

具有阶段结构的随机捕食-食饵模型

张瑞敏, 魏春金

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 建立一个带有 Beddington-DeAngelis 型功能反应与阶段结构的随机捕食-食饵模型。通过构造 Lyapunov 函数, 证明该系统全局正解的存在唯一性, 得到正解全局渐近稳定的充分条件。最后给出数值模拟来说明噪声强度对种群系统的影响。

[关键词] Beddington-DeAngelis 型功能反应; 阶段结构; Lyapunov 函数; 全局渐近稳定

[中图分类号] O 175.13

Stochastic Predator-Prey System with Stage Structure

ZHANG Ruimin, WEI Chunjin

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, a stochastic predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional response and stage structure were established. It was shown that there existed a unique positive equilibrium point of the system by constructing Lyapunov functions, and sufficient conditions that the positive equilibrium point is globally asymptotically stable were obtained. Finally, numerical simulations were given to illustrate the effect of noise intensity on the population system.

Keywords: Beddington-DeAngelis functional response; stage structure; Lyapunov functions; global asymptotic stability

0 引言

1928年, 文献[1]提出经典的 Lotka-Volterra 模型, 之后种群模型开始受到越来越多的研究者的关注。在生态系统中, 种群之间的关系大致可以分为捕食、互惠以及竞争, 捕食是其中重要的一种关系。捕食者和食饵之间的动力学关系所反映出的现实意义与人类的生活息息相关, 例如病虫害的防治、濒危物种拯救等, 因此, 捕食-食饵模型逐渐成为生物数学中重要的研究课题。近年来, 学者依据现实意义提出许多适用于不同情形的功能反应函数, 并应用于捕食-食饵模型中, 其中 Beddington-DeAngelis 型功能反应是由 Beddington 和 DeAngelis 在 1975 年提出的, 它是依据比率依赖型功能以及 Holling II 功能反应得到, 可以解释大范围内的生态系统的行为^[2]。具有 Beddington-DeAngelis 型功能反应的经典捕食-食饵模型^[3-4]为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x[b_1 - a_{11}x - a_{12}y/(1 + mx + ny)], \\ \dot{y}(t) = y[-b_2 + a_{21}y/(1 + mx + ny) - a_{22}y]. \end{cases} \quad (1)$$

[收稿日期] 2020-12-11

[基金项目] 国家自然科学基金项目 (11971405, 22072057)

[作者简介] 张瑞敏 (1996—), 女, 硕士生, 从事生物数学方向研究。通信作者: 魏春金 (1973—), 女, 教授, 博导, 从事生物数学方向研究。E-mail: chunjinwei92@163.com

其中: $x(t)$ 、 $y(t)$ 分别代表 t 时刻食饵和捕食者的密度; b_i 、 a_{ij} 、 m 、 n ($i, j = 1, 2$) 均为正常数。

在种群中, 由于同一物种的不同阶段在行为和能力上具有不同的表现, 因此, 通常将一个物种分成幼年与成年两类^[5]。对于捕食者来说, 幼年捕食者的身体发育尚不成熟, 通常没有独自外出捕食的能力, 主要依赖它们的父母外出捕食食饵喂养它们; 对于食饵来说, 幼年食饵大部分时间都待在巢穴之中依赖父母的喂养, 因此遇到天敌的概率相对较小, 并且有些捕食者并不喜欢捕食幼年食饵。因此, 本文提出具有阶段结构并且捕食者只捕食成年食饵的模型为:

$$\begin{cases} dx_1(t)/dt = \gamma x_2 - a_1 x_1^2 - b_1 x_1 - d_1 x_1, \\ dx_2(t)/dt = b_1 x_1 - q x_2 y_2 / (1 + m x_2 + n y_2) - d_2 x_2 - a_2 x_2^2, \\ dy_1(t)/dt = \alpha y_2 - d_3 y_1 - a_3 y_1^2 - b_2 y_1, \\ dy_2(t)/dt = b_2 y_1 - d_4 y_2 - a_4 y_2^2 + p x_2 y_2 / (1 + m x_2 + n y_2). \end{cases} \quad (2)$$

其中: $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 分别表示幼年和成年食饵在 t 时刻的密度; $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$ 表示幼年和成年捕食者在 t 时刻的密度; α 、 γ 分别代表食饵和捕食者出生率; a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 代表各自的种群内部竞争率; b_i ($i = 1, 2$) 表示两个物种幼年向成年的转化率; d_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 表示种群的死亡率; q 表示食饵被捕获率; p/q 是营养物质转化为捕食者繁殖速率的比率。

在自然环境中, 种群系统会受到各种随机因素的干扰, 如长时间的干旱或暴雨, 突如其来的人类狩猎等^[6-8]。随机因素的干扰以各种形式、各种强度存在, 这些影响是不可忽视的, 它们可能对系统产生巨大的影响, 甚至可能导致系统的崩溃。因此, 在系统中考虑环境噪声的影响是非常有必要的。

假定 $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$ 是系统 (2) 的正平衡点, 把环境噪声考虑在内, 可以对食饵和捕食者的死亡率加随机, 分别表示为 $d_1 + \sigma_1(x_1 - x_1^*)\dot{B}_1(t)$ 、 $d_2 + \sigma_2(x_2 - x_2^*)\dot{B}_2(t)$ 、 $d_3 + \sigma_3(y_1 - y_1^*)\dot{B}_3(t)$ 、 $d_4 + \sigma_4(y_2 - y_2^*)\dot{B}_4(t)$, 其中: σ_i^2 ($i = 1, 2, 3, 4$) 为环境噪声的强度; $B_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 是定义在完备概率空间 (Ω, F, P) 的标准布朗运动, 并且滤子满足一般性条件, 则相应的随机模型记为:

$$\begin{cases} dx_1(t) = (\gamma x_2 - a_1 x_1^2 - b_1 x_1 - d_1 x_1)dt + \sigma_1 x_1(x_1 - x_1^*)dB_1(t), \\ dx_2(t) = (b_1 x_1 - q x_2 y_2 / (1 + m x_2 + n y_2) - d_2 x_2 - a_2 x_2^2)dt + \sigma_2 x_2(x_2 - x_2^*)dB_2(t), \\ dy_1(t) = (\alpha y_2 - d_3 y_1 - a_3 y_1^2 - b_2 y_1)dt + \sigma_3 y_1(y_1 - y_1^*)dB_3(t), \\ dy_2(t) = (b_2 y_1 - d_4 y_2 - a_4 y_2^2 + p x_2 y_2 / (1 + m x_2 + n y_2))dt + \sigma_4 y_2(y_2 - y_2^*)dB_4(t). \end{cases} \quad (3)$$

其中初始值为 $(x_1(0), x_2(0), y_1(0), y_2(0)) \in \mathbf{R}_+^4$ 。

1 全局正解的存在性

定理 1 对于任意初始值 $(x_1(0), x_2(0), y_1(0), y_2(0)) \in \mathbf{R}_+^4$, 系统 (3) 均依概率 1 具有唯一的全局正解。

证明 可以看出系统的系数是局部 Lipschitz 连续的, 所以对于任意给定正初始值 $(x_1(0), x_2(0), y_1(0), y_2(0))$, 在 $t \in [0, \tau_e)$ 存在唯一一个局部的最大解 $(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$, 其中 τ_e 是爆破时间。为了证明这个解是全局的, 需要证明 $\tau_e = \infty$ 。定义如下停时:

$$\tau_k = \inf \{ t \in (0, \infty), x_i(t) = 1/k \text{ 或 } x_i(t) = k, \text{ 或 } y_i(t) = 1/k \text{ 或 } y_i(t) = k, i = 1, 2 \}. \quad (4)$$

令 $\inf \emptyset = \infty$, 显然 τ_k 在 $k \rightarrow \infty$ 时递增。记 $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$, 显然 $\tau_\infty \leq \tau_e$, 如果可以证明 $\tau_\infty = \infty$, 那么 $\tau_e = \infty$, 且对任意 $t \geq 0$, $(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t)) \in \mathbf{R}_+^4$ 。

下面采用反证法来证明 $\tau_\infty = \infty$ 。若该结论不成立, 则存在常数 $T > 0$ 及 $\varepsilon \in (0, 1)$, 使得 $P\{\tau_\infty \leq T\} > \varepsilon$ 。因此存在正整数 $k_1 \geq k_0$, 使得:

$$P\{\tau_k \leq T\} \geq \varepsilon, k \geq k_1. \quad (5)$$

对于 $u > 0$, 显然有 $u - 1 - \ln u \geq 0$, 定义 C^4 -函数 $V: \mathbf{R}_+^4 \rightarrow \mathbf{R}_+$ 为:

$$V(x_1, x_2, y_1, y_2) = (\sqrt{x_1} - 1 - 0.5 \ln x_1) + (\sqrt{x_2} - 1 - 0.5 \ln x_2) + (\sqrt{y_1} - 1 - 0.5 \ln y_1) + (\sqrt{y_2} - 1 - 0.5 \ln y_2). \quad (6)$$

利用 Itô 公式得:

$$dV = (x_1^{-1/2} - x_1^{-1})dx_1/2 + (x_2^{-1/2} - x_2^{-1})dx_2/2 + (y_1^{-1/2} - y_1^{-1})dy_1/2 + (y_2^{-1/2} - y_2^{-1})dy_2/2 + (-x^{-3/2}/4 + x^{-2}/2) \cdot (dx_1)^2/2 + (-x_2^{-3/2}/4 + x_2^{-2}/2) \cdot (dx_2)^2/2 + (-y_1^{-3/2}/4 + y_1^{-2}/2) \cdot (dy_1)^2/2 + (-y_2^{-3/2}/4 + y_2^{-2}/2) \cdot (dy_2)^2/2, \quad (7)$$

可得: $LV = (x_1^{-1/2} - x_1^{-1})(\gamma x_2 - a_1 x_1^2 - b_1 x_1 - d_1 x_1)/2 + (-x_1^{1/2}/4 + 1/2)\sigma_1^2(x_1 - x_1^*)^2/2 + (x_2^{-1/2} - x_2^{-1})(b_1 x_1 - q x_2 y_2/(1 + m x_2 + n y_2) - d_2 x_2 - a_2 x_2^2)/2 + (y_1^{1/2} - y_1^{-1})(\alpha y_2 - d_3 y_1 - a_3 y_1^2 - b_2 y_1)/2 + (-y_1^{1/2}/4 + 1/2)\sigma_1^2(y_1 - y_1^*)^2/2 + (x_2^{1/2} - y_2^{-1})(b_2 y_1 - d_4 y_2 - a_4 y_2^2 + p x_2 y_2/(1 + m x_2 + n y_2))/2 + (-x_1^{1/2}/4 + 1/2)\sigma_1^2(x_2 - x_2^*)^2/2 + (-y_2^{1/2}/4 + 1/2)\sigma_1^2(y_2 - y_2^*)^2/2 = (x_1^{-1/2} - x_1^{-1})\gamma x_2/2 + (x_2^{-1/2} - x_2^{-1})b_1 x_1/2 + (y_1^{-1/2} - y_1^{-1})\alpha y_2/2 + (y_2^{-1/2} - y_2^{-1})b_2 y_1/2 + (x_1^{1/2} - 1)(-a_1 x_1 - b_1 - d_1)/2 + (x_2^{1/2} - 1)(-q y_2/(1 + m x_2 + n y_2))/2 + (y_1^{-1/2} - y_1^{-1})\alpha y_2 - d_2 - a_2 x_2)/2 + (y_2^{1/2} - 1)(-d_4 - a_4 y_2 + p x_2/(1 + m x_2 + n y_2))/2 + (y_1^{1/2} - 1)(-d_3 - a_3 y_1 - b_2)/2 + (-x_1^{1/2}/4 + 1/2)\sigma_1^2(x_1 - x_1^*)^2/2 + (-x_2^{1/2}/4 + 1/2)\sigma_2^2(x_2 - x_2^*)^2/2 + (-y_1^{1/2}/4 + 1/2)\sigma_3^2(y_1 - y_1^*)^2/2 + (-y_2^{1/2}/4 + 1/2)\sigma_4^2(y_2 - y_2^*)^2/2。观察 $(x_1^{-1/2} - x_1^{-1})\gamma x_2/2$, 如果 $x_1 < 1$, 则 $(x_1^{-1/2} - x_1^{-1})\gamma x_2/2 < 0$, 所以这一项就可以从等号的右侧省略。若 $x_1 > 1$, 则 $(x_1^{-1/2} - x_1^{-1})\gamma x_2/2 < (x_1^{1/2} - 1)\gamma x_2/2$ 。对于 $(x_2^{-1/2} - x_2^{-1})b_1 x_1/2$ 、 $(y_1^{-1/2} - y_1^{-1})\alpha y_2/2$ 、 $(y_2^{-1/2} - y_2^{-1})b_2 y_1/2$, 可同样分析:$

$$\begin{aligned} LV \leq & \gamma x_2(\sqrt{x_1} - 1)/2 + b_1 x_1(\sqrt{x_2} - 1)/2 + \alpha y_2(\sqrt{y_1} - 1)/2 + b_2 y_1(\sqrt{y_2} - 1)/2 + \\ & [-a_1 x_1^{3/2} + a_1 x_1 + b_1 + d_1]/2 + (-a_2 x_2^{3/2} - d_2 x_2^{1/2} + q/n + a_2 x_2 + d_2)/2 + \\ & [-a_3 y_1^{3/2} - (d_3 + b_2)y_1^{1/2} + d_3 + b_2 + a_3 y_1]/2 + [a_4 y_2^{3/2} + (p/n - d_4)y_2^{1/2} + d_4 + a_4 y_2]/2 + \\ & \sigma_1^2(-x_1^{5/2}/4 + x_1^2/2 + x_1^* x_1^{3/2}/2 - x_1^* x_1 - x_1^{*2} x_1^{1/2}/4 + x_1^{*2}/2)/2 + \\ & \sigma_2^2(-x_2^{5/2}/4 + x_2^2/2 + x_2^* x_2^{3/2}/2 - x_2^* x_2 - x_2^{*2} x_2^{1/2}/4 + x_2^{*2}/2)/2 + \\ & \sigma_3^2(-y_1^{5/2}/4 + y_1^2/2 + y_1^* y_1^{3/2}/2 - y_1^* y_1 - y_1^{*2} y_1^{1/2}/4 + y_1^{*2}/2)/2 + \\ & \sigma_4^2(-y_2^{5/2}/4 + y_2^2/2 + y_2^* y_2^{3/2}/2 - y_2^* y_2 - y_2^{*2} y_2^{1/2}/4 + y_2^{*2}/2)/2 \leq \\ & [b_1 x_1^2/2 - a_1 x_1^{3/2} + (a_1 - b_1 + \gamma/2)x_1 + b_1 + d_1]/2 + [\gamma x_2/2 - a_2 x_2^{3/2}/2 - d_2 x_2^{1/2} + \\ & q/n + (a_2 + b_1/2 - \gamma/2)x_2 + d_2]/2 + [b_2 y_1^2/2 - (d_3 + b_2)y_1^{1/2} + (a_3 - b_2 + \alpha/2)y_1]/2 - \\ & a_3 y_1^{3/2} + d_3 + b_2 + [\alpha y_2^2/2 - a_4 y_2^{3/2} + (p/n - d_4)y_2^{1/2} + d_4 + (a_4 - \alpha + b_2/2)y_2]/2 + \\ & \sigma_1^2(-x_1^{5/2}/4 + x_1^2/2 + x_1^* x_1^{3/2}/2 - x_1^* x_1 - x_1^{*2} x_1^{1/2}/4 + x_1^{*2}/2)/2 + \\ & \sigma_2^2(-x_2^{5/2}/4 + x_2^2/2 + x_2^* x_2^{3/2}/2 - x_2^* x_2 - x_2^{*2} x_2^{1/2}/4 + x_2^{*2}/2)/2 + \\ & \sigma_3^2(-y_1^{5/2}/4 + y_1^2/2 + y_1^* y_1^{3/2}/2 - y_1^* y_1 - y_1^{*2} y_1^{1/2}/4 + y_1^{*2}/2)/2 + \\ & \sigma_4^2(-y_2^{5/2}/4 + y_2^2/2 + y_2^* y_2^{3/2}/2 - y_2^* y_2 - y_2^{*2} y_2^{1/2}/4 + y_2^{*2}/2)/2 \leq K. \end{aligned} \quad (8)$$

因为式(8)最高次项的系数均为负, 可知最后一个不等式是成立的, 对式(7)两边同时从0到 $\tau_k \wedge T$ 积分并取期望得, $EV(x_1(\tau_k \wedge T), x_2(\tau_k \wedge T), y_1(\tau_k \wedge T), y_2(\tau_k \wedge T)) \leq V(x_1(0), x_2(0), y_1(0), y_2(0)) + KT$ 。

对 $k \geq k_1$, 令 $\Omega_k = \{\tau_k \leq T\}$ 。由式(5)知, $P(\Omega_k) \geq \varepsilon$ 。由 τ_k 的定义知, 对每个 $\omega \in \Omega_k$, $x(\tau_k, \omega)$ 或 $y(\tau_k, \omega)$ 等于 $1/k$ 或 k , 从而 $V(x_1(0), x_2(0), y_1(0), y_2(0)) + KT \geq E[I_{\Omega_k} V(x_1(\tau_k), x_2(\tau_k), y_1(\tau_k), y_2(\tau_k))] \geq \varepsilon[\sqrt{k} - 1 - 0.5 \ln(k)] \wedge [\sqrt{1/k} - 1 - 0.5 \ln(1/k)]$, 其中 I_{Ω_k} 表示 Ω_k 上的示性函数。令 $k \rightarrow \infty$, 可得 $V(x_1(0), x_2(0), y_1(0), y_2(0)) + KT \geq \infty$, 这与 $V(x_1(0), x_2(0), y_1(0), y_2(0)) + KT < \infty$ 矛盾, 因

此 $\tau_{\infty} = \infty$, 定理 1 得证。

2 全局行为

假定 $z = z(t)$ 是随机微分方程

$$dz(t) = f(z(t), t)dt + g(z(t), t)dB(t) \quad (9)$$

的解, 且 z^* 是式(9)的平衡点。

通过随机微分方程的稳定理论^[9], 要证明解是全局随机渐近稳定, 仅需找到李雅普诺夫函数 $V(z)$ 满足: $LV(z) \leq 0$ 当且仅当 $z = z^*$ 、 $z = z(t)$ 是方程(9)的解, $dV(z(t), t) = LVdt + V_z(z(t), t)g(t)dB(t)$ 。

定理 2 若 $a_1 - \sigma_1^2/2 > 0$ 、 $a_3 - \sigma_3^2/2 > 0$ 、 $a_4 - \sigma_4^2/2 > 0$ 、 $a_2 - \sigma_2^2/2 - qmy_2^*/(1 + mx_2^* + ny_2^*) > 0$ 成立, 则系统(3)的正平衡点 $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$ 是依概率 1 全局随机渐近稳定的。

证明 系统(3)可以被重写为:

$$\begin{cases} dx_1(t) = \gamma/x_1^*[x_1(x_2 - x_2^*) - x_2(x_1 - x_1^*)]dt - a_1x_1(x_1 - x_1^*)dt + \sigma_1x_1(x_1 - x_1^*)dB_1(t), \\ dx_2(t) = b_1/x_2^*[x_2(x_1 - x_1^*) - x_1(x_2 - x_2^*)]dt - a_2x_2(x_2 - x_2^*)dt + \sigma_2x_2(x_2 - x_2^*)dB_2(t) - \\ \quad qx_2[my_2^*(x_2 - x_2^*) - (1 + mx_2^*)(y_2 - y_2^*)]/[(1 + mx_2^* + ny_2^*)(1 + mx_2 + ny_2)]dt, \\ dy_1(t) = \alpha/y_1^*[y_1(y_2 - y_2^*) - y_2(y_1 - y_1^*)]dt - a_3y_1(y_1 - y_1^*)dt + \sigma_3y_1(y_1 - y_1^*)dB_3(t), \\ dy_2(t) = b_2/y_2^*[y_2(y_1 - y_1^*) - y_1(y_2 - y_2^*)]dt - a_4y_2(y_2 - y_2^*)dt + \sigma_4y_2(y_2 - y_2^*)dB_4(t) + \\ \quad py_2[(1 + ny_2^*)(x_2 - x_2^*) - nx_2^*(y_2 - y_2^*)]/[(1 + mx_2^* + ny_2^*)(1 + mx_2 + ny_2)]dt. \end{cases}$$

定义 $V(x_1, x_2, y_1, y_2) = c_1(x_1 - x_1^* - x_1^* \ln(x_1/x_1^*)) + c_2(x_2 - x_2^* - x_2^* \ln(x_2/x_2^*)) + c_3(y_1 - y_1^* - y_1^* \ln(y_1/y_1^*)) + c_4(y_2 - y_2^* - y_2^* \ln(y_2/y_2^*))$, 其中 $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为待定的正数。对重写的系统应用 Itô 公式可得:

$$\begin{aligned} LV = & c_1\{ (x_1 - x_1^*)\gamma[(x_2 - x_2^*) - x_2(x_1 - x_1^*)/x_1]/x_1^* - a_1(x_1 - x_1^*)^2\} + c_1\sigma_1^2(x_1 - x_1^*)^2/2 + \\ & c_2\{ (x_2 - x_2^*)b_1[(x_1 - x_1^*) - x_1(x_2 - x_2^*)/x_2]/x_2^* - a_2(x_2 - x_2^*)^2\} + c_2\sigma_2^2(x_2 - x_2^*)^2/2 - \\ & c_2q(x_2 - x_2^*)[my_2^*(x_2 - x_2^*) - (1 + mx_2^*)(y_2 - y_2^*)]/[(1 + mx_2^* + ny_2^*)(1 + mx_2 + ny_2)] + \\ & c_3\{ (y_1 - y_1^*)\alpha[(y_2 - y_2^*) - y_2(y_1 - y_1^*)/y_1]/y_1^* - a_3(y_1 - y_1^*)^2\} + c_3\sigma_3^2(y_1 - y_1^*)^2/2 + \\ & c_4\{ (y_2 - y_2^*)b_2[(y_1 - y_1^*) - y_1(y_2 - y_2^*)/y_2]/y_2^* - a_4(y_2 - y_2^*)^2\} + c_4\sigma_4^2(y_2 - y_2^*)^2/2 + \\ & c_4p(y_2 - y_2^*)[(1 + ny_2^*)(x_2 - x_2^*) - nx_2^*(y_2 - y_2^*)]/[(1 + mx_2^* + ny_2^*)(1 + mx_2 + ny_2)]。 \quad (10) \end{aligned}$$

取 $c_1 = x_2^*/b_2$ 、 $c_2 = x_1^*/\gamma$ 、 $c_3 = y_1^*/\alpha$ 、 $c_4 = y_2^*/b_2$, 代入式(10)可得:

$$\begin{aligned} LV = & [-x_2(x_1 - x_1^*)^2/x_1 + 2(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) - x_1(x_2 - x_2^*)^2/x_2] - c_1(a_1 - \sigma_1^2/2)(x_1 - x_1^*)^2 - \\ & c_2(a_2 - \sigma_2^2/2)(x_2 - x_2^*)^2 + c_2qmy_2^*(x_2 - x_2^*)^2/[(1 + mx_2^* + ny_2^*)(1 + mx_2 + ny_2)] - \\ & c_4(a_4 - \sigma_4^2/2)(y_2 - y_2^*)^2 + [-y_2(y_1 - y_1^*)^2/y_1 + 2(y_1 - y_1^*)(y_2 - y_2^*) - y_1(y_2 - y_2^*)^2/y_2] - \\ & c_4pnx_2^*(y_2 - y_2^*)^2/[(1 + mx_2^* + ny_2^*)(1 + mx_2 + ny_2)] - c_3(a_3 - \sigma_3^2/2)(y_1 - y_1^*)^2 \leq \\ & -[\sqrt{x_2/x_1}(x_1 - x_1^*) - \sqrt{x_1/x_2}(x_2 - x_2^*)]^2 - c_1(a_1 - \sigma^2/2)(x_1 - x_1^*)^2 - c_2(a_2 - \sigma_2^2/2) \\ & (x_2 - x_2^*)^2 + c_2qmy_2^*(x_2 - x_2^*)^2/[(1 + mx_2^* + ny_2^*)(1 + mx_2 + ny_2)] - [\sqrt{y_2/y_1}(y_1 - y_1^*) - \\ & \sqrt{y_1/y_2}(y_2 - y_2^*)]^2 - c_3(a_3 - \sigma_3^2/2)(y_1 - y_1^*)^2 - c_4(a_4 - \sigma_4^2/2)(y_2 - y_2^*)^2 \leq \\ & -c_1(a_1 - \sigma_1^2/2)(x_1 - x_1^*)^2 - c_2[a_2 - \sigma_2^2/2 - qmy_2^*/(1 + mx_2^* + ny_2^*)](x_2 - x_2^*)^2 - \\ & c_3(a_3 - \sigma_3^2/2)(y_1 - y_1^*)^2 - c_4(a_4 - \sigma_4^2/2)(y_2 - y_2^*)^2。 \end{aligned}$$

应用定理 2 中的条件可得: $LV \leq 0$ 当且仅当 $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$, 可得正平衡点是全局随机渐近稳定的。

3 数值模拟

取参数为: $\gamma=0.97$, $a_1=a_2=0.03$, $b_1=0.90$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0.10$, $q=0.15$, $\alpha=0.80$, $a_3=a_4=0.20$, $p=0.15$, $b_2=0.80$, $m=n=0.20$, 初始值取为 $(x_1(0), x_2(0), y_1(0), y_2(0)) = (1, 1, 1, 1)$ 。得到模型 (3) 所对应的确定性方程的平衡点 $E \approx (10.62, 14.43, 2.26, 4.042)$, 确定性方程的轨线图见图 1。

为了考察环境噪声对种群密度的影响, 本文考虑以下 3 种情况: 1) $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=0.01$; 2) $\sigma_1=0.10$, $\sigma_2=0.02$, $\sigma_3=0.15$, $\sigma_4=0.20$; 3) $\sigma_1=0.20$, $\sigma_2=0.20$, $\sigma_3=0.30$, $\sigma_4=0.35$ 。代入所求得平衡点, 用 MATLAB 作出随机模型的轨线图, 并通过改变参数的值来观察环境噪声对种群系统的影响, 结果分别见图 2~图 4。

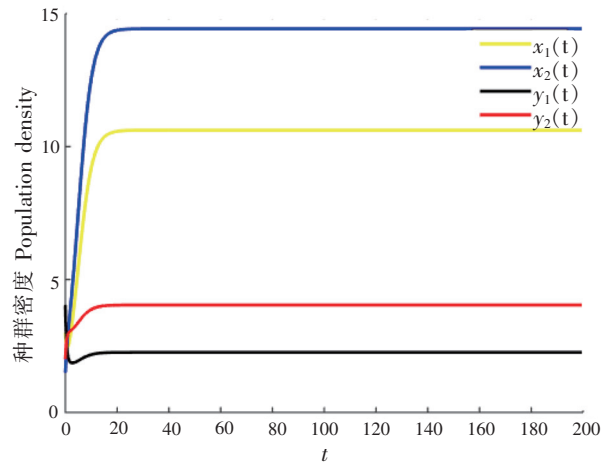


图 1 确定性系统的轨线图

Fig.1 Track chart of deterministic system

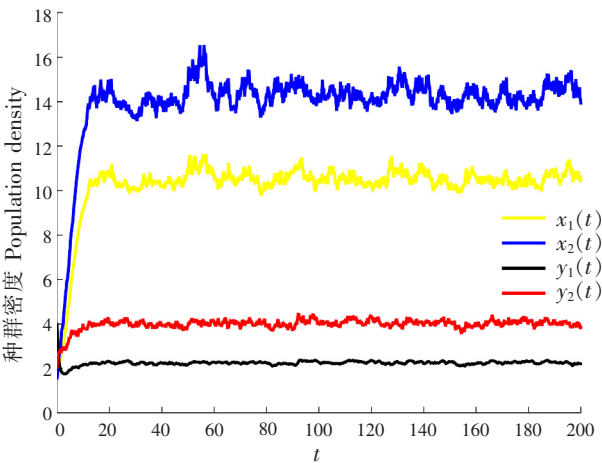


图 2 模型(3)的轨线图(情形 1)

Fig.2 Track chart of system (3) (case 1)

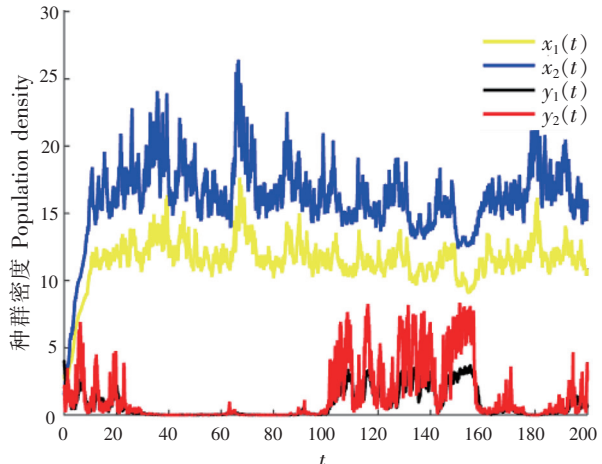


图 3 模型(3)的轨线图(情形 2)

Fig.3 Track chart of system (3) (case 2)

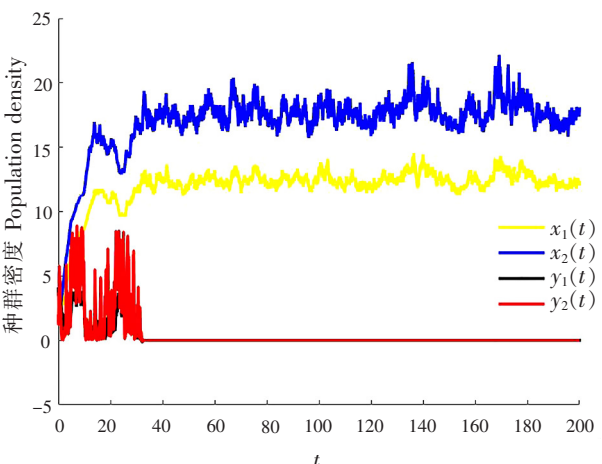


图 4 模型(3)的轨线图(情形 3)

Fig.4 Track chart of system (3) (case 3)

不同情形下种群密度的对比见图 5, 通过观察图 5 可以得到, 随机微分方程解的振荡程度与环境噪声的强度呈正相关。如果环境噪声强度比较小, 随机模型 (3) 的解会围绕着确定性模型的平衡点小幅度地振荡 (见图 2); 如果环境噪声强度相对较大, 随机模型 (3) 的解会围绕着确定性模型的平衡点大幅度振荡 (见图 3), 甚至会造成捕食者灭绝 (见图 4)。因此, 如果想要维持一个生态系统稳定, 不出现大幅度的波动或物种的灭绝, 应该尽量减少环境对系统干扰, 或者减少环境变量的变化。

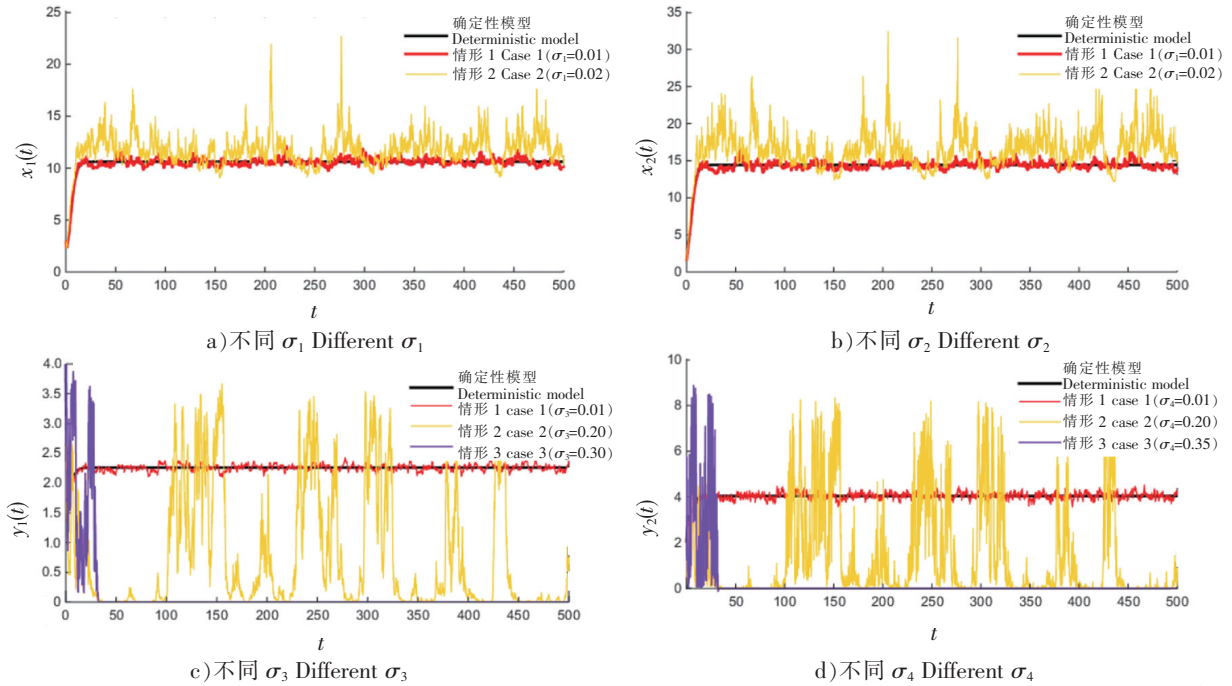


图 5 不同情形下种群密度对比图

Fig.5 Comparison of population density in different cases

4 结论

本文提出并研究具有阶段结构和 Beddington-DeAngelis 型功能反应的随机捕食-食饵模型。构造出合适的 Lyapunov 函数，并运用 Itô 公式证明模型(3)全局正解的存在唯一性，并且推导出正解是全局渐近稳定的充分条件。利用数值模拟得出，在捕食者与食饵共存的情况下，噪声强度对系统的影响为：当噪声强度比较小时，解曲线沿着平衡点轻微振荡；当噪声强度比较大时，解曲线沿着平衡点剧烈振荡，甚至造成种群灭绝。为了生态系统的稳定与持久，一般希望物种保持相对稳定，不要出现太大波动，根据数值模拟的结果得到，应尽量保持较小的环境噪声，可以人为降低大的环境干扰。

[参考文献]

- [1] VOLTERRA V. Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together[J]. Ices Journal of Marine Science, 1928, 3: 3-51.
- [2] 丰莹莹. 具有 Beddington-DeAngelis 型功能反应的三种群捕食模型的稳定性分析[D]. 郑州: 郑州大学, 2016.
- [3] BEDDINGTON J R. Mutual interference between parasites or predators and its effect on searching efficiency[J]. Journal of Animal Ecology, 1975, 44: 331-340.
- [4] DEANGELIS D L, GOLDSTEIN R A, O'NEILL R V. A model for trophic interacting[J]. Ecology, 1975, 56: 811-892.
- [5] BAI H F, XU R. Global stability of an eco-epidemiological model with Beddington-DeAngelis functional response and delay [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2019, 34(4): 397-409.
- [6] 王克. 随机生物数学模型[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [7] FRIEDMAN A. Stochastic differential equations and applications[M]. New York: Academic Press, 1976.
- [8] 陈哲文, 魏春金, 张树文. 具有心理效应的随机扰动捕食-食饵模型[J]. 集美大学学报(自然科学版), 2020, 25(1): 69-75.
- [9] MAO X R. Stochastic differential equations and applications [M]. Sawston: Woodhead Publishing, 2007.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)