［文章编号］1007 -7405(2023)05 -0421 -07　　DOI:10. 19715/j. jmuzr. 2023. 05. 05

时间分数阶 Klein-Gordon 方程的有限差分方法

丁　鹏，梁宗旗

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

［摘要］研究时间分数阶 Klein-Gordon 方程的有限差分方法。构建基于 $L1$ 格式的时间分数阶 Klein-Gordon 方程的均值有限差分格式，利用一种新的能量分析方法证明有限差分格式的收敛性与稳定性。最后，通过数值例子验证该方法的有效性与可行性。

［关键词］时间分数阶 Klein-Gordon 方程；$L1$ 格式；收敛性；稳定性

［中图分类号］O 241. 82

Finite Difference Method of Time Fractional Klein-Gordon Equation

DING Peng, LIANG Zongqi

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: This paper mainly studies the finite difference method of time fractional Klein-Gordon equation, and constructs the mean finite difference scheme of time fractional Klein-Gordon equation based on the $L1$ format, and uses a new energy analysis to prove the convergence and stability of the finite difference scheme. The effectiveness and feasibility of the method were verified by numerical examples.

Keywords: time fractional Klein-Gordon equation; $L1$ format; convergence; stability

0　引言

近年来，由于分数阶微积分的不断发展，分数阶微分方程在科学与工程的各个领域都得到了广泛的应用，如光学[1]、流体力学[2]、化学[3]、物理学[4]、金融[5]和其他自然科学[6]。在分数阶微分方程理论分析上，已经有大量学者开展了许多重要的工作[6-14]。但是，大多数分数阶微分方程的精确解依然难以直接给出，即使是含有特殊函数的线性分数阶微分方程亦是如此。由于这些特殊函数大多是无穷级数，其收敛速度比较慢，导致这些函数的计算也变得相当困难。因此，分数阶偏微分方程的数值求解成为当今相关研究领域的课题之一。

本文研究了时间分数阶 Klein-Gordon 方程

$$ {}_0^C D_t^\alpha u(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) + b^2 u(x,t) = f(x,t),\ x \in [-L,L],\ t \in (0,T], \tag{1}$$

$$ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x \in [-L,L], \tag{2}$$

$$ u(-L,t) = 0,\ u(L,t) = 0,\ t \in (0,T]。 \tag{3}$$

其中：$f(x,t)$ 为已知函数；$\varphi(x)$、$\psi(x)$ 为初值函数。Caputo 分数阶导数为

［收稿日期］2021 -04 -28
［基金项目］国家自然科学基金项目（11801214）；福建省自然科学基金项目（2020J01710，2020J01703，2019J01329）；福建省教育厅项目（JAT190326）
［作者简介］丁鹏（1995—），男，硕士生，从事计算数学方向研究。通信作者：梁宗旗（1964—），男，教授，硕导，从事计算数学方向研究。E-mail:zqliang@jmu. edu. cn

$$ {}_0^C D_t^\alpha u(x,t) = (1/\Gamma(2-\alpha))\int_0^t (t-s)^{1-\alpha}\partial^2 u(x,s)/\partial s^2 \mathrm{d}s,\ 1<\alpha\leqslant 2。 \tag{4}$$

关于时间 α（0<α≤1）阶偏微分方程的数值解法，已经有丰富的研究成果，但相对时间 α（1<α≤2）阶偏微分方程而言，其数值求解的研究成果比较欠缺。Zhang 等[12]将时空分数阶非线性 Klein-Gordon 方程进行有限差分 $L1$ 格式离散，空间上进行谱离散，利用线性化的方法将非线性项线性化，并利用能量法证明其离散格式是无条件稳定的。Vong 等通过构造一维和二维时间分数阶 Klein-Gordon 方程的空间紧差分格式，得到空间上 4 阶的收敛阶，并利用能量法证明了其收敛性和稳定性[15-16]。Chen 等[17]利用时空谱方法求解了时间分数阶非线性 Klein-Gordon 方程的数值解，并证明了其离散格式的收敛性和稳定性。事实证明，关于差分格式收敛性和稳定性的分析，大都采用能量法证明数值解是有条件或无条件稳定的。Sun 等[13]提出了一种新的能量分析方法来分析多项时间分数阶偏微分方程的收敛性与稳定性，给出有关 Caputo 导数 $L1$ 差分格式的相关结果，证明了时间分数阶混合次扩散方程和扩散波方程有限差分格式的收敛性与稳定性。事实表明，这种新的能量分析方法也能推广应用到其他时间 α（1<α≤2）阶偏微分方程的数值求解问题，分析其有限差分格式的收敛性和稳定性。因此，本文利用这种新的能量分析方法，严格证明时间分数阶 Klein-Gordon 方程的 $L1$ 有限差分格式的收敛性与稳定性。

1 时间分数阶 Klein-Gordon 方程有限差分的构建

记 $\Lambda:=[-L,L]$，$I=(0,T]$，$\Omega=\Lambda\times I$，将求解区域 $\Omega=\{(x,t)\mid -L\leqslant x\leqslant L,0<t\leqslant T\}$ 进行网格剖分。取正整数 M、N，令 $h=2L/M$，$\Delta t=T/N$，$x_i=x_0+i_h(0\leqslant i\leqslant M)$，$t_n=n\Delta t(1\leqslant n\leqslant N)$，其中 h 是空间步长，Δt 是时间步长。

将 Ω 进行剖分，记：$\Omega_h=\{x_i\mid 0\leqslant i\leqslant M\}$，$\Omega_{\Delta t}=\{t_n\mid 1\leqslant n\leqslant N\}$。引入如下记号：$\delta_x u_{i-1/2}^n=(u_i^n-u_{i-1}^n)/h$，$\delta_x^2 u_i^n=(\delta_x u_{i+1/2}^n-\delta_x u_{i-1/2}^n)/h$，$\delta_t u_i^{n-1/2}=(u_i^n-u_i^{n-1})/\Delta t$，$u_i^{n-1/2}=(u_i^n+u_i^{n-1})/2$。

定义网格函数空间 $\omega_h=\{u\mid u\in\Omega_h,u_0=u_M=0\}$，对于任意的 $u,v\in\omega_h$，定义如下的离散内积和范数：$(u,v)=h\sum_{i=1}^{M-1}u_iv_i$，$\|u\|=\sqrt{(u,u)}$，$\|u\|_\infty=\max_{0\leqslant i\leqslant M}|u_i|$，$(\delta_x u,\delta_x v)=h\sum_{i=1}^{M-1}(\delta_x u_{i+1/2})(\delta_x v_{i+1/2})$，$\|\delta_x u\|^2=\sqrt{(\delta_x u,\delta_x u)}$。

引理 1[18] 假设 $f(t)\in C^3(t_0,t_n]$，$1<\alpha\leqslant 2$，则有 ${}_0^C D_t^\alpha f(t_{n-1/2})=[\Delta t^{1-\alpha}/\Gamma(3-\alpha)][b_0^{(\alpha)}\delta_t f^{n-1/2}-\sum_{k=1}^{n-1}(b_{n-k-1}^{(\alpha)}-b_{n-k}^{\alpha})\delta_t f^{k-1/2}-b_{n-1}^{(\alpha)}f'(t_0)]+O(\Delta t^{3-\alpha})$，其中 $b_l^{(\alpha)}=(l+1)^{2-\alpha}-l^{2-\alpha}$，$l\geqslant 0$。

引理 2[18] 设 $\alpha\in(1,2]$，$b_l^{(\alpha)}=(l+1)^{2-\alpha}-l^{2-\alpha}$，$l\geqslant 0$，则有：$1=b_0^{(\alpha)}>b_1^{(\alpha)}>b_2^{(\alpha)}>\cdots>b_l^{(\alpha)}>0$，$(2-\alpha)l^{1-\alpha}<b_{l-1}^{(\alpha)}<(2-\alpha)(l-1)^{1-\alpha}$。

分别在节点 (x_i,t_n) 和 (x_i,t_{n-1}) 考虑方程（1），并相加得到

$$[{}_0^C D_t^\alpha u(x_i,t_n)+{}_0^C D_t^\alpha u(x_i,t_{n-1})]/2-(a^2/2)[u_{xx}(x_i,t_n)+u_{xx}(x_i,t_{n-1})]+(b^2/2)[u(x_i,t_n)+u(x_i,t_{n-1})]=[f(x_i,t_n)+f(x_i,t_{n-1})]/2,\ 1\leqslant i\leqslant M-1,\ 1\leqslant n\leqslant N。$$

对时间 Caputo 导数采用 $L1$ 格式逼近，空间导数采用中心差分格式逼近，得到

$$(\Delta t^{1-\alpha}/\Gamma(3-\alpha))[b_0^{(\alpha)}\delta_t U_i^{n-1/2}-\sum_{k=1}^{n-1}(b_{n-k-1}^{(\alpha)}-b_{n-k}^{(\alpha)})\delta_t U_i^{k-1/2}-b_{n-1}^{(\alpha)}\psi_i]=a^2\delta_x^2 U_i^{n-1/2}-b^2U_i^{n-1/2}+f_i^{n-1/2}+R_i^{n-1/2},\ 1\leqslant i\leqslant M-1,\ 1\leqslant n\leqslant N, \tag{5}$$

$$U_i^0=\varphi_i,\ 1\leqslant i\leqslant M-1, \tag{6}$$

$$U_0^n=0,\ U_M^n=0,\ 1\leqslant n\leqslant N。 \tag{7}$$

其中：$U_i^n=u(x_i,t_n)$；$f_i^n=f(x_i,t_n)$。不难验证，存在一个常数 C，有 $|R_i^{n-1/2}|\leqslant C(\Delta t^{3-\alpha}+h^2)$，$1\leqslant$

$i \leqslant M-1$, $1 \leqslant n \leqslant N$ 。省略余项并用 u_i^n 代替 U_i^n，从而得到方程（5）~(7）的有限差分格式为

$$(\Delta t^{1-\alpha}/\Gamma(3-\alpha))[b_0^{(\alpha)}\delta_t u_i^{n-1/2} - \sum_{k=1}^{n-1}(b_{n-k-1}^{(\alpha)} - b_{n-k}^{(\alpha)})\delta_t u_i^{k-1/2} - b_{n-1}^{(\alpha)}\psi_i] = a^2\delta_x^2 u_i^{n-1/2} - b^2 u_i^{n-1/2} + f_i^{n-1/2},\ 1 \leqslant i \leqslant M-1,\ 1 \leqslant n \leqslant N, \tag{8}$$

$$u_i^0 = \varphi_i,\ 1 \leqslant i \leqslant M-1, \tag{9}$$

$$u_0^n = 0,\ u_M^n = 0,\ 1 \leqslant n \leqslant N。 \tag{10}$$

2　收敛性和稳定性分析

引理3[13]　对任意的 $\psi, u^1, u^2\cdots u^N \in \omega_h$ ，有 $\sum_{n=1}^{N}[(b_0^{(\alpha)}u^n - \sum_{k=1}^{n-1}(b_{n-k-1}^{\alpha} - b_{n-k}^{(\alpha)})u^k - b_{n-1}^{(\alpha)}\psi, u^n] \geqslant (\sum_{k=1}^{N} b_{N-k}^{(\alpha)}\|u^k\|^2 - \sum_{n=1}^{N} b_{n-1}^{\alpha}\|\psi\|^2)/2$, $1 \leqslant m \leqslant N$，其中 $b_l^{(\alpha)}$ 为引理1所注。

引理4[13]　对任意的网格函数 $\psi \in \Omega_h$ ，$L_1 = 2L$，则不等式 $\|\psi\|_\infty^2 \leqslant \varepsilon\|\delta_x\psi\|^2 + (1/\varepsilon + 1/L_1)\|\psi\|^2(\varepsilon > 0)$ 成立。

引理5[18]　对任意的网格函数 $u, v \in \omega_h$ ，$\varepsilon > 0$，则有 $|uv| \leqslant |u|^2/(4\varepsilon) + \varepsilon|v|^2$。

定理1（稳定性）　假设 $u(x,t) \in C_{x,t}^{[4,3]}(\Omega)$ ，且 $\{u_i^N | 0 \leqslant i \leqslant M\}$ 是如下差分格式的解，

$$(\Delta t^{1-\alpha}/\Gamma(3-\alpha))[b_0^{(\alpha)}\delta_t u_i^{n-1/2} - \sum_{k=1}^{n-1}(b_{n-k-1}^{(\alpha)} - b_{n-k}^{(\alpha)})\delta_t u_i^{k-1/2} - b_{n-1}^{(\alpha)}\psi_i] = a^2\delta_x^2 u_i^{n-1/2} - b^2 u_i^{n-1/2} + f_i^{n-1/2},\ 1 \leqslant i \leqslant M-1,\ 1 \leqslant n \leqslant N, \tag{11}$$

$$u_i^0 = \varphi_i,\ 1 \leqslant i \leqslant M-1, \tag{12}$$

$$u_0^n = 0,\ u_M^n = 0,\ 1 \leqslant n \leqslant N。 \tag{13}$$

则有 $\|u^N\|_\infty^2 \leqslant [(2a^2/(L_1 b^2))(1 + \sqrt{1 + L_1^2 b^2/a^2})]\{\|\delta_x U^0\|^2 + b^2\|\varphi\|^2/a^2 + 2T^{2-\alpha}/(a^2\Gamma(3-\alpha))\|\psi\|^2 + \Delta t(T^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)/4)\sum_{n=1}^{N}\|f^{n-1/2}\|^2\}$。

证明　用 $h\delta_t u_i^{n-1/2}$ 乘以式（11），并将 i 从1到 $M-1$ 求和，得到

$$(\Delta t^{1-\alpha}/\Gamma(3-\alpha))(b_0^{(\alpha)}\delta_t u_i^{n-1/2} - \sum_{k=1}^{n-1}(b_{n-k-1}^{(\alpha)} - b_{n-k}^{(\alpha)})\delta_t u_i^{k-1/2} - b_{n-1}^{(\alpha)}\psi_i, \delta_t u^{n-1/2}) = a^2 h\sum_{i=1}^{M-1}(\delta_x^2 u_i^{n-1/2})\delta_t u_i^{n-1/2} - b^2 h\sum_{i=1}^{M-1}(u_i^{n-1/2})\delta_t u_i^{n-1/2} + h\sum_{i=1}^{M-1}(f_i^{n-1/2})\delta_t u_i^{n-1/2},\ 1 \leqslant n \leqslant N。 \tag{14}$$

式（14）等式右端第一部分和第二部分分别利用分部求和公式，得到

$$a^2 h\sum_{i=1}^{M-1}(\delta_x^2 u_i^{n-1/2})\delta_t u_i^{n-1/2} = -(a^2/(2\Delta t))[\|\delta_x u^n\|^2 - \|\delta_x u^{n-1}\|^2], \tag{15}$$

$$-b^2 h\sum_{i=1}^{M-1}(u_i^{n-1/2})\delta_t u_i^{n-1/2} = -(b^2/(2\Delta t))[\|u^n\|^2 - \|u^{n-1}\|^2]。 \tag{16}$$

将式（15）~式（16）代入式（14）中，得到

$$(\Delta t^{1-\alpha}/\Gamma(3-\alpha))(b_0^{(\alpha)}\delta_t u_i^{n-1/2} - \sum_{k=1}^{n-1}(b_{n-k-1}^{(\alpha)} - b_{n-k}^{(\alpha)})\delta_t u_i^{k-1/2} - b_{n-1}^{(\alpha)}\psi_i, \delta_t u^{n-1/2}) + (a^2/(2\Delta t))[\|\delta_x u^n\|^2 - \|\delta_x u^{n-1}\|^2] + (b^2/(2\Delta t))[\|u^n\|^2 - \|u^{n-1}\|^2] \leqslant h\sum_{i=1}^{M-1}(f_i^{n-1/2})\delta_t u_i^{n-1/2}。 \tag{17}$$

式（17）乘以 Δt，将 n 从1到 N 求和，并利用引理3，得到

$$(\Delta t^{1-\alpha}/\Gamma(3-\alpha))\sum_{n=1}^{N} b_{N-n}^{(\alpha)}\|\delta_x u^{n-1/2}\|^2 + (a^2/2)\|\delta_x u^N\|^2 + (b^2/2)\|u^N\|^2 \leqslant (\Delta t^{2-\alpha}/\Gamma(3-\alpha))\sum_{n=1}^{N} b_{n-1}^{(\alpha)}\|\psi\|^2 + (a^2/2)\|\delta_x u^0\|^2 + (b^2/2)\|u^0\|^2 + \Delta t\sum_{n=1}^{N} h\sum_{i=1}^{M-1}(f_i^{n-1/2})\delta_t u_i^{n-1/2}。 \tag{18}$$

式（18）利用引理 2，得到

$$\Delta t(T^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha))\sum_{n=1}^{N}\|\delta_t u^{n-1/2}\|^2+(a^2/2)\|\delta_x u^N\|^2+(b^2/2)\|u^N\|^2\leqslant(\Delta t^{2-\alpha}/\Gamma(3-\alpha))$$
$$\sum_{n=1}^{N}b_{n-1}^{(\alpha)}\|\psi\|^2+(a^2/2)\|\delta_x u^0\|^2+(b^2/2)\|u^0\|^2+\Delta t\sum_{n=1}^{N}h\sum_{i=1}^{M-1}(f_i^{n-1/2})\delta_t u_i^{n-1/2}。\tag{19}$$

利用引理 5，式（19）右端最后一项得

$$\Delta t\sum_{n=1}^{N}h\sum_{i=1}^{M-1}(f_i^{n-1/2})\delta_t u_i^{n-1/2}\leqslant\Delta t(T^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha))\sum_{n=1}^{N}\|\delta_t u^{n-1/2}\|^2+$$
$$\Delta t(T^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)/4)\sum_{n=1}^{N}\|f^{n-1/2}\|^2。\tag{20}$$

将式（20）代入式（19）中，得到

$$(a^2/2)\|\delta_x u^N\|^2+(b^2/2)\|u^N\|^2\leqslant(a^2/2)\|\delta_x u^0\|^2+(b^2/2)\|u^0\|^2+$$
$$(\Delta t^{1-\alpha}/\Gamma(3-\alpha))\sum_{n=1}^{N}b_{n-1}^{(\alpha)}\|\psi\|^2+\Delta t(T^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)/4)\sum_{n=1}^{N}b_{N-n}^{(\alpha)}\|f^{n-1/2}\|^2。\tag{21}$$

由引理 2 可知，$(\Delta t^{1-\alpha}/\Gamma(3-\alpha))\sum_{n=1}^{N}b_{n-1}^{(\alpha)}\|\psi\|^2=(T^{2-\alpha}/\Gamma(3-\alpha))\|\psi\|^2$。式（21）可写成

$$(a^2/2)\|\delta_x u^N\|^2+(b^2/2)\|u^N\|^2\leqslant(a^2/2)\|\delta_x u^0\|^2+(b^2/2)\|u^0\|^2+$$
$$(T^{2-\alpha}/\Gamma(3-\alpha))\|\psi\|^2+\Delta t(T^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)/4)\sum_{n=1}^{N}\|f^{n-1/2}\|^2。\tag{22}$$

式（22）可改写为

$$\|\delta_x u^N\|^2+(b^2/a^2)\|u^N\|^2\leqslant\|\delta_x u^0\|^2+(b^2/a^2)\|u^0\|^2+$$
$$2T^{2-\alpha}\|\psi\|^2/(a^2\Gamma(3-\alpha))+\Delta t(T^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)/4)\sum_{n=1}^{N}\|f^{n-1/2}\|^2。\tag{23}$$

利用引理 4，有 $(1/\varepsilon+1/L)/\varepsilon=b^2/a^2$，即取 $\varepsilon=[(2a^2/(L_1b^2))(1+\sqrt{1+L_1^2b^2/a^2})]$，则式（23）变为

$$\|u^N\|_\infty^2\leqslant[(2a^2/(L_1b^2))(1+\sqrt{1+L_1^2b^2/a^2})][\|\delta_x u^N\|^2+(b^2/a^2)\|u^N\|^2]\leqslant$$
$$[(2a^2/(L_1b^2))(1+\sqrt{1+L_1^2b^2/a^2})]\{\|\delta_x u^0\|^2+(b^2/a^2)\|\varphi\|^2+\tag{24}$$
$$(2T^{2-\alpha}\|\psi\|^2/(a^2\Gamma(3-\alpha))+\Delta t(T^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)/4)\sum_{n=1}^{N}\|f^{n-1/2}\|^2\}。$$

定理 1 证毕。

类似于定理 1 的证明，差分格式（11）~(13）有如下的收敛性，即定理 2。

定理 2（收敛性） 假设 $u(x,t)\in C_{(x,t)}^{[4,3]}(\Omega)$，$u(x,t)$ 是方程（5）~（7）的解，$\{u_i^n\,|\,0\leqslant i\leqslant M,1\leqslant n\leqslant N\}$ 是有限差分格式（11）~(13）的解，记 $e_i^n=u(x_i,t_n)-u_i^n$，$0\leqslant i\leqslant M$，$1\leqslant n\leqslant N$，则有 $\|e^N\|_\infty\leqslant C_1(\Delta t^{3-\alpha}+h^2)$，其中，$C_1=\sqrt{[(a^2/(L_1b^2))(1+\sqrt{1+L_1^2b^2/a^2})](T^\alpha\Gamma(2-\alpha)/2)}$。

证明 用式（5）~式（7）减去式（11）-式（13），得到

$$(\Delta t^{1-\alpha}/\Gamma(3-\alpha))[b_0^{(\alpha)}\delta_t e_i^{n-1/2}-\sum_{k=1}^{n-1}(b_{n-k-1}^{(\alpha)}-b_{n-k}^{(\alpha)})\delta_t e_i^{k-1/2}]=$$
$$a^2\delta_x^2 e_i^{n-1/2}-b^2 e_i^{n-1/2}+R_i^{n-1/2},\ 1\leqslant i\leqslant M-1,\ 1\leqslant n\leqslant N,\tag{25}$$
$$e_i^0=0,\ 1\leqslant i\leqslant M-1,\tag{26}$$
$$e_0^n=0,\ e_M^n=0,\ 1\leqslant n\leqslant N。\tag{27}$$

式(25)~式(27)利用定理 1，得到 $\|e^N\|_\infty^2\leqslant[(2a^2/(L_1b^2))(1+\sqrt{1+L_1^2b^2/a^2})](T^{\alpha-1}\Gamma(2-$

$\alpha)/4)\Delta t\sum_{n=1}^{N}\|R^{n-1/2}\|^2 = [(a^2/(L_1b^2))(1+\sqrt{1+L_1^2b^2/a^2})](T^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)/2)\Delta t\sum_{n=1}^{N}\|R^{n-1/2}\|^2 \leqslant [(a^2/(L_1b^2))(1+\sqrt{1+L_1^2b^2/a^2})](T^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)/2)(\Delta t^{3-\alpha}+h^2)^2$。将其两端开方得到 $\|e^N\|_\infty \leqslant \sqrt{[(a^2/(L_1b^2))(1+\sqrt{1+L_1^2b^2/a^2})](T^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)/2)}(\Delta t^{3-\alpha}+h^2)^2$。定理 2 证毕。

3　数值例子

本节通过数值例子来验证有限差分格式（11）~(13）的误差和收敛阶。取时间 $T=1$，时间步长 $\Delta t=1/N$，空间 $L=5$，空间步长 $h=2L/M$，$a=b=1$。记 $E_\infty(h,\Delta t)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant M-1}|u(x_j,t_n)-u_j^n|$，时间收敛阶为 $\mathrm{Order}_1=\log_2(E_\infty(h,\Delta t)/E_\infty(h,\Delta t/2))$，空间收敛阶为 $\mathrm{Order}_2=\log_2(E_\infty(h,\Delta t)/E_\infty(h/2,\Delta t))$。

例 1　考虑时间分数阶 Klein-Gordon 方程：${}_0^CD_t^\alpha u(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)+b^2u(x,t)=f(x,t)$，$x\in[-5,5]$，$t\in(0,1]$。边界条件：$u(-5,t)=0$，$u(5,t)=0$，$t\in(0,1]$。初始条件：$u(x,0)=0$，$u_t(x,0)=0$，$x\in[-5,5]$。方程（1）~(3）源项为 $f(x,t)=6\mathrm{e}^{-x^2}t^{3-\alpha}/\Gamma(4-\alpha)-\mathrm{e}^{-x^2}(4x^2-2)t^3+\mathrm{e}^{-x^2}t^3$。方程（1）~(3）精确解为 $u(x,t)=\mathrm{e}^{-x^2}t^3$。

表 1 分别给出了 $\alpha=1.3$、1.5、1.8 和 $\Delta t=1/10$、1/20、1/40、1/80 差分格式（11）~(13）的误差和收敛阶。从表 1 中可以看出，差分格式（11）~(13）在无穷模下的时间方向上收敛阶为 $3-\alpha$。表 2 给出了 $\alpha=1.3$、1.5、1.8 和 $M=10$、20、40、80 差分格式（11）~(13）在 $T=1$ 处的误差和收敛阶，得到无穷模下的空间收敛阶为 2。由表 1 和表 2 可以看出，差分格式（11）~(13）的收敛速度较快，而且数值结果和理论分析结果是一致的。

表 1　例 1 的不同时间步长下的最大误差及收敛阶（$M=1\,000$）

Tab. 1　The maximum errors and convergence orders with different time node for example 1（$M=1\,000$）

α	Δt	$E_\infty(h,\Delta t)$	Order_1
1.3	1/10	$8.385\,5\times10^{-3}$	—
	1/20	$2.597\,0\times10^{-3}$	1.691 1
	1/40	$8.031\,4\times10^{-4}$	1.693 1
	1/80	$2.492\,7\times10^{-4}$	1.688 0
1.5	1/10	$1.936\,5\times10^{-2}$	—
	1/20	$6.927\,0\times10^{-3}$	1.483 1
	1/40	$2.463\,8\times10^{-3}$	1.491 4
	1/80	$8.747\,7\times10^{-4}$	1.493 9
1.8	1/10	$5.953\,4\times10^{-2}$	—
	1/20	$2.631\,7\times10^{-2}$	1.177 7
	1/40	$1.154\,8\times10^{-2}$	1.180 0
	1/80	$2.179\,3\times10^{-3}$	1.188 3

表 2　例 1 的不同空间步长下的最大误差及收敛阶（$N=1\,000$）

Tab. 2　The maximum errors and convergence orders with different spatial node for example 1（$N=1\,000$）

α	M	$E_\infty(h,\Delta t)$	Order_2
1.3	10	$7.691\,5\times10^{-2}$	—
	20	$1.838\,6\times10^{-2}$	2.064 7
	40	$4.495\,5\times10^{-3}$	2.032 1
	80	$1.119\,8\times10^{-3}$	2.005 3
1.5	10	$6.337\,2\times10^{-2}$	—
	20	$6.927\,0\times10^{-3}$	1.985 5
	40	$3.964\,3\times10^{-3}$	2.013 1
	80	$1.002\,2\times10^{-3}$	1.983 9
1.8	10	$4.442\,2\times10^{-2}$	—
	20	$1.113\,3\times10^{-3}$	1.996 4
	40	$2.689\,5\times10^{-3}$	2.049 4
	80	$6.700\,7\times10^{-4}$	2.005 0

例 2　考虑时间分数阶 Klein-Gordon 方程：${}_0^CD_t^\alpha u(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)+b^2u(x,t)=f(x,t)$，$x\in[-5,5]$，$t\in(0,1]$。边界条件：$u(-5,t)=0$，$u(5,t)=0$，$t\in(0,1]$。初始条件：$u(x,0)=x^2-25$，$u_t(x,0)=0$，$x\in[-5,5]$，方程（1）~(3）源项为：$f(x,t)=6(x^2-25)t^{3-\alpha}/\Gamma(4-\alpha)-2(t^3+1)+$

$(x^2-25)(t^3+1)$。方程（1）~(3) 精确解为 $u(x,t)=(x^2-25)(t^3+1)$。

同例 1，例 2 给出了有关时间和空间方向上无穷模下的误差和收敛阶。由表 3 可以看出，当 $\alpha=1.3$、1.5、1.8、时间步长成 1/2 倍减少时，差分格式（11）~(13) 的时间方向上是 $3-\alpha$ 阶收敛的。由表 4 可以看出，当 $\alpha=1.3$、1.5、1.8 时差分格式（11）~(13) 在无穷模下的空间方向上收敛阶为 2。这与定理 2 中差分格式的收敛阶是 $O(\Delta t^{3-\alpha}+h^2)$ 是一致的，说明数值结果和理论分析是一致。

表 3 例 2 的不同时间步长下的最大误差及收敛阶($M=1\ 000$)

Tab. 3 The maximum errors and convergence orders with different time node for example 2 ($M=1\ 000$)

α	Δt	$E_\infty(h,\Delta t)$	Order_1
1.3	1/10	$1.112\ 2\times10^{-1}$	—
	1/20	$3.448\ 2\times10^{-2}$	1.689 6
	1/40	$1.064\ 8\times10^{-2}$	1.695 2
	1/80	$3.282\ 7\times10^{-3}$	1.697 7
1.5	1/10	$2.470\ 4\times10^{-1}$	—
	1/20	$8.845\ 8\times10^{-2}$	1.481 7
	1/40	$3.146\ 9\times10^{-2}$	1.491 1
	1/80	$1.115\ 9\times10^{-2}$	1.495 6
1.8	1/10	$7.116\ 8\times10^{-1}$	—
	1/20	$3.131\ 2\times10^{-1}$	1.184 4
	1/40	$1.371\ 1\times10^{-1}$	1.191 3
	1/80	$5.988\ 1\times10^{-2}$	1.195 2

表 4 例 2 的不同空间步长下的最大误差及收敛阶($N=1\ 000$)

Tab. 4 The maximum errors and convergence orders with different spatial node for example 2 ($N=1\ 000$)

α	M	$E_\infty(h,\Delta t)$	Order_2
1.3	10	$2.949\ 9\times10^{-2}$	—
	20	$7.129\ 2\times10^{-3}$	2.048 9
	40	$1.768\ 4\times10^{-3}$	2.011 3
	80	$4.435\ 9\times10^{-4}$	1.995 1
1.5	10	$2.543\ 1\times10^{-2}$	—
	20	$6.266\ 0\times10^{-3}$	2.021 0
	40	$1.572\ 3\times10^{-3}$	1.994 7
	80	$4.073\ 4\times10^{-4}$	1.948 6
1.8	10	$1.913\ 9\times10^{-2}$	—
	20	$5.048\ 4\times10^{-3}$	1.922 6
	40	$1.447\ 6\times10^{-3}$	1.802 2
	80	$5.453\ 9\times10^{-4}$	1.408 3

4 结论

本文利用新的能量分析方法，证明了时间分数阶 Klein-Gordon 方程标准 $L1$ 差分格式的稳定性与收敛性。数值例子证明，该方法是一个简单、经济和高效的数值方法。下一步的研究将基于 $L1$ 新的能量分析方法推广应用到其他时间分数阶偏微分方程上，证明其有限差分格式解的稳定性和收敛性。除此之外，还可以建立基于 $L2$ 新的能量分析法来证明时间分数阶微分方程高阶的差分格式稳定性和收敛性。

[参考文献]

[1] DEHGHAN M, YOUSEFI S A, LOTFI A. The use of He's variational iteration method for solving the telegraph and fractional telegraph equations[J]. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, 2011, 27(2): 219-231. DOI: 10.1002/cnm.1293.

[2] DU R, CAO W R, SUN Z Z. A compact difference scheme for the fractional diffusion-wave equation[J]. Applied Mathematical Modelling, 2010, 34(10): 2998-3007. DOI: 10.1016/j.apm.2010.01.008.

[3] ESMAEILI S, SHAMSI M. A pseudo-spectral scheme for the approximate solution of a family of fractional differential equations[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(9): 3646-3654.

[4] MILLER K S, ROSS B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations[M]. New York: Wiley, 1993.

[5] OLDHAM K B, SPANIER J. The fractional calculus[J]. Mathematical Gazette, 1974, 56(247): 396-400. DOI: 10.1007/978-3-642-18101-6-2.

[6] PODLUBNY I. Fractional differential equations[M]. San Diego:Academic Press,1999.

[7] OLDHAM K B,SPANIER J. The fractional calculus:Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order[M]. New York:Dover Publications Inc. ,1972.

[8] METZLER R,KLAFTER J. The restaurant at the end of the random walk:recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics[J]. Journal of Physics A General Physics,2004,37:161-208. DOI:10.1088/0305-4470/37/31/R01.

[9] KAI D. The Analysis of fractional differential equations[M]. Berlin Heidelberg:Springer,2010.

[10] BAGLEY R L,TORVIK P J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity[J]. Journal of Rheology,1983,27(3):201-210. DOI:10.1122/1.549724.

[11] CUI M. Compact finite difference method for the fractional diffusion equation[J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(20):7792-7804. DOI:10.1016/j.jcp.2009.07.021.

[12] ZHANG J,WANG J R,ZHOU Y. Numerical analysis for Klein-Gordon equation with time-space fractional derivatives[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences,2020,43(4):3689-3700. DOI:10.1002/mma.6147.

[13] SUN Z Z,JI C C,DU R L. A new analytical technique of the L-type difference schemes for time fractional mixed sub-diffusion and diffusion-wave equations[J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 102: 106115. DOI: 10.1016/j.aml.2019.106115.

[14] LYU P,VONG S. A linearized second-order scheme for nonlinear time fractional Klein-Gordon type equations[J]. Numerical Algorithms,2018,78:485-511. DOI:10.1007/s11075-017-0385-y.

[15] VONG S,WANG Z. A compact difference scheme for a two dimensional fractional Klein-Gordon equation with Neumann boundary conditions[J]. Journal of Computational Physics,2014,274:268-282. DOI:10.1016/j.jcp.2014.06.022.

[16] VONG S,WANG Z. A high-order compact scheme for the nonlinear fractional Klein Gordon equation[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations,2015,31(3):706-722. DOI:10.1002/num.21912.

[17] CHEN H,LU S,CHEN W. A fully discrete spectral method for the nonlinear time fractional Klein-Gordon equation[J]. Taiwanese Journal of Mathematics,2017,21(1):231-251. DOI:10.11650/tjm.21.2017.7357.

[18] 孙志忠,高广花. 分数阶微分方程的有限差分方法[M]. 北京:科学出版社,2015.

(责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤)