

时标上高阶神经网络的同步

陈秋媛, 宾红华, 黄振坤

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究时标上高阶神经网络的同步问题, 通过构造李雅普诺夫函数和运用线性矩阵不等式技巧, 给出高阶神经网络在脉冲控制下达到同步的充分条件。最后给出一个例子, 验证了数值模拟结果的准确性。

[关键词] 高阶神经网络; 同步; 脉冲控制; 时标

[中图分类号] O 193

Synchronization of High-Order Neural Networks on Time Scales

CHEN Qiuyuan, BIN Honghua, HUANG Zhenkun

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The synchronization problem of high-order neural networks on time scales was investigated. By constructing a Lyapunov function and employing linear matrix inequality (LMI) techniques, the sufficient condition for the synchronization of high-order neural networks under impulsive control was obtained. Finally, an example was given to verify the accuracy of the results by numerical simulation.

Keywords: high-order neural networks; synchronization; impulsive control; time scale

0 引言

众所周知, 同步在安全通信、人工智能和图像处理等^[1-10]的实际应用非常广泛。近年来, 越来越多的学者研究神经网络的同步问题, 如投影同步^[1]、滞后同步^[2]、量化同步^[3]、自同步^[6]和指数同步^[7]等。

高阶神经网络作为低阶神经网络的扩展, 比低阶神经网络具有更强的收敛性和更大的存储容量, 因而成为一个新的研究热点。高阶神经网络包括高阶中立型细胞神经网络、高阶 Cohen-Grossberg 神经网络、高阶 Hopfield 神经网络和高阶递归神经网络等^[6-20]。Hopfield 神经网络^[9-10]最先由 Hopfield 提出, 它基于由电容、电阻和放大器组成的模拟电路, 建立了一个常微分方程组。文献[8]提出了一种具有线性项和间断项的新型控制方案, 解决了时变时滞记忆型高阶竞争神经网络的同步问题。文献[16]研究了一类双向联想记忆高阶神经网络的有限时间稳定和固定时间稳定问题。特别地, 文献[12]分析了脉冲高阶 Hopfield 神经网络稳定性, 通过构造李雅普诺夫函数和应用线性矩阵不等式, 给出了平衡点达到全局渐近稳定的充分条件。

许多关于微分方程的结果很容易转化为差分方程的相应结果, 而这些结果与连续的结果在性质上完全不同。时标是研究连续系统和离散系统的有效手段, 对时标上的动力学方程的研究揭示了这种差

[收稿日期] 2020-12-28

[基金项目] 国家自然科学基金项目(61573005); 福建省自然科学基金项目(2018J01417, 2019J01330)

[作者简介] 陈秋媛(1996—), 女, 硕士生, 从事复杂网络分析与控制研究。通信作者: 宾红华(1966—), 女, 教授, 硕导, 从事复杂网络分析与控制研究。E-mail: hhhbin@jmu.edu.cn

异,并有助于避免对微分方程和差分方程的结果进行两次证明。上述文献大都在连续系统上研究高阶神经网络的稳定性,对离散系统的关注较少。因此,在时标理论基础上研究高阶神经网络的同步问题很有必要。经过多年的研究,Hilger 提出的时标理论已经取得了许多成果^[21-24],但时标上高阶神经网络的同步尚未得到研究。因此,本文在文献 [12] 和时标微积分理论的基础上,讨论时标上高阶神经网络驱动-响应系统在脉冲控制下达到同步的充分条件,为时标上高阶神经网络的同步研究提供了理论基础。

1 预备知识

时标 T 为实数集 \mathbf{R} 的任意非空闭子集,其拓扑结构继承自 \mathbf{R} 。时标上的跳跃算子 $\sigma(t)$ 和 $\rho(t)$ 的定义分别为: $\sigma(t) = \inf\{s \in T: s > t\}$, $\rho(t) = \sup\{s \in T: s < t\}$ 。粒度函数(距离函数)定义为 $\mu(t) = \sigma(t) - t$ 。若 $\sigma(t) = t(\rho(t) = t)$,则 t 是右稠密点(左稠密点);若 $\sigma(t) > t(\rho(t) < t)$,则 t 是右扩散点(左扩散点)。如果 T 有一个最大的左扩散点 m ,则 $T^k = T \setminus \{m\}$;否则 $T^k := T$ 。函数 $f: T \rightarrow \mathbf{R}$ 被称为 rd-连续,如果其在 T 中的右稠密点连续,且在 T 中左稠密点的左极限存在。 C_{rd} 表示由所有的 rd-连续函数组成的集合。若 $p(t) \in C_{rd}$ 且 $1 + \mu(t)p(t) \neq 0, \forall t \in T$,那么称 $p \in \mathbf{R}$ 。此外,若 $1 + \mu(t)p(t) > 0$,那么 $p \in \mathbf{R}^+$ 。对实数集 \mathbf{R} 上的任意区间 $[a, b]$, $[a, b]_T$ 表示区间 $[a, b]$ 和时标 T 的交集,即 $[a, b]_T = [a, b] \cap T$ 。

定义 1^[24] 给定函数 $f: T \rightarrow \mathbf{R}$ 且 $t \in T^k$ 。对任意 $\varepsilon > 0$,若存在 $f^\Delta(t)$,对于 t 的某个邻域 U ,使得 $|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \forall s \in U$,那么称它为 f 在 t 处的 Δ -导数。

定义 2^[24] 对于 $p \in \mathbf{R}$,时标型指数函数 $e_p(t, s)$ 定义为 $e_p(t, s) = \exp(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau), \forall s, t \in T$,其中柱面变换 $\xi_h(z)$ 的表达式为 $\xi_h(z) = \begin{cases} \text{Log}(1 + zh)/h, & h \neq 0, \\ z, & h = 0. \end{cases}$

引理 1^[24] 若 f 和 g 是两个在时标 T 上 Δ 可导的函数,则: i) $(f \pm g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) \pm g^\Delta(t)$; ii) $(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = g^\Delta(t)f(t) + g(\sigma(t))f^\Delta(t)$ 。若 f 在 t 点可导,则 $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t)$ 。

引理 2^[24] 对于 $p, q \in \mathbf{R}$,有: i) $e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$; ii) $e_p(t, s)e_p(s, r) = e_p(t, r)$; iii) 若 $p \in \mathbf{R}^+$,则 $e_p(t, t_0) > 0, \forall t \in T$ 。

引理 3^[24] 设 $y \in C_{rd}$,且 $p \in \mathbf{R}^+$,若 $y^\Delta(t) \leq p(t)y(t), t \in T$ 成立,则 $y(t) \leq y(t_0)e_p(t, t_0)$ 。

2 模型描述

考虑由 n 个节点构成的高阶神经网络,其驱动系统为

$$\mathbf{x}_i^\Delta(t) = -\mathbf{C}_i \mathbf{x}_i(t) + \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{ij} g_j(\mathbf{x}_j(t))) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n [\mathbf{A}_{ijl} g_j(\mathbf{x}_j(t)) g_l(\mathbf{x}_l(t))] + \mathbf{I}_i(t). \quad (1)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, n; t \in T; \mathbf{x}_i(t)$ 是时间 t 第 i 个神经元的状态量; $g_i(x_i(t))$ 和 $h_i(x_i(t))$ 是神经激活函数; $\mathbf{C}_i > 0$ 和 \mathbf{I}_i 分别表示第 i 个节点的自反馈权重和外部输入量; \mathbf{A}_{ij} 、 \mathbf{W}_{ij} 和 \mathbf{A}_{ijl} 、 \mathbf{W}_{ijl} 分别表示神经网络的一阶和二阶神经元的权重。

对应的响应系统为

$$\begin{cases} \mathbf{y}_i^\Delta(t) = -\mathbf{C}_i \mathbf{y}_i(t) + \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{ij} g_j(\mathbf{y}_j(t))) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n [\mathbf{A}_{ijl} g_j(\mathbf{y}_j(t)) g_l(\mathbf{y}_l(t))] + \mathbf{I}_i(t), & t \neq t_k, \\ \Delta \mathbf{y}_i(t) = d_i(\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_i(t)) + \sum_{j=1}^n [\mathbf{W}_{ij}(h_j(\mathbf{y}_j(t)) - h_j(\mathbf{x}_j(t)))] + \\ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \{\mathbf{W}_{ijl}[h^j(\mathbf{y}_j(t)) h_l(\mathbf{y}_l(t)) - h_j(\mathbf{x}_j(t)) h_l(\mathbf{x}_l(t))]\}, & t = t_k. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $t \in T$; $\Delta y_i(t_k) = y_i(t_k^+) - y_i(t_k)$; $y_i(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} y_i(t)$, $k \in \mathbf{N}^+$; 时间序列 $\{t_k\}$ 满足 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ 。

假设1 假定系统(1)的神经激活函数 $g_i(x_i)$ 和 $h_i(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 是连续的, 且满足以下条件, 即

$$\begin{cases} |g_i(x_i)| \leq M_i, 0 \leq (g_i(x_i) - g_i(y_i))/(x_i - y_i) \leq K_i, \forall x_i \neq y_i, x_i, y_i \in \mathbf{R}, \\ |h_i(x_i)| \leq N_i, 0 \leq (h_i(x_i) - h_i(y_i))/(x_i - y_i) \leq L_i, \forall x_i \neq y_i, x_i, y_i \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (3)$$

设 $e_i(t) = y_i(t) - x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 可得

$$\begin{aligned} e_i^\Delta(t) &= -C_i e_i(t) + \sum_{j=1}^n \{A_{ij} [g_j(y_j(t)) - g_j(x_j(t))]\} + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \{A_{ijl} [g_j(y_j(t)) g_l(y_l(t)) - \\ &g_j(x_j(t)) g_l(x_l(t))]\} = -C_i e_i(t) + \sum_{j=1}^n (A_{ij} f_j(e_j(t))) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \{A_{ijl} [g_j(y_j(t)) g_l(y_l(t)) - \\ &g_j(x_j(t)) g_l(x_l(t)) - g_j(y_j(t)) g_l(x_l(t)) + g_j(y_j(t)) g_l(x_l(t))]\} = -C_i e_i(t) + \\ &\sum_{j=1}^n (A_{ij} f_j(e_j(t))) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \{A_{ijl} [g_l(y_l(t)) - g_l(x_l(t))] g_j(y_j(t)) + A_{ijl} [g_l(y_l(t)) - \\ &g_l(x_l(t))] g_j(x_j(t))\} = -C_i e_i(t) + \sum_{j=1}^n (A_{ij} f_j(e_j(t))) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n [g_l(y_l(t)) - g_l(x_l(t))] \\ &[A_{ijl} g_j(y_j(t)) + A_{ijl} g_j(x_j(t))] = -C_i e_i(t) + \sum_{j=1}^n (A_{ij} f_j(e_j(t))) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n (A_{ijl} + A_{ijl}) \zeta_j f_l(e_l(t)), \\ \Delta e_i(t) &= e_i(t_k^+) - e_i(t_k) = [y_i(t_k^+) - x_i(t_k^+)] - [y_i(t_k) - x_i(t_k)] = y_i(t_k^+) - y_i(t_k) = \Delta y_i(t) = \\ &d_i e_i(t) + \sum_{j=1}^n (W_{ij} \varphi_j(e_j(t))) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n [(W_{ijl} + W_{ijl}) \varphi_l(e_l(t)) \xi_j]. \end{aligned}$$

故系统(1)和(2)的误差系统为

$$\begin{cases} e_i^\Delta(t) = -C_i e_i(t) + \sum_{j=1}^n (A_{ij} f_j(e_j(t))) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n ((A_{ijl} + A_{ijl}) f_l(e_l(t)) \zeta_j), t \neq t_k, \\ \Delta e_i(t) = d_i e_i(t) + \sum_{j=1}^n (W_{ij} \varphi_j(e_j(t))) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n (((W_{ijl} + W_{ijl}) \varphi_l(e_l(t)) \xi_j), t = t_k. \end{cases} \quad (4)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, n$; $t \in T$; $f_i(e_i(t)) = f_i(g_i(t)) - g_i(x_i(t))$; $\varphi_i(e_i(t)) = h_i(y_i(t)) - h_i(x_i(t))$; ζ_j 介于 $g_j(x_j(t))$ 和 $g_j(y_j(t))$ 之间; ξ_j 介于 $h_j(x_j(t))$ 和 $h_j(y_j(t))$ 之间。

注1 根据函数的凸性和 $A_{ijl}/(A_{ijl} + A_{ijl}) + A_{ijl}/(A_{ijl} + A_{ijl}) = 1$, 存在 ζ_j 介于 $g_j(x_j(t))$ 和 $g_j(y_j(t))$ 之间, 使得 $A_{ijl} g_j(x_j(t)) + A_{ijl} g_j(y_j(t)) = (A_{ijl} + A_{ijl}) \zeta_j$ 成立。

相应地, 假设1可改写成:

$$\begin{cases} |f_i(z)| \leq K_i |z|, z f_i(z) \geq 0, \forall z \in \mathbf{R}, \\ |\varphi_i(z)| \leq L_i |z|, z \varphi_i(z) \geq 0, \forall z \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

设 $e(t) = (e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t))^T$, $\Delta e(t) = (\Delta e_1(t), \Delta e_2(t), \dots, \Delta e_n(t))^T$, $f(e(t)) = (f_1(e_1(t)), f_2(e_2(t)), \dots, f_n(e_n(t)))^T$, $\varphi(e(t)) = (\varphi_1(e_1(t)), \varphi_2(e_2(t)), \dots, \varphi_n(e_n(t)))^T$, $F(e(t)) = \text{diag}(f(e(t)), f(e(t)), \dots, f(e(t)))$, $\Phi(e(t)) = \text{diag}(\varphi(e(t)), \varphi(e(t)), \dots, \varphi(e(t)))$, $C = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_n)$, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^T$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$, $\Gamma = \text{diag}(\zeta, \zeta, \dots, \zeta)$, $A = (A_{ij})_{n \times n}$, $A_i = (A_{ijl})_{n \times n}$, $A_H = (A_1 + A_1^T, A_2 + A_2^T, \dots, A_n + A_n^T)^T$, $W = (W_{ij})_{n \times n}$, $W_i = (W_{ijl})_{n \times n}$, $\Xi = (W_1 + W_1^T, W_2 + W_2^T, \dots, W_n + W_n^T)^T$, $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)^T$, $N = (N_1, N_2, \dots, N_n)^T$, $L = \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_n)$, $K = \text{diag}(K_1, K_2, \dots, K_n)$ 。则误差系统(4)可写成等价形式为

$$\begin{cases} e^\Delta(t) = -Qe(t) + Af(e(t)) + F^T(e(t))A_H\zeta, t \neq t_k, \\ \Delta e(t) = De(t) + W\varphi(e(t)) + \Phi^T(e(t))\Xi\xi, t = t_k, t \in T. \end{cases} \quad (6)$$

这里, 对于矩阵 P , $\lambda_{\min}(P)$ 和 $\lambda_{\max}(P)$ 分别表示方阵 P 的最小和最大特征值。范数 $\|\cdot\|$ 是欧几里得范数, e 表示单位矩阵。

3 主要结果

定理 1 在假设 1 的条件下, 如果

$$\begin{cases} \lambda(t) = \dot{a} + \dot{b}\mu(t) < 0, \\ 1 + \mu(t)\lambda(t) > 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \varrho^{N_\gamma(t_0, t)} e_\lambda(t, t_0) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

成立, 则系统 (1) 和 (2) 能在时标上实现同步。其中 $\varrho = \lambda_{\max}[(1 + \|N\|)(E + D) + \|LW^T(E + D) + (E + D)WL + (3/2 + 3/2\|N\|^2)L\Xi^T\Xi L + (3/2 + \|N\|^2/2)LW^TWL]$, $\dot{a} = \lambda_{\max}(-2C + AK + KA^T + \|M\|^2I + KA_H^T A_H K)$, $\dot{b} = \lambda_{\max}[(1 + \|M\|^2)C^2 - (CAK + KA^T C) + (3/2 + 3/2\|M\|^2)KA_H^T A_H K + (3/2 + \|M\|^2/2)KA^T AK]$, $N_\gamma(t_0, t)$ 是脉冲序列 $\gamma = \{t_1, t_2, \dots\}$ 在区间 $[t_0, t]_T$ 的脉冲个数。

证明 构造 Lyapunov 函数为 $V(t) = e^T(t)e(t)/2$ 。利用引理 1 得: $V^\Delta(t) = [e^{T\Delta}(t)e(t) + e^T(\sigma(t))e^\Delta(t)]/2 = [e^T(t) + e^T(\sigma(t))]e^\Delta(t)/2 = [2e^T(t) + \mu(t)e^{T\Delta}(t)]e^\Delta(t)/2 = e^T(t)e^\Delta(t) + \mu(t)e^{T\Delta}(t)e^\Delta(t)/2$ 。当 $t \in [t_{k-1}, t_k)_T (k \in \mathbf{N}^+)$ 时, 对 $V(t)$ 沿系统 (6) 的轨道求导。由 $2u^T v \leq u^T u + v^T v$, $I^T I \leq \|\zeta\|^2 I$ 和 $\|\zeta\| \leq \|M\|$ 可得

$$\begin{aligned} e^T(t)e^\Delta(t) &= e^T(t)(-Ce(t) + Af(e(t)) + F^T(e(t))A_H \zeta) = -e^T(t)Ce(t) + e^T(t)Af(e(t)) + \\ &e^T(t)F^T(e(t))A_H \zeta \leq -e^T(t)Ce(t) + e^T(t)AK e(t) + e^T(t)I^T A_H f(e(t)) \leq -e^T(t)Ce(t) + \\ &e^T(t)(AK + KA^T)e(t)/2 + e^T(t)I^T I e(t)/2 + f^T(e(t))A^T A_H f(e(t))/2 \leq -e^T(t)Ce(t) + \\ &e^T(t)(AK + KA^T)e(t)/2 + \|M\|^2 e^T(t)e(t)/2 + e^T(t)KA^T A_H Ke(t)/2 = e^T(t)(-2C + AK + KA^T + \\ &\|M\|^2 I + KA^T A_H K)e(t)/2 \leq \lambda_{\max}(-2C + AK + KA^T + \|M\|^2 I + KA^T A_H K)V(t) = \dot{a}V(t), \end{aligned} \quad (8)$$

且有

$$\begin{aligned} e^{T\Delta}(t)e^\Delta(t) &= [-e^T(t)C + f^T(e(t))A^T + \zeta^T A_H^T F(e(t))][-Ce(t) + Af(e(t)) + F^T(e(t))A_H \zeta] = \\ &e^T(t)C^2 e(t) - e^T(t)CAf(e(t)) - e^T(t)CF^T(e(t))A_H \zeta - f^T(e(t))A^T Ce(t) + f^T(e(t))A^T Af(e(t)) + \\ &f^T(e(t))A^T F^T(e(t))A_H \zeta - \zeta^T A_H^T F(e(t))Ce(t) + \zeta^T A_H^T F(e(t))Af(e(t)) + \zeta^T A_H^T F(e(t))F^T(e(t))A_H \zeta \leq \\ &e^T(t)C^2 e(t) - e^T(t)(CAK + KA^T C)e(t)/2 + \|M\|^2 e^T(t)e(t)/2 + e^T(t)KA_H^T A_H Ke(t)/2 - \\ &e^T(t)(CAK + KA^T C)e(t)/2 + e^T(t)KA^T A_H Ke(t) + \|M\|^2 e^T(t)KA^T A_H Ke(t)/2 + e^T(t)KA_H^T A_H Ke(t)/2 + \\ &e^T(t)KA_H^T A_H Ke(t)/2 + \|M\|^2 e^T(t)C^2 e(t)/2 + e^T(t)KA^T A_H Ke(t)/2 + \|M\|^2 e^T(t)KA_H^T A_H Ke(t)/2 + \\ &\|M\|^2 e^T(t)KA_H^T A_H Ke(t) = e^T(t)[C^2 - (CAK + KA^T C) + \|M\|^2 C^2 + (3/2 + 3/2\|M\|^2)KA_H^T A_H K + \\ &(3/2 + \|M\|^2/2)KA^T AK]e(t) \leq \lambda_{\max}[(1 + \|M\|^2)C^2 - (CAK + KA^T C) + (3/2 + \\ &3/2\|M\|^2)KA_H^T A_H K + (3/2 + \|M\|^2/2)KA^T AK]e^T(t)e(t). \end{aligned} \quad (9)$$

于是有

$$\begin{aligned} \mu(t)e^{T\Delta}(t)e^\Delta(t)/2 &\leq \lambda_{\max}[(1 + \|M\|^2)C^2 - (CAK + KA^T C) + (3/2 + 3/2\|M\|^2)KA_H^T A_H K + \\ &(3/2 + \|M\|^2/2)KA^T AK]\mu(t)V(t) = \dot{b}\mu(t)V(t). \end{aligned} \quad (10)$$

因此, 由式 (8) 和式 (10) 有

$$V^\Delta(t) \leq (\dot{a} + \dot{b}\mu(t))V(t). \quad (11)$$

根据引理 3, 存在 $\lambda(t) = \dot{a} + \dot{b}\mu(t) < 0$, $\lambda \in \mathbf{R}^+$, 使得

$$V(t) \leq e_\lambda(t, t_{k-1})V(t_{k+1}^+), t \in [t_{k-1}, t_k)_T. \quad (12)$$

当 $t = t_k (k \in \mathbf{N}^+)$ 时, 有

$$V(t_k^+) = e^T(t_k^+)e(t_k^+)/2 = [(E + D)e(t_k) + W\varphi(e(t_k)) + \Phi^T(e(t_k))\Xi\xi]^T[(E + D)e(t_k) + W\varphi(e(t_k)) +$$

$$\Phi^T(e(t_k))\Xi\xi]/2 \leq e^T(t_k)[(1 + \|N\|^2)(E + D)^2 + LW^T(E + D) + (E + D)WL + (3/2 + 3/2\|N\|^2)L\Xi^T\Xi L + (3/2 + \|N\|^2/2)LW^T WL]e(t_k)/2 \leq \lambda_{\max}[(1 + \|N\|^2)(E + D)^2 + LW^T(E + D) + (E + D)WL + (3/2 + 3/2\|N\|^2)L\Xi^T\Xi L + (3/2 + \|N\|^2/2)LW^T WL]V(t_k) = QV(t_k)。$$
(13)

由引理 2、式 (12)~ 式 (13) 有

$$\begin{aligned} V(t) &\leq Q e_{\lambda}(t, t_{k-1}) V(t_{k-1}) \leq Q_{e_{\lambda}}(t, t_{k-1}) e_{\lambda}(t_{k-1}, t_{k-2}) V(t_{k-2}^{+}) \leq \\ &Q^2 e_{\lambda}(t, t_{k-2}) V(t_{k-2}) \leq \cdots \leq Q^k e_{\lambda}(t, t_0) V(t_0), t \in [t_{k-1}, t_k)_{\mathbb{T}}。 \end{aligned} \tag{14}$$

所以, $V(t) \leq Q^{N_{\gamma}(t_0, t)} e_{\lambda}(t, t_0) V(t_0)$ 。因为 $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q^{N_{\gamma}(t_0, t)} e_{\lambda}(t, t_0) = 0$, 故系统 (1) 和 (2) 在脉冲控制下达到同步。

推论 1 当 $T = hZ$ 时, 根据定义 2, 有 $e_{\lambda}(t, t_0) = \exp(\int_{t_0}^t 1/[h\text{Log}(1 + h\lambda)] \Delta\tau) = \exp[\text{Log}(1 + h\lambda)^{t/h} - \text{Log}(1 + h\lambda)^{t_0/h}] = (1 + h\lambda)^{(t-t_0)/h}$ 。

公式 (7) 可以简化为
$$\begin{cases} \lambda = \hat{a} + \hat{b}h < 0, \\ 1 + \hat{a}h + \hat{b}h^2 > 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} Q^{N_{\gamma}(t_0, t)} (1 + h\lambda)^{(t-t_0)/h} = 0, \end{cases}$$
 可以得到系统 (1) 和 (2) 同步。

注 2 hZ 不仅包含普通的差分方程形式 ($h = 1$), 也包含非特殊的差分形式 ($h \neq 1$)。当 $h = 1$ 时, 系统 (1) 可改写成

$$x_i(n+1) = x_i(n) - C_i x_i(n) + \sum_{j=1}^n (A_{ij} g_j(x_j(n))) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n (A_{ijl} g_j(x_j(n)) g_l(x_l(n))) + I_i(n)。$$

本文可以得到类似定理 1 的结果, 此结果是对文献 [15] 的补充。文献 [15] 研究了具有时滞和脉冲的离散高阶神经网络的稳定性。文献 [17] 提出了时标上一类中立型高阶 Hopfield 神经网络, 讨论其概周期解的全局指数稳定性。不同的是, 本文加入脉冲控制器来研究时标上高阶神经网络的同步, 结果更具一般性。当 $T = \mathbf{R}$ 时, 可以参考文献 [12] 在连续情形上研究脉冲高阶 Hopfield 型神经网络的稳定性。

4 数据模拟结果

对于 $T = \cup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1/2]$, 本文给出一个例子来证明前面得到结果的准确性。
考虑高阶神经网络

$$x_i^{\Delta}(t) = -Cx_i(t) + \sum_{j=1}^3 (A_{ij} g_j(x_j(t))) + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 (A_{ijl} g_j(x_j(t)) g_l(x_l(t))) + I_i(t) \tag{15}$$

和

$$\begin{cases} y_i^{\Delta}(t) = -C_i y_i(t) + \sum_{j=1}^3 (A_{ij} y_j(y_j(t))) + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 (A_{ijl} g_j(y_j(t)) g_l(y_l(t))) + I_i(t), t \neq t_k, \\ \Delta y_i(t) = d_i(y_i(t) - x_i(t)) + \sum_{j=1}^n (W_{ij}(h_j(y_j(t)) - h_j(x_j(t)))) + \\ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \{W_{ijl}[h_j(y_j(t)) h_l(y_l(t)) - h_j(x_j(t)) h_l(x_l(t))]\}, t = t_k。 \end{cases} \tag{16}$$

其中: $i = 1, 2, 3$; $g_1(z) = \tanh(0.16z)$; $g_2(z) = \tanh(0.14z)$; $g_3(z) = \tanh(0.16z)$; $h_1(z) = \tanh(0.2z)$; $h_2(z) = \tanh(0.6z)$; $h_3(z) = \tanh(0.5z)$; $C = \text{diag}(1.6, 1.5, 1.3)$; $D = \text{diag}(-0.21, -0.78, -0.69)$;

$$A = \begin{pmatrix} 0.02 & -0.03 & 0.12 \\ -0.05 & 0.63 & 0.74 \\ -1.35 & 0.23 & 0.34 \end{pmatrix}; A_1 = \begin{pmatrix} 0.04 & -0.07 & 0.03 \\ 0.03 & 0.04 & 0.11 \\ 0.04 & 0.14 & 0.11 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.02 & 0.03 \\ 0.03 & 0.02 & 0.14 \\ 0.04 & 0.01 & 0.12 \end{pmatrix}; A_3 =$$

$$\begin{pmatrix} 0.03 & -0.01 & 0.09 \\ 0.08 & 0.11 & 0.10 \\ 0 & -0.04 & 0.01 \end{pmatrix}; \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.61 & 0.64 \\ 0.43 & -0.14 & 0.87 \\ 0.12 & 0.19 & 0.68 \end{pmatrix}; \mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} 0.21 & 0.72 & -0.13 \\ 0.34 & 1.10 & 0.24 \\ 0.23 & 0.09 & 0.36 \end{pmatrix}; \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} -0.18 & 0.78 & -0.74 \\ 0.34 & 0.91 & 0.83 \\ 0.45 & 0.93 & 0.20 \end{pmatrix}; \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0.09 & -0.12 & 0.4 \\ 0.90 & 0.10 & 0.4 \\ 0.30 & 0.20 & 0.1 \end{pmatrix}; \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{在以上条件下, } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.16 \\ 0.16 \\ 0.16 \end{pmatrix}, \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0.16 & 0 & 0 \\ 0 & 0.14 & 0 \\ 0 & 0 & 0.16 \end{pmatrix}, \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

经过简单地计算, 可求得 $\hat{a} = -2.3055$, $\hat{b} = 2.7961$ 。当 $\mu(t) = 0$ 时, 显然满足定理 1 的条件; $\mu(t) = 1/2$ 时, $\hat{a} + \hat{b}(t) = -0.9075$, $1 + \mu(t)[\hat{a} + \hat{b}(t)] = 0.5463$, 定理 1 成立。

图 1 和图 2 分别描述了驱动系统和响应系统在 $T = \cup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1/2]$ 的状态图, 其初值分别为 $\mathbf{x}(0) = (0.4, 0.9, -1.4)^T$ 和 $\mathbf{y}(0) = (-0.5, 1.4, -0.6)^T$, 对应误差系统的轨迹如图 3 所示。由图 3 可知, 系统 (15) 和系统 (16) 达到同步。

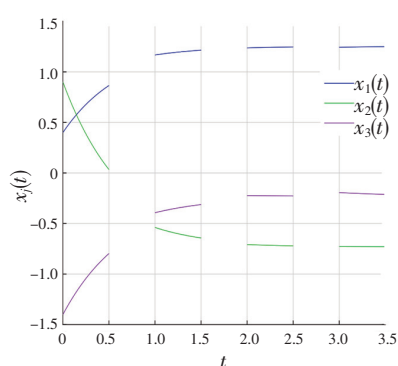


图 1 驱动系统在 $T = \cup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1/2]$ 的轨迹
Fig.1 Trajectories of the drive system on $T = \cup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1/2]$

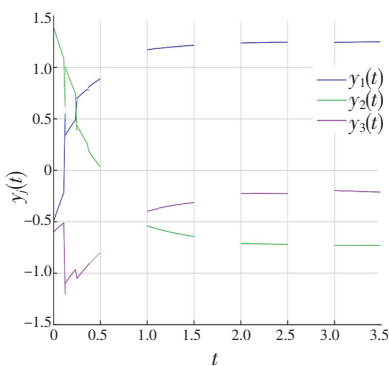


图 2 响应系统在 $T = \cup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1/2]$ 的轨迹
Fig.2 Trajectories of the response system on $T = \cup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1/2]$

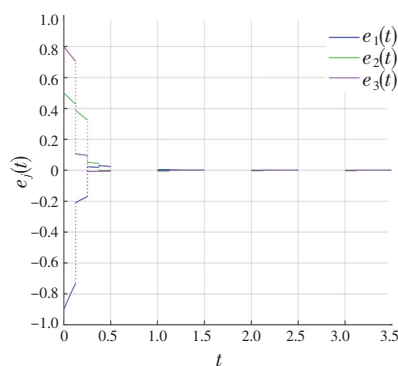


图 3 误差系统在 $T = \cup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1/2]$ 的轨迹
Fig.3 Trajectories of the error system on $T = \cup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1/2]$

注 3 上述例子是在混合时域下进行数值模拟, 包含了离散和连续的结果。

5 结论

本文研究了时标上脉冲高阶神经网络同步的充分条件, 并在 $T = \cup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1/2]$ 上给出了一个例子和数值模拟来说明结果的准确性。通过模拟, 发现 D 和初值的选取受到限制, 在一定范围内, 误差系统的轨迹是收敛的, 反之, 系统 (15) 和系统 (16) 不会达到同步。本文所用的方法还可以推广运用到其他神经网络系统的研究上。

[参考文献]

- [1] ZHAO Y H, YANG Y Q. The impulsive control synchronization of the drive-response complex system[J]. Physics Letters A, 2008, 372(48): 7165-7171. DOI:10.1016/j.physleta.2008.10.070.
- [2] SHI J C, ZENG Z G. Global exponential stabilization and lag synchronization control of inertial neural networks with time delays[J]. Neural Networks, 2020, 126: 11-20. DOI:10.1016/j.neunet.2020.03.006.
- [3] HE W L, LUO T H, TANG Y, et al. Secure communication based on quantized synchronization of chaotic neural networks under an event-triggered strategy[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2019, 31(9): 3334-3345. DOI:10.1109/TNNLS.2019.2943548.
- [4] ZHOU J, TONG D B, CHEN Q Y, et al. Master-slave synchronization of neural networks with time-varying delays via the event-triggered control[J]. Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, 2020, 26(4): 357-373. DOI:10.

- 1080/13873954. 2020. 1777567.
- [5] QI X N, BAO H B, CAO J D. Synchronization criteria for quaternion-valued coupled neural networks with impulses[J]. *Neural Networks*, 2020, 128: 150-157. DOI: 10. 1016/j. neu-net. 2020. 04. 027.
- [6] LI Y K, WANG H M, MENG X F. Almost automorphic synchronization of quaternion-valued high-order Hopfield neural networks with time-varying and distributed delays[J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2019, 36(3): 983-1013. DOI: 10. 1093/imamci/dny015.
- [7] BRAHMI H, AMMAR B, CHERIF F, et al. Stability and exponential synchronization of high-order Hopfield neural networks with mixed delays[J]. *Cybernetics and Systems*, 2017, 48(1): 49-69. DOI: 10. 1080/01969722. 2016. 1262709.
- [8] GONG S Q, GUO Z Y, WEN S P, et al. Synchronization control for memristive high-order competitive neural networks with time-varying delay[J]. *Neurocomputing*, 2019, 363: 295-305. DOI: 10. 1016/j. neucom. 2019. 06. 049.
- [9] HOPFIELD J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America-Biological Sciences*, 1982, 79(8): 2554-2558. DOI: 10. 1073/pnas. 79. 8. 2554.
- [10] HOPFIELD J J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America-Biological Sciences*, 1984, 81(10): 3088-3092. DOI: 10. 1073/pnas. 81. 10. 3088.
- [11] HUANG C X, SU R L, CAO J D, et al. Asymptotically stable high-order neutral cellular neural networks with proportional delays and D operators[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2020, 171: 127-135. DOI: 10. 1016/j. matcom. 2019. 06. 001.
- [12] XU B J, XU Y, HE L M. LMI-based stability analysis of impulsive high-order Hopfield-type neural networks[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2012, 86: 67-77. DOI: 10. 1016/j. matcom. 2011. 02. 008.
- [13] XU C J, ZHANG Q M. Existence and exponential stability of anti-periodic solutions for a high-order delayed Cohen-Grossberg neural networks with impulsive effects[J]. *Neural Processing Letters*, 2014, 40(3): 227-243. DOI: 10. 1007/s11063-013-9325-6.
- [14] HE Z L, LI C D, LI H F. Global exponential stability of high-order Hopfield neural networks with state-dependent impulses[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2019, 542: 123434. DOI: 10. 1016/j. physa. 2019. 123434.
- [15] WANG J L, JIANG H J, MA T L, et al. A new approach based on discrete-time high-order neural networks with delays and impulses[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, 355(11): 4708-4726. DOI: 10. 1016/j. jfranklin. 2018. 04. 032.
- [16] AOUITI C, LI X D, MIAADI F. A new LMI approach to finite and fixed time stabilization of high-order class of BAM neural networks with time-varying delays[J]. *Neural Processing Letters*, 2018, 50(1): 815-838. DOI: 10. 1007/s11063-018-9939-9.
- [17] LI Y K, MENG X F, XIONG L L. Pseudo almost periodic solutions for neutral type high-order Hopfield neural networks with mixed time-varying delays and leakage delays on time scales[J]. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2017, 8(6): 1915-1927. DOI: 10. 1007/s13042-016-0570-7.
- [18] LI Y K, WANG C, LI X. Existence and global exponential stability of almost periodic solution for high-order BAM neural networks with delays on time scales[J]. *Neural Processing Letters*, 2014, 39(3): 247-268. DOI: 10. 1007/s11063-013-9302-0.
- [19] LI Y K, YANG L. Almost automorphic solution for neutral type high-order Hopfield neural networks with delays in leakage terms on time scales[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 242: 679-693. DOI: 10. 1016/j. amc. 2014. 06. 052.
- [20] YANG L, FEI Y, WU W Q. Periodic solution for delta-stochastic high-order Hopfield neural networks with time delays on time scales[J]. *Neural Processing Letters*, 2019, 49(3): 1681-1696. DOI: 10. 1007/s11063-018-9896-3.
- [21] HUANG Z K, CAO J D, RAFFOUL Y N. Hilger-type impulsive differential inequality and its application to impulsive synchronization of delayed complex networks on time scales[J]. *Science China-Information Sciences*, 2018, 61(7): 219-221. DOI: 10. 1007/s11432-017-9304-7.
- [22] HUANG Z K, BIN H H, CAO J D, et al. Synchronizing neural networks with proportional delays based on a class of q -type allowable time scales[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(8): 3418-3428. DOI: 10. 1109/TNNLS. 2017. 2729588.
- [23] 高瑾, 林园, 王其如. 时标上 Leakage 项变时滞 BAM 神经网络系统的概周期解[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2020, 59(5): 29-39. DOI: 10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2019. 06. 21. 2019a048.
- [24] BOHNER M, PETERSON A. *Dynamic equations on time scales: an introduction with applications*[M]. Boston: Birkhauser, 2001.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)