［文章编号］1007 - 7405(2023)04 - 0350 - 09　　DOI:10. 19715/j. jmuzr. 2023. 04. 08

无界区域上分数阶 Klein-Gordon 方程的近似人工边界条件

朱荣坤，梁宗旗

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

［**摘要**］为了研究无界区域上时间分数阶 Klein-Gordon 方程，利用 Laplace 变换和 Lagrange 插值，将无界区域上时间分数阶 Klein-Gordon 方程近似转化为无界区域上整数阶偏微分方程。在此基础上，利用人工边界方法得到 3 种不同情形下无界区域上整数阶偏微分方程的人工边界条件，从而将无界区域上时间分数阶 Klein-Gordon 方程近似转化成有界区域上人工边界条件下整数阶偏微分方程的初边值问题，并证明了人工边界条件下整数阶偏微分方程的稳定性。最后，构造了人工边界条件下整数阶偏微分方程的有限差分格式，并通过数值例子验证该格式的有效性。

［**关键词**］无界区域；时间分数阶 Klein-Gordon 方程；人工边界条件；Laplace 变换

［**中图分类号**］O 241. 82

The Approximate Artificial Boundary Condition for the Fractional Klein-Gordon Equations in Unbounded Domains

ZHU Rongkun, LIANG Zongqi

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In order to study time-fractional Klein-Gordon equation on an unbounded domain, the Laplace transformation and the Lagrange interpolation were used to approximately transform the time-fractional Klein-Gordon equation on the unbounded domain into an integer order partial differential equation on the unbounded domain. On the basis, the artificial boundary method was used to obtain artificial boundary conditions of integer order partial differential equation in three different situations, thereby transforming the approxima- tion problem on the unbounded domain into the initial-boundary value problem with artificial boundary condition on the bounded domain, and prove the stability of the initial-boundary value problem on the bounded domain. Finally, finite difference scheme for the reduced problem in bounded domain was constructed and numerical example showed that artificial boundary method was efficient to solve time-fractional Klein-Gordon equation.

Keywords: unbounded domain; time fractional Klein-Gordon equation; artificial boundary conditions; Laplace transform

---

［**收稿日期**］2022 - 08 - 01
［**基金项目**］国家自然科学基金项目（11901237）；福建省自然科学基金项目（2020J01703）
［**作者简介**］朱荣坤（1965—），男，副教授，从事应用数学研究。通信作者：梁宗旗（1964—），男，教授，硕导，从事计算数学研究。E-mail:zqliang@jmu. edu. cn

0　引言

分数阶微积分是现代数学理论和应用研究的一个新的重要分支，它不仅是传统整数阶微积分理论的推广，同时由于分数阶微分算子的非局部性，分数阶微分方程非常适合用来描述现实世界中具有记忆和遗传性质的材料，以及许多物理及动态系统过程，从而分数阶微分方程在科学与工程的各个领域得到了广泛的应用，如光学、流体力学、化学、物理学、金融和其他自然科学[1-4]。分数阶微分方程理论研究和数值计算方法[5-6]是当今国内外学术界的最热门的研究课题之一。出现在科学和工程领域中的大量问题都是建立在无界区域上的，最终大部分可归结为无界区域上分数阶微分方程，如流体在无限长管道中的流动、波在空间中的传播等。然而物理区域的无界性和分数阶微积分算子的非局部性，给无界区域上问题尤其分数阶微分方程的求解带来了本质性的困难和巨大的计算代价。如何设置人工边界并高效求解成为求解无界区域上偏微分方程和分数阶微分方程数值解的一个核心问题，人工边界方法已逐步发展成为数值求解无界区域上偏微分方程的一个重要且高效方法，在科学技术的众多领域中得到了广泛应用。

关于整数阶偏微分方程人工边界方法的研究，人们针对不同方程和物理区域的人工边界应用多种方法和技巧进行了大量研究，Han 等[7]应用 Laplace 变换得到了热传导方程的精确人工边界条件；有文献给出了二维 Laplace 方程外问题的一系列各种精度的局部人工边界条件[8]、非线性 KdV 方程的透明人工边界条件[9]、一维三次非线性 Schrödinger 方程的精确非线性人工边界条件[10]等。关于分数阶微分方程的人工边界条件的研究文献很少，主要的原因是对整数阶微分方程人工边界条件本身需要较高的构造技巧和理论分析，即使是简单的线性微分方程构造，其人工边界条件也是困难的。分数阶微分方程不仅具有全局性，而且分数阶导数还存在奇异性，所以对无界区域上求得分数阶微分方程的精确人工边界条件或近似人工边界条件是困难的。Gao 等[11]研究了无界区域上时间分数阶次扩散方程的精确人工边界条件；Zhang 等[12]利用降阶法研究了无界区域上时间分数阶线性 KdV 方程的人工边界条件，得到了其精确人工边界条件。为了克服物理区域的无界性、分数阶导数的非局部性，减少计算代价，本文提出了一种利用人工边界方法[11,13-15]和 Lagrange 插值[16]求解无界区域上分数阶偏微分方程的新的方法，可将无界区域分数阶微分方程近似转化为有界区域上人工边界条件下整数阶偏微分方程的初边值问题，从而达到计算代价小、简单、高效的目的。

本文主要研究如下的无界区域上时间分数阶 Klein-Gordon 方程为

$$ {}_0^C D_t^\alpha u(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) + b^2 u(x,t) = f(x,t),(x,t) \in \mathbf{R} \times (0,T], \tag{1}$$

$$ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

$$ u(x,t) \to 0, |x| \to \infty, t \in (0,T]。 \tag{3}$$

其中：$\mathrm{supp}\{\psi,\varphi\} \subseteq [x_l,x_r]$，$\mathrm{supp}\{f\} \subseteq [x_l,x_r] \times (0,T]$；$1 < \alpha \leqslant 2$；$a,b$ 为正实数。α（$1<\alpha\leqslant 2$）阶 Caputo 分数阶导数[17]定义为 ${}_0^C D_t^\alpha u(t) = 1/\Gamma(2-\alpha)\int_0^t u''(\tau)/(\tau - t)^{(\alpha-1)}\mathrm{d}\tau$。

1　人工边界方法

1.1　预备知识

引理 1[18]　令 λ 是正实数，$J_v(t)$ 为 Bessel 函数，$I_v(t)$ 为广义的 Bessel 函数，$J_v(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}[(-1)^k/(k!(k+v)!)(x/2)^{2k+v}]$，$I_v(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}[1/(k!(k+v)!)(x/2)^{2k+v}]$，则 Bessel 函数和广义 Bessel 函数的 Laplace 变换为：$L[J_0(\sqrt{\lambda}t)] = 1/\sqrt{s^2+\lambda}$，$L[I_0(\sqrt{\lambda}t)] = 1/\sqrt{s^2-\lambda}$。

引理 2　I_0、I_1 分别为 0 阶和 1 阶广义的 Bessel 函数，则有 $I_0{}'(x) = I_1(x)$。

证明　由引理 1 可知，$I_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}[1/(k!)^2(x/2)^{2k}]$，则有 $I_0{}'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}[k/(k!)^2(x/2)^{2k-1}] =$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}[1/((k-1)!k!)^2(x/2)^{2k-1}]=\sum_{k=0}^{+\infty}[1/(k!(k+1)!)^2(x/2)^{2k+1}]=I_1(x)。$$

引理 3 I_v 为 v（$v\geqslant 1$）阶广义的 Bessel 函数，则有递推式 $2I_v'(x)=I_{v-1}(x)+I_{v+1}(x)$。

证明 由 $I_v(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}[1/(k!(k+v)!)(x/2)^{2k+v}]$，对其求导数，得到

$$I_v'(x)=(1/2)\sum_{k=0}^{+\infty}[(2k+v)/(k!(k+v)!)(x/2)^{2k+v-1}]=\{\sum_{k=0}^{+\infty}[(k+v)/(k!(k+v)!)(x/2)^{2k+v-1}]+\sum_{k=0}^{+\infty}[k/(k!(k+v)!)(x/2)^{2k+v-1}]\}/2=\{\sum_{k=0}^{+\infty}[1/((k!)(k+v-1)!)(x/2)^{2k+v-1}]+\sum_{k=0}^{+\infty}[1/((k-1)!(k+v)!)(x/2)^{2k+v-1}]\}/2=\{\sum_{k=0}^{+\infty}[1/(k!(k+v-1)!)(x/2)^{2k+v-1}]+\sum_{k=0}^{+\infty}[1/(k!)(k+v+1)!)(x/2)^{2k+v+1}]\}/2=(I_{v-1}+I_{v+1})/2。$$

1.2 人工边界条件

Caputo 分数阶导数的非局部性，导致当前时间层的计算需要存储之前所有时间层的数据，这给分数阶导数的计算带来了巨大的存储代价。为了克服这一困难，对 Caputo 分数阶导数做 Laplace 变换，可得

$$L\{{}_0^CD_t^\alpha u(x,t)\}=s^\alpha\hat{u}(x,s)-s^{\alpha-1}u(x,0)-s^{\alpha-2}u_t(x,0)=s^\alpha[\hat{u}(x,s)-s^{-1}u(x,0)-s^{-2}u_t(x,0)]。\tag{4}$$

其中：s 为时间变量 t 做 Laplace 变换后的信号变量，$\hat{u}$ 为 u 的 Laplace 变换。

对 s^α 做 Lagrange 线性插值逼近，可得

$$s^\alpha\approx(\alpha-1)s^2+(2-\alpha)s。\tag{5}$$

将式（5）代入式（4）式中，可得

$$L\{{}_0^CD_t^\alpha u(x,t)\}\approx[(\alpha-1)s^2+(2-\alpha)s][\hat{u}(x,s)-s^{-1}u(x,0)-s^{-2}u_t(x,0)]=(\alpha-1)s^2[\hat{u}(x,s)-s^{-1}u(x,0)-s^{-2}u_t(x,0)]+(2-\alpha)s[\hat{u}(x,s)-s^{-1}u(x,0)]-(2-\alpha)s^{-1}u_t(x,0)。\tag{6}$$

对式（6）做 Laplace 逆变换，可得

$${}_0^CD_t^\alpha u(x,t)\approx(\alpha-1)u_{tt}(x,t)+(2-\alpha)u_t(x,t)-(2-\alpha)u_t(x,0)。\tag{7}$$

将式（7）代入方程（1）中，得到问题 (1)~(3) 的近似问题为

$$\begin{cases}(\alpha-1)u_{tt}(x,t)+(2-\alpha)u_t(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)+b^2u(x,t)=g(x,t),(x,t)\in\mathbf{R}\times(0,T],\\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x),x\in\mathbf{R},\\ u(x,t)\to 0,|x|\to\infty,t\in(0,T]。\end{cases}\tag{8}$$

其中 $g(x,t)=(2-\alpha)\psi(x)+f(x,t)$。

现引入人工边界 $\sum_r=\{(x,t)\mid x=x_r\},\sum_l=\{(x,t)\mid x=x_l\}$，人工边界 Σ_r、Σ_l 将无界区域 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 分割为 $\Omega_i=[x_l,x_r]$ 和 $\Omega_e=(-\infty,x_l)\cup(x_r,+\infty)$ 两部分。

考虑无界区域上 Ω_e 问题（8）的外问题

$$\begin{cases}(\alpha-1)u_{tt}(x,t)+(2-\alpha)u_t(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)+b^2u(x,t)=0,(x,t)\in\Omega_e\times(0,T],\\ u(x,0)=0,u_t(x,0)=0,x\in\Omega_e,\\ u(x,t)\to 0,|x|\to\infty,t\in(0,T]。\end{cases}\tag{9}$$

对方程（9）做 Laplace 变换，得到如下的常微分方程为

$$\begin{cases}(\alpha-1)s^2\hat{u}(x,s)+(2-\alpha)s\hat{u}(x,s)-a^2\hat{u}_{ss}(x,s)+b^2\hat{u}(x,t)=0,\\ \hat{u}(x,s)\to 0,|x|\to\infty。\end{cases}$$

求解以上常微分得其解为

$$\hat{u}(x,s)=\begin{cases}c_1(s)\mathrm{e}^{-\kappa x},x\in(x_r,+\infty),\\ c_2(s)\mathrm{e}^{\kappa x},x\in(-\infty,x_l)。\end{cases}\tag{10}$$

其中：$c_1(s)$、$c_2(s)$ 为待定系数；$\kappa=\sqrt{(\alpha-1)s^2+(2-\alpha)s+b^2}/a=\sqrt{\alpha-1}/(a\sqrt{(s+m)^2+\lambda})$，$m=(2-\alpha)/(2(\alpha-1))$，$\lambda=b^2/(\alpha-1)-(2-\alpha)^2/(4(\alpha-1)^2)$。

式（10）等价于

$$\partial\hat{u}(x,s)/\partial x=\begin{cases}-\kappa\hat{u}(x,s),x\in(x_r,+\infty),\\ \kappa\hat{u}(x,s),x\in(-\infty,x_l)。\end{cases}\tag{11}$$

当 λ 满足不同的条件时，式（11）会得到所对应的人工边界条件，因此分 3 类情况讨论。

情况 1　当 $\lambda=0$，即 $b^2=(2-\alpha)^2/(4(\alpha-1))$ 时，式（11）可写为

$$\hat{u}_x(x,s)=\begin{cases}-\sqrt{\alpha-1}/a[s+(2-\alpha)/(2(\alpha-1))]\hat{u}(x,s),x\in(x_r,+\infty),\\ \sqrt{\alpha-1}/a[s+(2-\alpha)/(2(\alpha-1))]\hat{u}(x,s),x\in(-\infty,x_l)。\end{cases}\tag{12}$$

对式（12）做 Laplace 逆变换，可得

$$u_x(x,t)=\begin{cases}-\sqrt{\alpha-1}/a[u_t(x,t)+(2-\alpha)/(2(\alpha-1))u(x,t)],x\in(x_r,+\infty),\\ \sqrt{\alpha-1}/a[u_t(x,t)+(2-\alpha)/(2(\alpha-1))u(x,t)],x\in(-\infty,x_l),\end{cases}$$

即

$$u_x(x_r,t)=-\sqrt{\alpha-1}/a[u_t(x_r,t)+(2-\alpha)/(2(\alpha-1))u(x_r,t)],$$
$$u_x(x_l,t)=\sqrt{\alpha-1}/a[u_t(x_l,t)+(2-\alpha)/(2(\alpha-1))u(x_l,t)]。$$

从而，当 $\lambda=0$ 时，得到与问题（1）~（3）等价的人工边界条件下的初边值问题为：

$$\begin{cases}(\alpha-1)u_{tt}(x,t)+(2-\alpha)u_t(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)+b^2u(x,t)=g(x,t),(x,t)\in\Omega_i\times(0,T],\\ u_x(x_r,t)=-\sqrt{\alpha-1}/a[u_t(x_r,t)+(2-\alpha)/(2(\alpha-1))u(x_r,t)],0<t\leqslant T,\\ u_x(x_l,t)=\sqrt{\alpha-1}/a[u_t(x_l,t)+(2-\alpha)/(2(\alpha-1))u_t(x_l,t)],0<t\leqslant T,\\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x),x\in\Omega_i。\end{cases}\tag{13}$$

情况 2　当 $\lambda>0$，即 $b^2>(2-\alpha)^2/(4(\alpha-1))$ 时，式（11）可写为：

$$\hat{u}_x(x,s)=\begin{cases}-\sqrt{\alpha-1}/a\sqrt{(s+m)^2+\lambda}\,\hat{u}(x,s),x\in(x_r,+\infty),\\ \sqrt{\alpha-1}/a\sqrt{(s+m)^2+\lambda}\,\hat{u}(x,s),x\in(-\infty,x_l)。\end{cases}\tag{14}$$

当 $x\in(x_r,+\infty)$ 时，式（14）等价于

$$\hat{u}_x(x,s)=-\sqrt{\alpha-1}/a[(s+m)^2/\sqrt{(s+m)^2+\lambda_1}\,\hat{u}(x,s)+\lambda/\sqrt{(s+m)^2+\lambda}\,\hat{u}(x,s)]。\tag{15}$$

对式（15）做 Laplace 逆变换，并利用引理 1 和 Laplace 逆变换的平移性及分部积分，得到：

$$u_x(x_r,t)=-\sqrt{\alpha-1}/a[\mathrm{e}^{-mt}\int_0^t J_0(\sqrt{\lambda}(t-\tau))u_{\tau\tau}(x_r,\tau)\mathrm{d}\tau+\mathrm{e}^{-mt}\int_0^t\lambda\mathrm{e}^{mt}J_0(\sqrt{\lambda}(t-\tau))u(x_r,\tau)\mathrm{d}r]=$$
$$-\sqrt{\alpha-1}/a\mathrm{e}^{-mt}[u_t(x_r,t)+\lambda\int_0^t J''_0(\lambda(t-\tau))u(x_r,\tau)\mathrm{d}\tau+\lambda\int_0^t\mathrm{e}^{mt}J_0(\sqrt{\lambda}(t-\tau))u(x_r,\tau)\mathrm{d}\tau],$$

即

$$u_x(x_r,t)+\sqrt{\alpha-1}/a\mathrm{e}^{-mt}u_t(x_r,t)=-\sqrt{\alpha-1}/a\lambda\mathrm{e}^{-mt}\int_0^t[J''_0(\sqrt{\lambda}(t-\tau))+$$
$$\mathrm{e}^{mt}J_0(\sqrt{\lambda}(t-\tau)]u(x_r,\tau)\mathrm{d}\tau。$$

同理可得，当 $x\in(-\infty,x_l)$ 时，$u_x(x_l,t)-\sqrt{\alpha-1}/a\mathrm{e}^{-mt}u_t(x_l,t)=\sqrt{\alpha-1}/ap\lambda\mathrm{e}^{-mt}\int_0^l[J''_0(\lambda(t-\tau))+\mathrm{e}^{mt}J_0(\sqrt{\lambda}(t-\tau)]u(x_l,\tau)\mathrm{d}\tau$。从而，当 $\lambda>0$ 时，与方程（1）~（3）等价的人工边界条件下的初边值问题

为

$$\begin{cases}(\alpha-1)u_{tt}(x,t)+(2-\alpha)u_t(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)+b^2u(x,t)=g(x,t),(x,t)\in\Omega_i\times(0,T],\\ u_x(x_r,t)+\sqrt{\alpha-1}/a\mathrm{e}^{-mt}u_t(x_r,t)=-\sqrt{\alpha-1}/a\lambda\mathrm{e}^{-mt}\int_0^t[J''_0(\lambda(t-\tau))+\\ \qquad \mathrm{e}^{mt}J_0(\sqrt{\lambda}(t-\tau))]u(x_r,\tau)\mathrm{d}\tau,t\in(0,T],\\ u_x(x_l,t)-\sqrt{\alpha-1}/a\mathrm{e}^{-mt}u_t(x_l,t)=\sqrt{\alpha-1}/a\mathrm{e}^{-mt}\int_0^t[J''_0(\sqrt{\lambda}(t-\tau))+\\ \qquad \mathrm{e}^{mt}J_0(\sqrt{\lambda}(t-\tau))]u(x_l,\tau)\mathrm{d}\tau,t\in(0,T],\\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x),x\in\Omega_i。\end{cases} \tag{16}$$

情况 3 当 $\lambda<0$，即 $b^2<(2-\alpha)^2/(4(\alpha-1))$ 时，式（11）可写为

$$\hat{u}_x(x,s)=\begin{cases}-\sqrt{\alpha-1}/a\sqrt{(s+m)^2-(-\lambda)}\hat{u}(x,s),x\in(x_r,+\infty),\\ \sqrt{\alpha-1}/a\sqrt{(s+m)^2-(-\lambda)}\hat{u}(x,s),x\in(-\infty,x_l)。\end{cases} \tag{17}$$

即

$$\hat{u}_x(x,s)=-\sqrt{\alpha-1}/a(s+m)^2/\sqrt{(s+m)^2-(-\lambda)}\hat{u}(x,s)+\\ \lambda/a\sqrt{(s+m)^2-(-\lambda)}\hat{u}(x,s)]。 \tag{18}$$

对式（18）做 Laplace 逆变换，并利用引理 1 和 Laplace 逆变换的平移性，同理得到

$$u_x(x_r,t)+\sqrt{\alpha-1}/a\mathrm{e}^{-mt}u_t(x_r,t)=-\sqrt{\alpha-1}/a\lambda\mathrm{e}^{-mt}\int_0^t[I''_0(\sqrt{-\lambda}(t-\tau))-\\ \mathrm{e}^{mt}I_0(\sqrt{-\lambda}(t-\tau))]u(x_r,\tau)\mathrm{d}\tau。 \tag{19}$$

利用引理 2、引理 3 和分部积分，式（19）可写为

$$u_x(x_r,t)+\sqrt{\alpha-1}/a\mathrm{e}^{-mt}u_t(x_r,t)=-\sqrt{\alpha-1}/a\lambda\mathrm{e}^{-mt}\int_0^t[I'_1(\sqrt{-\lambda}(t-\tau))-\mathrm{e}^{mt}I_0(\sqrt{-\lambda}(t-\tau))]\\ u(x_r,\tau)\mathrm{d}\tau=-\sqrt{\alpha-1}/a\lambda\mathrm{e}^{-mt}\{\int_0^t[I_2(\sqrt{-\lambda}(t-\tau))+\\ I_0(\sqrt{-\lambda}(t-\tau))]u(x_r,\tau)\mathrm{d}\tau-\int_0^t\mathrm{e}^{m\tau}I_0(\sqrt{-\lambda}(t-\tau))]u(x_r,\tau)\mathrm{d}\tau\}。$$

同理得到当 $x=x_l$ 时的人工边界条件，当 $\lambda<0$ 时，从而得到与方程（1）~(3）等价的人工边界条件的初边值问题为

$$\begin{cases}(\alpha-1)u_{tt}(x,t)+(2-\alpha)u_t(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)+b^2u(x,t)=g(x,t),(x,t)\in\Omega_i\times(0,T],\\ u_x(x_r,t)+\sqrt{\alpha-1}/a\mathrm{e}^{-mt}u_t(x_r,t)=-\sqrt{\alpha-1}/a\lambda\mathrm{e}^{-mt}\{\int_0^t[I_2(\sqrt{-\lambda}(t-\tau))+I_0(\sqrt{-\lambda}\\ \qquad (t-\tau))]u(x_r,\tau)/2\mathrm{d}\tau-\int_0^t\mathrm{e}^{mt}I_0(\sqrt{-\lambda}(t-\tau))\\ \qquad u(x_r,\tau)\mathrm{d}\tau\},t\in\times(0,T],\\ u_x(x_l,t)-\sqrt{\alpha-1}/a\mathrm{e}^{-mt}u_t(x_l,t)=\sqrt{\alpha-1}/a\lambda\mathrm{e}^{-mt}\{\int_0^t[I_2(\sqrt{-\lambda}(t-\tau))+\\ \qquad I_0(\sqrt{-\lambda}(t-\tau))]u(x_l,\tau)/2\mathrm{d}\tau-\\ \qquad \int_0^t\mathrm{e}^{mt}I_0(\sqrt{-\lambda}(t-\tau))u(x_l,\tau)\mathrm{d}\tau\},t\in\times(0,T],\\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x),x\in\Omega_i。\end{cases} \tag{20}$$

根据 λ 的正负，本节给出了无界区域上时间分数阶 Klein-Gordon 方程 (1)~(3) 3 类情况下的人工边界条件。不失一般性，本文只研究人工边界条件下初边值问题（20）的稳定性。

2　稳定性分析

定理 1　假设 $u(x,t)\in C^{4,4}([x_l,x_r]\times(0,T])$ 是问题（20）的解，则 $u(x,t)$ 是无条件稳定的，且满足 $\tilde{E}(t)\leqslant E(0)+(1/2)\int_0^t\int_{x_l}^{x_r}\mathrm{e}^{t-\tau}g^2(x,\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$，其中：$\tilde{E}(t)=(1/2)\int_{x_e}^{x_r}[(\alpha-1)(u_t(x,t))^2+a^2(u_x(x,t))^2+(2-\alpha)\int_0^t(u_\tau(x,\tau))^2\mathrm{d}\tau+b^2(u(x,t))^2]\mathrm{d}x$；$E(0)=(1/2)\int_{x_l}^{x_r}[(\alpha-1)(\psi(x))^2+a^2(\varphi'(x))^2+b^2(\varphi(x))^2]\mathrm{d}x$。

证明　用 $u_t(x,t)$ 乘以方程组（20）的第一个式子，在 $[x_l,x_r]$ 上积分，并利用式（20）的二、三个式子，得到

$$\int_{x_l}^{x_r}[(\alpha-1)u_{tt}(x,t)u_t(x,t)+a^2u_{xt}(x,t)u_x(x,t)+(2-\alpha)(u_t(x,t))^2+b^2u_t(x,t)u(x,t)]\mathrm{d}x+$$
$$a^2u_t(x_r,t)B(u(x_r,t))+a^2u_t(x_l,t)B(u(x_l,t))=\int_{x_l}^{x_r}g(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x,$$

即

$$\mathrm{d}\{(1/2)\int_{x_l}^{x_r}[(\alpha-1)(u_t(x,t))^2+a^2(u_x(x,t))^2+2(2-\alpha)\int_0^t(u_\tau(x,\tau))^2\mathrm{d}\tau+b^2(u(x,t))^2]\mathrm{d}x\}/\mathrm{d}t+$$
$$a^2u_t(x_r,t)B(u(x_r,t))+a^2u_t(x_l,t)B(u(x_l,t))=\int_{x_l}^{x_r}g(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x。\tag{21}$$

其中，$B(u(x,t))=\sqrt{\alpha-1}/a\lambda\mathrm{e}^{-mt}\int_0^t[I''_0(\sqrt{-\lambda}(t-\tau))-\mathrm{e}^{mt}I_0(\sqrt{-\lambda}(t-\tau))]u(x_l,\tau)\mathrm{d}\tau+\sqrt{\alpha-1}/a\lambda\mathrm{e}^{-mt}u_t(x,t)$。引入两个辅助函数 $w^{(1)}(x,t)$、$w^{(2)}(x,t)$，满足

$$\begin{cases}(\alpha-1)w_{tt}^{(1)}+(2-\alpha)w_t^{(1)}-a^2w_{xx}^{(1)}+b^2w^{(1)}=0,(x,t)\in D_r,\\ w(x_r,t)=u(x_r,t),0\leqslant t\leqslant T,\\ w^{(1)}|_{t=0}=0,x_r<x<+\infty,\\ w_t^{(1)}|_{t=0}=0,x_r<x<+\infty。\end{cases}\tag{22}$$

$$\begin{cases}(\alpha-1)w_{tt}^{(2)}+(2-\alpha)w_t^{(1)}-a^2w_{xx}^{(2)}+b^2w^{(2)}=0,(x,t)\in D_l,\\ w(x_l,t)=u(x_l,t),0\leqslant t\leqslant T,\\ w^{(2)}|_{t=0}=0,-\infty<x<x_l,\\ w_t^{(2)}|_{t=0}=0,-\infty<x<x_l。\end{cases}\tag{23}$$

其中：$D_r=\{(x,t)\mid 1\leqslant x<\infty,0\leqslant t\leqslant T\}$；$D_l=\{(x,t)\mid -\infty\leqslant x<x_l,0\leqslant t\leqslant T\}$。

用 $w^{(1)}(x,t)$、$w^{(2)}(x,t)$ 分别乘以式（22）和式（23），在 $[x_r,+\infty)$，$(-\infty,x_l]$ 上积分，并利用式（20）的第二、三个式子，得到

$$a^2u_t(x_r,t)B(u(x_r,t))=\mathrm{d}\{(1/2)\int_{x_r}^{+\infty}[(\alpha-1)(w_t^{(1)}(x,t))^2+a^2(w_x^{(1)}(x,t))^2+$$
$$2(2-\alpha)\int_0^t(w_\tau^{(1)}(x,\tau))^2\mathrm{d}\tau+b^2(w^{(1)}(x,t))^2]\mathrm{d}x\}/\mathrm{d}t,\tag{24}$$

$$a^2u_t(x_l,t)B(u(x_l,t))=\mathrm{d}\{(1/2)\int_{-\infty}^{x_l}[(\alpha-1)(w_t^{(2)}(x,t))^2+a^2(w_x^{(2)}(x,t))^2+$$
$$2(2-\alpha)\int_0^t(w_\tau^{(2)}(x,\tau))^2\mathrm{d}\tau+b^2(w^{(2)}(x,t))^2]\mathrm{d}x\}/\mathrm{d}t,\tag{25}$$

将式（24）和式（25）代入式（21），得到

$$\mathrm{d}\{(1/2)\int_{x_l}^{x_r}[(\alpha-1)(u_t(x,t))^2+a^2(u_x(x,t))^2+2(2-\alpha)\int_0^t(u_\tau(x,\tau))^2\mathrm{d}\tau+b^2(u(x,t))^2]\mathrm{d}x+$$

$$(1/2)\int_{x_r}^{+\infty}[(\alpha-1)(w_t^{(1)}(x,t))^2+a^2(w_x^{(1)}(x,t))^2+2(2-\alpha)\int_0^t(w_\tau^{(1)}(x,\tau))^2\mathrm{d}\tau+ b^2(w^{(1)}(x,t))^2]\mathrm{d}x+(1/2)[\int_{-\infty}^{x_l}[(\alpha-1)(w_t^{(2)}(x,t))^2+a^2(w_x^{(2)}(x,t))^2+ 2(2-\alpha)\int_0^t(w_\tau^{(2)}(x,\tau))^2\mathrm{d}\tau+b^2(w^{(2)}(x,t))^2]\mathrm{d}x\}/\mathrm{d}t=\int_{x_l}^{x_r}g(x,t)u(x,t)_t\mathrm{d}x。\tag{26}$$

令

$$E(t)=(1/2)\int_{x_l}^{x_r}[(\alpha-1)(u_t(x,t))^2+a^2(u_x(x,t))^2+2(2-\alpha)\int_0^t(u_\tau(x,\tau))^2\mathrm{d}\tau+b^2(u(x,t))^2]\mathrm{d}x+ (1/2)\int_{x_r}^{+\infty}[(\alpha-1)(w_t^{(1)}(x,t))^2+a^2(w_x^{(1)}(x,t))^2+2(2-\alpha)\int_0^t(w_\tau^{(1)}(x,\tau))^2\mathrm{d}\tau+ b^2(w^{(1)}(x,t))^2]\mathrm{d}x+(1/2)[\int_{-\infty}^{x_l}[(\alpha-1)(w_t^{(2)}(x,t))^2+a^2(w_x^{(2)}(x,t))^2+ 2(2-\alpha)\int_0^t(w_\tau^{(2)}(x,\tau))^2\mathrm{d}\tau+b^2(w^{(2)}(x,t))^2]\mathrm{d}x,\tag{27}$$

令

$$G(t)=(1/2)\int_{x_l}^{x_r}g^2(x,t)\mathrm{d}x。\tag{28}$$

结合式（26）~式（28）并利用 Cauchy-Schwarz 不等式得到：$\mathrm{d}E(t)/\mathrm{d}t\leqslant E(t)+G(t),t\in(0,T]$。利用 Gronwall 不等式[19]可得到 $E(t)\leqslant E(0)+(1/2)\int_0^t\mathrm{e}^{t-\tau}G(\tau)\mathrm{d}\tau$，即 $\tilde{E}\leqslant E(t)\leqslant E(0)+(1/2)\int_0^t\mathrm{e}^{t-\tau}G(\tau)\mathrm{d}\tau$，其中，$\tilde{E}(t)=(1/2)\int_{x_l}^{x_r}[(\alpha-1)(u_t(x,t))^2+a^2(u_x(x,t))^2+2(2-\alpha)\int_0^t(u_\tau(x,\tau))^2\mathrm{d}\tau+b^2(u(x,t))^2]\mathrm{d}x$。定理 1 证毕。

3 有限差分格式与数值模拟

为了验证利用 Laplace 变换与人工边界方法来求解无界区域上时间分数阶 Klein-Gordon 方程的有效性，本节仅对问题（13）做数值离散和模拟。

3.1 有限差分格式

记 $\Lambda:=[x_l,x_r]$，$I=[0,T]$，$\Omega=\Lambda\times I$，将求解区域 $\Omega=\{(x,t)\mid x_l\leqslant x\leqslant x_r,0\leqslant t\leqslant T\}$ 进行网格剖分。取正整数 M、N，令 $h=(x_r-x_l)/M$，$\tau=T/N$，$x_i=x_0+ih(0\leqslant i\leqslant M)$，$t_k=k\tau$ $(0\leqslant k\leqslant N)$，其中，$h$ 是空间步长，τ 为时间步长。

将 Ω 进行剖分，记 $\Omega_{h\tau}=\Omega_h\times\Omega_\tau$，其中：$\Omega_h=\{x_i\mid x_i=x_0+ih,x_0=x_l,x_M=x_r,0\leqslant i\leqslant M;$ $\Omega_\tau=\{t_k\mid x_i+t_0=k\tau,t_0=0,t_N=T,0\leqslant k\leqslant N\}$。设 $\{v_i^k\mid 0\leqslant i\leqslant M,0\leqslant k\leqslant N\}$ 为 $\Omega_{h\tau}$ 上的一个网格函数，$\delta_t^0v_i^k=(v_i^{k+1}-v_i^{k-1})/(2\tau)$，$\delta_t^2v_i^k=(v_i^{k+1}-2v_i^k+v_{i-1}^{k-1})/\tau^2$，$\delta_x^2v_i^k=(v_{i+1}^k-2v_i^k+v_{i-1}^k)/h^2$，$\delta_tu_i^n=(u_i^{n+1}-u_i^n)/\tau$，定义网格函数空间 $w_h=\{u\mid u=(u_0,u_1,\cdots,u_M)\}$。

引理 4[15] 设 $y(x)\in C^3[x_l,x_r]$，其中 $x_l=x_0$，$x_r=x_M$，则有：$y''(x_0)-2[(y(x_1)-y(x_0))/h-y'(x_0)]/h=-h/3y'''(x_0+\theta_1h)$，$\theta_1\in(0,1)$；$y''(x_M)-2[(y'(x_M)-y(x_{M-1}))/h]/h=-h/3y'''(x_M-\theta_2h)$，$\theta_2\in(0,1)$。

利用中心差分格式分别逼近时间空间二阶导数，蛙跳格式逼近时间二阶导数，并结合引理 4 将问题（13）离散成

$$\begin{cases}(\alpha-1)\delta_t^2u_i^n+(2-\alpha)\delta_t^0u_i^n-a^2\delta_x^2u_i^n+b^2u_i^n=g_i^n,\\ (\alpha-1)\delta_t^2u_M^n+(2-\alpha)\delta_t^0u_M^n+2a^2/h[\sqrt{\alpha-1}/a(\delta_t^0u_M^n+(2-\alpha)/2(\alpha-1)u_M^n)+\\ \qquad (u_M^n-u_{M-1}^n)/h]+b^2u_0^n=g_M^n,\\ (\alpha-1)\delta_t^2u_0^n+(2-\alpha)\delta_t^0u_0^n-2a^2/h[u_1^n-u_0^n)/h-\sqrt{\alpha-1}/a(\delta_t^0u_0^n+\\ \qquad (2-\alpha)/2(\alpha-1)u_0^n)]+b^2u_0^n=g_0^n,\\ u_i^0=\varphi(x_i),\delta_tu_i^0=\psi(x_i)。\end{cases} \tag{29}$$

3.2　数值模拟

本节将通过数值例子来验证有限差分格式（28）的有效性。

取时间 $T=1$，空间区间 $[-\pi,\ \pi]$，$a=b=1$，精确解为 $u(x,t)=t^4\mathrm{e}^{-x^2}$，计算得到右端函数为 $g(x,t)=4\mathrm{e}^{-x^2}/\Gamma(5-\alpha)t^{4-\alpha}-t^4\mathrm{e}^{-x^2}(2x^2-1)+\mathrm{e}^{-x^2}t^4$。定义最大模意义下的误差为 $E_\infty(M,N)=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant M}|u(x_i,T)-u_i^N|$，分别取不同的 N 与 M，得到最大模下的误差如表 1 所示。由表 1 可知，数值解逼近精确解，具有较小的数值误差，并且当 α 越靠近 1 和 2 时，数值误差越小。

表 1　不同时间空间步长下的最大误差

Tab. 1　The maximum errors with different temporal and spatial nodes

α	(M,N)	$E_\infty(M,N)$
1.10	(100,100)	2.64×10^{-2}
	(500,500)	4.20×10^{-3}
	(1 000,1 000)	1.50×10^{-4}
	(1 500,1 500)	5.84×10^{-4}
1.30	(100,100)	6.55×10^{-2}
	(500,500)	7.87×10^{-2}
	(1 000,1 000)	8.04×10^{-2}
	(1 500,1 500)	8.09×10^{-2}
1.50	(100,100)	1.08×10^{-1}
	(500,500)	1.10×10^{-1}
	(1 000,1 000)	1.20×10^{-1}
	(1 500,1 500)	1.20×10^{-1}
1.70	(100,100)	8.72×10^{-2}
	(500,500)	9.68×10^{-2}
	(1 000,1 000)	9.80×10^{-2}
	(1 500,1 500)	9.84×10^{-2}
1.90	(100,100)	2.93×10^{-2}
	(500,500)	3.80×10^{-2}
	(1 000,1 000)	3.92×10^{-2}
	(1 500,1 500)	3.94×10^{-2}
1.99	(100,100)	5.95×10^{-3}
	(500,500)	3.37×10^{-3}
	(1 000,1 000)	3.39×10^{-3}
	(1 500,1 500)	3.65×10^{-3}

4　结论

利用 Laplace 变换和 Lagrange 插值方法，首先将分数阶微分方程转化为近似整数阶微分方程，再利用人工边界方法，将无界区域上时间分数阶 Klein-Gordon 方程转化为有界区域上具有精确人工边界条件的整数阶偏微分方程问题，同时证明了其稳定性。最后，构造了人工边界条件下整数阶偏微分方

程的有限差分格式，并利用数值例子验证格式的有效性。该方法为无界区域上分数阶偏微分方程问题的求解提供了一种新的理论方法，不仅降低了计算代价，而且简化了原问题，说明利用人工边界方法求解无界区域上分数阶微分方程是一个简单、有效的方法。

[参考文献]

[1]NUTTING P G. A new general law of deformation[J]. Journal of the Franklin Institute,1921,191(5):679-685.

[2]CAPUTO M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent[J]. Annals of Geophysics,1966,13(5):529-539.

[3]CAPUTO M,MAINARDI F. A new dissipation model based on memory mechanism[J]. Pure and Applied Geophysics,1971,91(1):134-147.

[4]BOUROUBA B,LADACI S. A novel non-integer indirect adaptive control for non-integer order systems with non-prior knowledge[J]. Engineering,Technology and Applied Science Research,2020,10(1):5186-5190.

[5]QI R J,SUN Z Z. Some numerical extrapolation methods for the fractional sub-diffusion equation and fractional wave equation based on the $L1$ formula[J]. Communications on Applied Mathematics and Computation,2022,4:1313-1350.

[6]DU R L,SUN Z Z,WANG H. Temporal second-order finite difference schemes for variable-order time-fractional wave equations[J]. SIAM on Numerical Analysis,2022,60: 104-132.

[7]HAN H D,HUANG Z Y. A class of artificial boundary for heat equation in unbounded domains[J]. Computers Mathematics with Applications,2002,43(6/7):889-900.

[8]YU D H. Approximation of boundary condition at infinity for a harmonic equation[J]. Journal of Computational Mathematics,1985(3): 219-227.

[9]HAN H D,ZHU L,BRUNNER H,et al. Artificial boundary conditions for parabolic Volterra integro-differential equations on unbounded two-dimensional domains[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2006,197(2):406-420.

[10]ZHENG C X. Exact non-reflecting boundary conditions for one-dimensional cubic nonlinear Schrödinger equations[J]. Journal of Computational Physics,2006,215(2):552-565.

[11]GAO G H, SUN Z Z. The finite difference approximation for a class of fractional sub-diffusion equations on a space unbounded domain[J]. Journal of Computational Physics,2013,236:443-460.

[12]ZHANG Q,ZHANG J W,JIANG S D. Numerical solution to a linearized time fractional KdV equation on unbounded domains[J]. Mathematics of Computation,2017,87(310):693-719.

[13]HAN H D,YIN D S. Absorbing boundary conditions for the multi-dimensional Klein Gordon equation[J]. Communications in Mathematical Sciences,2007,5(1):743-764.

[14]HAN H D,WU X N. Artificial boundary method-numerical solution of partial differential equations on unbounded domains[M]. Beijing:Tsinghua University Press,2009.

[15]WU X N,SUN Z Z. Convergence of difference scheme for heat equation in unbounded domains using artificial boundary conditions[J]. Applied Numerical Mathematics,2004,50(2):261-277.

[16]REN J C,SUN Z Z,DAI W Z. New approximations for solving the Caputo-type fractional partial differential equations[J]. Applied Mathematical Modelling,2016,40(4):2625-2636.

[17]SUN Z Z,GAO G H. Fractional differential equations:finite difference methods[M]. Beijing:Science Press,2020.

[18]薛定宇. 分数阶微积分学与分数阶控制[M]. 北京:科学出版社,2018:30-34.

[19]SUN Z Z. Numerical methods of partial differential equations[M]. Beijing:Science Press,2012.

（责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤）