_{i=1}^{\infty}b^{k_i(\alpha q+\beta+2\varepsilon)}=$$

$$(2/b)^{\alpha q+\beta+2\varepsilon}\sum_{i=1}^{\infty}b^{k_i(\beta+\varepsilon)}b^{k_i(q\alpha+\varepsilon)}\leqslant$$

$$(2/b)^{\alpha q+\beta+2\varepsilon}r_{\min}^{-(q\alpha+\varepsilon)}\sum_{i=1}^{\infty}b^{k_i(\beta+\varepsilon)}p_{\omega^{(i)}|l_i}^{q}\leqslant$$

$$(2/b)^{\alpha q+\beta+2\varepsilon}r_{\min}^{-(q\alpha+\varepsilon)}\sum_{i=1}^{\infty}b^{k_i(\beta+\varepsilon)}\max\{p_\tau^q:\tau\in\Gamma(k_i),J_\tau\cap B(x_i,b^{k^i})\neq\emptyset\}\leqslant$$

$$(2/b)^{\alpha q+\beta+2\varepsilon}Mr_{\min}^{-(q\alpha+\varepsilon)}\sum_{l=k}^{\infty}\sum_{\tau\in\Gamma(l)}b^{l(\beta+\varepsilon)}p^q\tau\leqslant$$

$$(2/b)^{\alpha q+\beta+2\varepsilon}Mr_{\min}^{-(|\beta|+q\alpha+\varepsilon)}\sum_{l=k}^{\infty}\sum_{\tau\in\Gamma(l)}\|T_\tau'\|^{\beta}p_\tau^q b^{l\varepsilon}\leqslant$$

$$(2/b)^{\alpha q+\beta+2\varepsilon}Mr_{\min}^{-(|\beta|+q\alpha+\varepsilon)}\hat{C}_q(1-b^{\varepsilon})^{-1}<\infty。$$

因此，对于所有的 $n\in\mathbf{N}$，$\mathrm{Dim}\,K_{u,n}^{\alpha}\leqslant\alpha q+\beta+2\varepsilon$，从而，$\mathrm{Dim}\,K_u^{\alpha}\leqslant\alpha q+\beta+2\varepsilon$。由 ε 的任意性知，$\mathrm{Dim}\,K_{u,n}^{\alpha}\leqslant q\alpha+\beta=\beta^*(a)$。

2）当 $q<0$ 时，类似地，令 $\hat{K}_{u,n}^{\alpha}\{\sigma\in E_u^{\mathbf{N}}。\log p_{\sigma|k}/\log\|T'_{\sigma|k}\|\geqslant\alpha+\varepsilon/q$，对所有的 $k\geqslant n\}$，$K_{u,n}^{\alpha}=$

$\pi_u(\hat{K}^{\alpha}_{u,n})$。则按 K^{α}_u 定义有 $K^{\alpha}_u \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K^{\alpha}_{u,n}$。注意到 $q<0$，因此式（17）仍成立。从而，平行于 $q>0$ 的证明步骤可得 $\mathrm{Dim}\, K^{\alpha}_u \leqslant \beta^*(a)$。ii）证毕。

命题 2　设 G 为一个自保形迭代系统，则在开集条件下，当 $q=0$ 时，$\dim K^{\alpha(0)}_u \geqslant \beta(0)$。

证明　注意 $H^{\alpha}(\cdot)$ 表示 α-维的 Hausdorff 测度。由 $\beta(q)$ 的定义知 $\beta(0)>0$。记 $\alpha=\alpha(0)$，$\beta=\beta(0)$。由于 G 满足开集条件，因此，由推论 2 及文献［13］的引理 2.1 知，存在常数 M，使得对于任意的 $F\in B(\mathbf{R}^m)$，当 $\mathrm{diam}\, F<r_{\min}$ 时，有：

$$\#\Gamma(F) \hat{=} \#\{\sigma \in E^{(*)}_u \,\|\, T_{\sigma}{}' \| < \mathrm{diam}\, F \leqslant \| T'_{\sigma\|\sigma|-1} \| \text{ 且 } F\cap J_{\sigma}\neq\emptyset\} \leqslant M。 \tag{18}$$

注意到，如果 $\omega\in E^{\mathbf{N}}_u$，使得 $\pi_u(\omega)\in F$，则存在 $\sigma\in\Gamma(F)$，使得 $\sigma\prec\omega$。因此，有：

$$\mu_u(F) = \hat{\mu}_u(\pi^{-1}_u(F)) \leqslant \sum_{\sigma\in\Gamma(F)} \hat{\mu}_u([\sigma])。 \tag{19}$$

由式（13）及注 2 知，对于任意的 $\sigma\in E^{(*)}_u$，存在正常数 $C_0>0$，使得：

$$\hat{\mu}_u([\sigma]) \leqslant C_0 \| T_{\sigma}{}' \|^{\beta}。 \tag{20}$$

由式（19）~ 式（20）及 $\Gamma(F)$ 的定义，有 $\mu_u(F) \leqslant C_0(\mathrm{diam}\, F)^{\beta}\#\Gamma(F) \leqslant MC_0(\mathrm{diam}F)^{\beta}$。令 $c=MC_0$，从而 $\mu_u(F) \leqslant c(\mathrm{diam}\, F)^{\beta}$。根据质量分布原理[8] 知，$1/c\leqslant H^{\beta}(K^{\alpha}_u)$。而由 $\dim K^{\alpha}_u\geqslant\beta$，命题 2 证毕。

命题 3　设 G 为一个自保形迭代系统，在开集条件下，对于任意的 $\alpha\in(\alpha_{\min},\alpha_{\max})$，$\dim K^{\alpha}_u \geqslant \beta^*(\alpha)$ 总成立。

证明　由于 $\alpha\in(\alpha_{\min};\alpha_{\max})$，故存在 $q\in\mathbf{R}$，使得 $\alpha(q)=a$。

1）当 $q=0$ 时，这是命题 2 的情形。

2）考察 $q>0$ 的情况。任给 $\varepsilon>0$，对于任意的 $\sigma\in\hat{K}^{\alpha}_u$，由 $\hat{K}^{\alpha}_u$ 的定义，存在一个正整数 $N(\sigma)$，使得：

$$\log p_{\sigma|k}/\log \| T'_{\sigma|k} \| > \alpha - \varepsilon/q, \text{对于所有的 } k \geqslant N(\sigma)。 \tag{21}$$

对于每个 $k\in\mathbf{N}$，定义 $\hat{F}_{\alpha,k}=\{\sigma\in\hat{K}^{\alpha}_u : N(\sigma)=k\}$。由注 2 及推论 3 知，$\hat{\mu}_{u,q}(\hat{K}^{\alpha}_u)=1$，因此可以选择 k_0，使得 $\hat{\mu}_{u,q}(\hat{F}_{\alpha,k_0}\cap\hat{K}^{\alpha}_u)>0$。令 $F_{\alpha,k_0}=\pi_u(\hat{F}_{\alpha,k_0})$。定义 F_{α,k_0} 上的一个 Borel 测度 u 为：$v(A)=\hat{\mu}_{u,q}(\pi^{-1}_u(A)\cap\hat{F}_{\alpha,k_0})$，$A\in B(\mathbf{R}^m)$。

令 $\delta=\min\{\|T_{\tau}{}'\| : \tau\in E^{(k_0)}_u\}$。下面证明，存在正常数 c_1，使得对于任意的 $F\in B(\mathbf{R}^m)$，当 $\mathrm{diam}\, F<\delta$ 时，有：

$$v(F) \leqslant c_1(\mathrm{diam}\, F)^{\beta^*(a)-\varepsilon}。 \tag{22}$$

为此，令 $\Gamma(F)=\{\sigma\in E^{(*)}_u \,\|\, T_{\sigma}{}'\| < \mathrm{diam}\, F \leqslant \|T'_{\sigma\|\sigma-1|-1}\| \text{ 且 } J_{\sigma}\cap F\cap F_{\alpha,k_0}\neq\emptyset\}$。由式（18）知 $\#\Gamma(F)\leqslant M$。注意到 $\cup_{\sigma\in\Gamma(F)}J_{\sigma}\supset F\cap F_{\alpha,k_0}$。因此，由测度 v 的定义，$v(F)\leqslant \sum_{\sigma\in\Gamma(F)}\hat{\mu}_{u,q}(\pi^{-1}_u(F\cap J_{\sigma})\cap\hat{F}_{\alpha,k_0}) \leqslant \sum_{\sigma\in\Gamma(F)}\hat{\mu}_{u,q}(\pi^{-1}_u(J_{\sigma})\cap\hat{F}_{\alpha,k_0} \leqslant \sum_{\sigma\in\Gamma(F)}\sum_{\|\tau\in\Gamma(F)}\hat{\mu}_{u,q}([\tau]\cap\hat{F}_{\alpha,k_0}) \leqslant MC_q \sum_{\substack{\sigma\in\Gamma(F)\\ [\tau]\cap\hat{F}_{\alpha,k_0}\neq\emptyset}} p^q_{\tau}\|T_{\tau}{}'\|^{\beta}$，其中最后一个不等式利用了式（13）。对于满足 $[\tau]\cap\hat{F}_{\alpha,k_0}\neq 0$ 的 τ，按 $[\tau]$ 的定义知，存在 $\omega\in\hat{F}_{\alpha,k_0}$ 及 $l\in\mathbf{N}$，使得 $\omega|l=\tau$。由 δ 的定义及 $\tau\in\Gamma(F)$ 知 $l\geqslant k_0$。从而，由式（21），有 $v(F)\leqslant MC_q\sum_{\tau\in\Gamma(F)}\|T_{\tau}{}'\|^{\beta+q\alpha-\varepsilon}\leqslant M^2C_q(\mathrm{diam}\, F)^{\beta^*(a)-\varepsilon}$。因此，式（22）成立。再次利用质量分布原理，有 $\dim F_{\alpha,k_0}\geqslant\beta^*(\alpha)-\varepsilon$。从而，由 ε 的任意性知，$\dim F_{\alpha,k_0}\geqslant\beta^*(\alpha)$。又由于 $K^{\alpha}_u\supset F_{\alpha,k_0}$，因此，$\dim K^{\alpha}_u\geqslant\beta^*(\alpha)$。

3）当 $q<0$ 时，任给 $\varepsilon>0$，对于任意的 $\sigma\in\hat{K}^{\alpha}_u$，考虑 $\log p_{\sigma|k}/\log\|T'_{\sigma|k}\|<\sigma-\varepsilon/q$，对所有的

$k \geqslant N(\sigma)$。从而，其证明同前。

综合 1)、2) 和 3)，命题得证。

由命题 1、命题 2 及命题 3，有下面的定理 1。

定理 1 对每个 $u \in V$，设 K_u 为 G 的一个图有向自保形不变集，则在开集条件下，1) 当 $\alpha_{\min} = \alpha_{\max} = \alpha$ 时，$\dim K_\mu^a = \dim K_u = \operatorname{Dim} K_u = \operatorname{Dim} K_u^a = a$；2) 当 $\alpha_{\min} < \alpha_{\max}$ 时，i) 当 $\alpha \in (\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$ 时，$\dim K_u^\alpha = \operatorname{Dim} K_u^\alpha = \beta^*(\alpha)$，ii) $\dim K_u = \operatorname{Dim} K_u = \dim K_u^{\alpha(0)} = \beta(0) = \max_\alpha \beta(\alpha)$。

证明 1) 当 $\alpha_{\min} = \alpha_{\max} = \alpha$ 时，$-\beta'(q) = \alpha(q) = a$，又按定义知 $\beta(1) = 0$，从而 $\beta(q) = a(1-q)$。由命题 1 及命题 2，有 $a = \beta(0) \leqslant \dim K_u^\alpha \leqslant \left\{\begin{matrix}\dim K_u \\ \dim K_u^\alpha\end{matrix}\right\} \leqslant \operatorname{Dim} K_u \leqslant \beta(0) = a$。所以 1) 成立。

2) i) 由命题 3 及命题 1 的 ii 立得。

ii) 当 $\alpha_{\min} < \alpha_{\max}$ 时，一方面，由命题 1 及命题 2，有 $\beta(0) \leqslant \dim K_u^{\alpha(0)} \leqslant \dim K_u \leqslant \operatorname{Dim} K_u \leqslant \beta(0)$。另一方面，对于任意的 $q \in \mathbf{R}$，$\beta^*(\alpha(q)) = q\alpha(q) + \beta(q)$，从而由 ii 及命题 1，又有 $\beta(0) = 0 \cdot \alpha(0) + \beta(0) \leqslant \max\limits_\alpha \beta^*(\alpha) = \max\limits_\alpha \operatorname{Dim} K_u^\alpha \leqslant \operatorname{Dim} K_u \leqslant \beta(0)$。因此 $\beta(0) = \alpha_{\max} \beta^*(\alpha)$，ii) 结论成立。

综合 1)、2)，定理 1 证毕。

注 3 本定理将文献 [3] 的关于无向图的重分形分解推广到有向图情形，模型更一般化。同时，它也把文献 [7] 中关于强开集条件下的图有向自保形结果减弱为开集条件。

[参 考 文 献]

[1] ARBEITER M, PATZSCHKE N. Ramdom self-similar multifractals[J]. Math Nachr, 1996, 181: 5-42.

[2] CAWLEY R, MAULDIN R D. Multifractal decompositions of Moran fractals[J]. Adv Math, 1992, 92: 196-236.

[3] PATZSCHKE N. Self-conformal multifractal measures[J]. Advances in Applied Mathematics, 1997, 19(4): 486-513.

[4] PERES Y, RAMS M, SIMON K, et al. Equivalence of postive Hansdorff measure and the open set condition for self-conformal sets[J]. Proc Amer Marth Soc, 2001, 129(9): 2689-2699.

[5] YE Y L. Separation properties for self-conformal sets[J]. Stud Math, 2002, 152(1): 33-44.

[6] YE Y L. Multifractal of self-conformal measures[J]. Nonlinearity, 2005, 18(5): 2111-2133.

[7] JULIAN C. Graph directed self-conformal multifractals[D]. Scoland: University of St Andrews, 1999.

[8] FALCONER K J. Fractal geometry[M]. New York: John Wiley & Sons, 1990.

[9] HUTCHINSON J E. Fractals and self-similarity[J]. Indiana Univ Math J, 1981, 30(5): 713-747.

[10] BOWEN R. Equilibrium states and the ergodic theorey of Anosov diffeomorphisms[M]. Berlin: Lecture Notes in Math, 1975.

[11] RUELLE D. Thermodynamic formalism: the mathematical structures of classical equilibrium statistical mechanics[J]. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 1978, 5: 59.

[12] FALCONER K J. Random fractals[J]. Math Proc Camb Phil Soc, 1986, 100(3): 559-582.

[13] 郑水草. 关于图有向自保形集的开集条件[J]. 中国科学院大学学报(自然科学版), 2013, 30(4): 443-449.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）