

一类 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 方程的非平凡解

胡 仙, 蓝永艺

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] $\begin{cases} -(a+b\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2dx)\Delta u + u + \lambda\phi u = a(x)|u|^{p-2}u, u \in H(\mathbf{R}^3) \\ -\Delta\phi = u^2, \phi \in D^{1,2}(\mathbf{R}^3) \end{cases}$ 为一类非自治的 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 方程, 其中, $a>0$, $\lambda>0$, $b\geq 0$, $4<p<6$, $a(x)\in C(\mathbf{R}^3)$ 且 $a(x)$ 为变号。对 $a(x)$ 赋予适当的条件, 通过变分法、山路定理和一些分析技巧, 给出了该方程的非平凡解的存在性定理, 并利用强极值原理得到了它的正解。

[关键词] 非自治的 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 方程; 非平凡解; 变分法; 山路定理; 强极值原理

[中图分类号] O 177.91

Nontrivial Solutions to a Class of Kirchhoff-Schrödinger-Poisson Equation

HU Xian, LAN Yongyi

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: $\begin{cases} -(a+b\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2dx)\Delta u + u + \lambda\phi u = a(x)|u|^{p-2}u, u \in H(\mathbf{R}^3) \\ -\Delta\phi = u^2, \phi \in D^{1,2}(\mathbf{R}^3) \end{cases}$ was the nonautonomous Kirchhoff-Schrödinger-Poisson equation, where $a>0$, $\lambda>0$, $b\geq 0$, $4<p<6$, $a(x)\in C(\mathbf{R}^3)$ and $a(x)$ is sign changing. The existence theorem for nontrivial solution was obtained by variational method, mountain pass theorem and some analytical techniques under appropriate conditions for $a(x)$. The positive solution of the problem was obtained by using strong maximum principle.

Keywords: nonautonomous Kirchhoff-Schrödinger-Poisson equation; nontrivial solutions; variational method; mountain pass theorem; strong maximum principle

0 引言

近几年来, Schrödinger-Poisson 系统

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + q\phi u = f(x, u), x \in \mathbf{R}^3, \\ -\Delta\phi = u^2, x \in \mathbf{R}^3 \end{cases} \quad (1)$$

正解的存在性和不存在性, 以及多重解、变号解及古典解已被众多的学者广泛研究^[1-8]。当 $q>0$ 、 $p\leq 2$ 时, 或 $p\geq 6$ 、 $V(x)\equiv 1$ 、 $f(x, u)=|u|^{p-2}u$ 时, 文献 [1] 证明了问题 (1) 不存在非平凡解。当 $4\leq p<6$ 时, 文献 [2-3] 研究了问题 (1) 径向解和非径向解的存在性。文献 [4] 利用集中紧性原理

[收稿日期] 2021-04-23

[基金项目] 福建省自然科学基金项目 (2022J01339); 集美大学国家自然科学基金培育项目 (ZP2020057)

[作者简介] 胡 仙 (1997—), 女, 硕士生, 从事非线性泛函分析方向研究。通信作者: 蓝永艺 (1977—), 男, 副教授, 博士, 从事非线性泛函分析方向研究。E-mail: lanyongyi@jmu.edu.cn

和对称山路定理,证明了 \mathbf{R}^3 中有界光滑区域 Ω 上的带有临界非线性项和正参数 λ 、 δ 的 Schrödinger-Poisson 系统解的存在性和多重性。当 $q=1$ 、 $2 < p < 6$ 时,文献 [5] 证明了非平凡解和基态解的存在性。文献 [6-7] 研究了当 $q < 0$ 、 $f(x,u) = a(x)|u|^{p-2}u$ 时问题 (1) 正解的存在性。文献 [8] 讨论了两类渐近线性 Schrödinger-Poisson 系统正解的存在性,即 $q = \lambda$, $f(x,u) = q(x)f(u)$, $f(x,u) = q(x)f(u) + h(x)$ 。如今,系统

$$\begin{cases} -\Delta u + u + L(x)\phi u = f(x,u), x \in \mathbf{R}^3, \\ -\Delta \phi = L(x)u^2, x \in \mathbf{R}^3 \end{cases} \quad (2)$$

也开始引起了大家的关注。文献 [9] 基于一些条件和对 $L(x) \in L^2(\mathbf{R}^3)$ 的假设条件,证明了其解的存在性与不存在性。当 $4 < p < 6$ 、 $f(x,u) = a(x)|u|^{p-2}u + \lambda k(x)u$ 时,文献 [10] 研究了问题 (2) 多解的存在性。在文献 [10] 基础上,文献 [11] 研究了 $L(x) = 1$ 的多个正解的存在性。文献 [12] 在文献 [10-11] 基础上研究了 $2 < p < 4$ 方程的多解性。

本文在文献 [11] 研究基础上,考虑 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 方程

$$\begin{cases} -\left(a + b \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u + u + \lambda \phi u = a(x)|u|^{p-2}u, u \in H^1(\mathbf{R}^3), \\ -\Delta \phi = u^2, \phi \in D^{1,2}(\mathbf{R}^3) \end{cases} \quad (3)$$

非平凡解的存在性,其中, $a > 0$, $\lambda > 0$, $b \geq 0$, $4 < p < 6$, $a(x) \in C(\mathbf{R}^3)$ 且 $a(x)$ 为变号函数。

算子 $\left(\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u$ 来源于 Kirchhoff Dirichlet 问题: $\begin{cases} -\left(a + b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = f(x,u), x \in \Omega, \\ u = 0, x \in \partial \Omega, \end{cases}$

其中, $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, $a > 0$, $b \geq 0$ 。此问题与文献 [13] 提出的稳态方程 $\rho u_{xx} - [P_0/h + E \int_0^L |u_x|^2 dx / (2L)] u_{xx} = f(x,u)$ 密切相关,它是经典的自由振动 D'Alembert's 波动方程的一个推广。在文献 [11] 所考虑的问题基础上加了 $\left(\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u$ 算子系数,这使得问题 (3) 不再是点态等式,而是非局部的,这种现象在生物系统中得到了广泛应用,也激发了很多学者对这类问题进行相关研究。例如,文献 [14] 主要利用变分方法、Nehari 流形、Ekeland 变分原理,得到了含奇异项的 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 系统正解的存在性结果。文献 [15] 运用变分原理、山路定理和 Clark's 定理,研究了两类 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 系统的解的存在性。文献 [16] 考虑一类非线性 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 系统,在合适的条件下,利用变分法得到非平凡解。在问题 (3) 对应的能量函数中, $\left(\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 dx\right)^2$ 是四次的,这使得问题变得更加复杂和有趣。本文利用文献 [11] 所介绍的方法,得到了问题 (3) 的非平凡解的存在性定理。

为了得到主要结论,假设函数 $a(x)$ 满足下列条件: (A1) $a(x) \in C(\mathbf{R}^3)$ 且 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = a_\infty < 0$; (A2) $a(x)$ 为变号函数, $|\Omega^+| \neq 0$ 和 $|\Omega^-| \neq 0$, 其中: $\Omega^+ = \{x \in \mathbf{R}^3 : a(x) > 0\}$, $\Omega^- = \{x \in \mathbf{R}^3 : a(x) < 0\}$ 。另外 $|\Omega^0| = 0$, 其中 $\Omega^0 = \{x \in \mathbf{R}^3 : a(x) = 0\}$ 。

定理 1 设条件 (A1)、(A2) 成立且 $4 < p < 6$, 对任意的 $\lambda > 0$, 问题 (3) 至少有一个正解。

1 预备知识

接下来将给出一些基本概念。对固定的 $a > 0$, 在 Sobolev 空间 $H^1(\mathbf{R}^3)$ 中,定义其上内积和范数分别为 $(u,v) = \int_{\mathbf{R}^3} (a \nabla u \cdot \nabla v + uv) dx$ 、 $\|u\|^2 = \int_{\mathbf{R}^3} (a |\nabla u|^2 + u^2) dx$ 。 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3) = \{u \in L^6(\mathbf{R}^3) : \nabla u \in L^2(\mathbf{R}^3)\}$ 是 $C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ 关于范数 $\|u\|_{D^{1,2}}^2 = \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 dx$ 的完备化空间。当 $2 \leq p < 6$ 时, S_p 表

示 $H^1(\mathbf{R}^3)$ 嵌入 $L^p(\mathbf{R}^3)$ 的最佳 Sobolev 常数, 记为 $S_p = \inf_{u \in H^1(\mathbf{R}^3) \setminus \{0\}} \|u\| / \|u\|_{L^p}$ 。 \bar{S} 表示 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 嵌入 $L^6(\mathbf{R}^3)$ 的最佳 Sobolev 常数, 记为 $\bar{S} = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^3) \setminus \{0\}} \|u\|_{D^{1,2}} / \|u\|_{L^6}$ 。本文中, 对任意的 $\rho > 0$ 、 $x \in \mathbf{R}^3$, $B_\rho(x)$ 表示以 x 为球心、以 ρ 为半径的球。

由 Lax-Milgram 定理, 对任意的 $u \in H^1(\mathbf{R}^3)$, 都存在唯一的 $\phi_u \in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$, 使得对于所有的 $v \in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$, 都有 $\int_{\mathbf{R}^3} \nabla \phi_u \cdot \nabla v dx = \int_{\mathbf{R}^3} u^2 v dx$, 即 ϕ_u 是方程 $-\Delta \phi = u^2$ 的一弱解, 并且

$$\phi_u = \int_{\mathbf{R}^3} [u^2(y) / |x - y|] dy / (4\pi)。 \quad (4)$$

将式 (4) 代入式 (3) 的第一个方程可得

$$- \left(a + b \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u + u + \lambda \phi_u u = a(x) |u|^{p-2} u, \quad x \in \mathbf{R}^3。 \quad (5)$$

方程 (5) 是可变分的, 其能量泛函 $I: H^1(\mathbf{R}^3) \rightarrow \mathbf{R}$ 为 $I(u) = \|u\|^2/2 + b \left(\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 dx \right)^2/4 + \lambda \int_{\mathbf{R}^3} \phi_u u^2 dx/2 - \int_{\mathbf{R}^3} a(x) |u|^p dx/p$ 。显然, I 是 C^1 的, 且对任意的 $u, \psi \in H^1(\mathbf{R}^3)$, $\langle I'(u), \psi \rangle = - \left(a + b \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 dx \right) \int_{\mathbf{R}^3} \nabla u \cdot \nabla \psi dx + \int_{\mathbf{R}^3} u \psi dx + \lambda \int_{\mathbf{R}^3} \phi_u u \psi dx - \int_{\mathbf{R}^3} a(x) |u|^{p-2} u \psi dx$ 。因此, 如果 u 是 I 的临界点, 则 (u, ϕ_u) 是式 (3) 的弱解, 其中 ϕ_u 由式 (4) 给出。

2 定理的证明

分 3 步来证明定理 1。

第一步, (PS) 条件。先证任意的 $(PS)_c$ 序列在 $H^1(\mathbf{R}^3)$ 中都是有界的, 再证 I 满足 $(PS)_c$ 条件, 即任意的 $(PS)_c$ 序列都有收敛子列。

设 $H^1(\mathbf{R}^3)$ 中序列 $\{u_n\}$ 满足: $I(u_n)$ 有界, 且 $I'(u_n)$ 收敛于 0, 即 $I(u_n) \rightarrow c$, $I'(u_n) \rightarrow 0$ 。从而对任意的 $\psi \in H^1(\mathbf{R}^3)$, 都有 $\langle I'(u_n), \psi \rangle \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ 。

下面证明 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbf{R}^3)$ 中有界。反证法, 假设当 $n \rightarrow \infty$ 时, $t_n = \|u_n\| \rightarrow \infty$ 。令 $v_n = u_n/t_n$, 那么 $v_n \in H^1(\mathbf{R}^3)$ 且 $\|v_n\| = 1$ 。从而存在 $v \in H^1(\mathbf{R}^3)$, 使得在任意有界区域 $\Omega \in \mathbf{R}^3$ 上, 有

$$\begin{cases} v_n \rightarrow v \text{ 在 } H^1(\mathbf{R}^3), \\ v_n \rightarrow v \text{ 在 } \mathbf{R}^3, \\ v_n \rightarrow v \text{ 在 } L^r(\Omega), \quad 2 \leq r < 6, \\ |v_n(x)| \leq w(x), \quad w(x) \text{ 在 } L^r(\Omega)。 \end{cases} \quad (6)$$

接下来证 $v(x) = 0$ 在 \mathbf{R}^3 。令 $u_n = t_n v_n$,

$$\begin{aligned} \langle I'(u_n), \psi \rangle / t_n &= \left(a + b t_n^2 \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla v_n|^2 dx \right) \int_{\mathbf{R}^3} \nabla v_n \cdot \nabla \psi dx + \int_{\mathbf{R}^3} v_n \psi dx + \lambda t_n^2 \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{v_n} v_n \psi dx - \\ &\quad t_n^{p-2} \int_{\mathbf{R}^3} a(x) |v_n|^{p-2} v_n \psi dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty。 \end{aligned} \quad (7)$$

接着证 x 包含在 Ω^+ 和 Ω^- 中。假设条件 (A1) 和 (A2), 暗示 $\Omega^+ \neq \emptyset$ 和 $\Omega^- \neq \emptyset$ 。首先考虑 $x \in \Omega^+$ 的情况。因为 $a(x) \in C(\mathbf{R}^3)$, 这里存在 $\delta > 0$, 有

$$a(y) > 0, \quad \text{任意的 } y \in B_\delta(x)。 \quad (8)$$

定义 $\xi_m \in C^1(\mathbf{R}^3)$ ($m > 2$), 对任意的 $y \in \mathbf{R}^3$, 都有 $\xi_m(y) \geq 0$, 且: $\xi_m(y) = 1$, $y \in B_{(1/2-1/m^2)\delta}(x)$; $\xi_m(y) = 0$, $y \in \mathbf{R}^3 \setminus B_{\delta/2}(x)$ 。令式 (7) 中 $\psi = v \xi_m$, 对于任何 $m \in \mathbf{N}$ 、 $m > 2$, 都有 $\text{supp } \psi \subset B_{\delta/2}(x)$ 。由式 (6) 可推出: $a(y) |v_n(y)|^{p-2} v_n(y) \psi(y) \rightarrow a(y) |v(y)|^{p-2} v(y) \psi(y)$, $y \in B_{\delta/2}(x)$;

$|a(y)|v_n(y)|^{p-2}v_n(y)\psi(y)| \leq C|w(y)|^{p-1}|\psi(y)| \in L^1(B_{\delta/2}(x))$ 。因此, 通过勒贝格控制收敛定理可以得到 $\int_{B_{\delta/2}(x)} a(y)|v_n(y)|^{p-2}v_n(y)\psi(y)dy \rightarrow \int_{B_{\delta/2}(x)} a(y)|v(y)|^{p-2}v(y)\psi(y)dy$ 。式 (7) 除以 t_n^{p-2} 并当 $n \rightarrow \infty$ 时取极限, 可得

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^3} a(y)|v_n|^{p-2}v_n\psi dy = \int_{B_{\delta/2}(x)} a(y)|v_n|^{p-2}v_n\psi dy = \int_{B_{(1/2-1/m^2)\delta}(x)} a(y)|v_n|^p dy + \int_{B_{\delta/2}(x) \setminus B_{(1/2-1/m^2)\delta}(x)} a(y)|v_n|^p \xi_m dy, \quad (9)$$

其中 $m \in \mathbf{N}$ 且 $m > 2$ 。当 $m \rightarrow \infty$ 时, 对式 (9) 取极限, 可得 $\int_{B_{\delta/2}(x)} a(y)|v|^{p-2}v dy = 0$, 此式与式 (8) 说明, $v = 0$ 在 $B_{\delta/2}(x)$ 中。因为 $x \in \Omega^+$ 是任意的, 所以得到 $v = 0$ 在 Ω^+ 中。同样, 可以得到 $v = 0$ 在 Ω^- 中。因为 $|\Omega^0| = 0$, 所以可以完成证明。对 $I_\lambda(u_n) \rightarrow c$ 两边同除以 $t_n^2 = \|u_n\|^2$, 可得

$$1/2 + b\left(\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx\right)^2 / (4t_n^2) + \lambda t_n^2 F(v_n)/4 - \int_{\mathbf{R}^3} a(x)|u_n|^{p-2}v_n dx / p \rightarrow 0. \quad (10)$$

令 $\langle I'(u_n), \psi \rangle \rightarrow 0$ 中 $\psi = v_n$, 并对式 (10) 两边分别除以 $t_n = v_n$, 可得

$$1 + b\left(\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx\right)^2 / t_n^2 + \lambda t_n^2 F(v_n) - \int_{\mathbf{R}^3} a(x)|u_n|^{p-2}v_n dx \rightarrow 0. \quad (11)$$

结合式 (10) ~ 式 (11) 和 $4 < p < 6$ 的假设, 可推断出 $\int_{\mathbf{R}^3} a(x)|u_n|^{p-2}v_n dx = p/(4-p) < 0$ 。另外, 由式 (10) 可得 $\int_{\mathbf{R}^3} a(x)|u_n|^{p-2}v_n dx > 0$ 。可见, 上面两式矛盾, 因此 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbf{R}^3)$ 中是有界的。

现在证明 $\{u_n\}$ 有收敛子列, 依然记为 $\{u_n\}$ 。假设存在 $u \in H^1(\mathbf{R}^3)$, 使得

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u \text{ 在 } H^1(\mathbf{R}^3), \\ u_n \rightarrow u \text{ 在 } \mathbf{R}^3, \\ \nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ 在 } L^2(\mathbf{R}^3), \\ u_n \rightarrow u \text{ 在 } L^2(\mathbf{R}^3). \end{cases} \quad (12)$$

定义 $U_n = a(x)|u_n|^{p-2}u_n$ 和 $U = a(x)|u|^{p-2}u$, 有 $U_n \rightarrow U$ 在 \mathbf{R}^3 中。当 $4 < p < 6$ 时, 因为 $\{u_n\}$ 在 $L^p(\mathbf{R}^3)$ 中有界, $a(x)$ 在 \mathbf{R}^3 中有界, 所以 U_n 在 $L^{p/(p-1)}(\mathbf{R}^3)$ 有界, 且 $U_n \rightarrow U$ 在 $L^{p/(p-1)}(\mathbf{R}^3)$ 上。

对于任意的 $\psi \in H^1(\mathbf{R}^3)$, 都有 $\int_{\mathbf{R}^3} a(x)|u_n|^{p-2}u_n\psi dx \rightarrow \int_{\mathbf{R}^3} a(x)|u|^{p-2}u\psi dx$, $\int_{\mathbf{R}^3} (a\nabla u_n \cdot \nabla \psi + u_n\psi) dx \rightarrow \int_{\mathbf{R}^3} (a\nabla u \cdot \nabla \psi + u\psi) dx$, $n \rightarrow \infty$ 。因为 $I'(u_n) \rightarrow 0$, 所以对任意的 $\psi \in H^1(\mathbf{R}^3)$, 且当 n 足够大时, 都有 $o(1)\|\psi\| = \langle I'(u_n), \psi \rangle = \int_{\mathbf{R}^3} (a\nabla u_n \cdot \nabla \psi dx + u_n\psi) dx + b \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx \int_{\mathbf{R}^3} \nabla u_n \cdot \nabla \psi dx + \lambda \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n \psi dx - \int_{\mathbf{R}^3} a(x)|u_n|^{p-2}u_n\psi dx = \int_{\mathbf{R}^3} (a\nabla u \cdot \nabla \psi dx + u\psi) dx + b \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx \int_{\mathbf{R}^3} \nabla u_n \cdot \nabla \psi dx + \lambda \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n \psi dx - \int_{\mathbf{R}^3} a(x)|u|^{p-2}u\psi dx$ 。

首先令 $\psi = u$, 当 n 足够大时, 有

$$o(1)\|u\| = \|u\|^2 + b \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx \int_{\mathbf{R}^3} \nabla u_n \cdot \nabla u dx + \lambda \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n u dx - \int_{\mathbf{R}^3} a(x)|u|^p dx. \quad (13)$$

然后令 $\tilde{u}_n = u_n - u$, 则有 $\tilde{u}_n \rightarrow 0$ 在 $H^1(\mathbf{R}^3)$ 。接着利用文献 [17] 中的 Brezis-Lieb 引理, 可以得到:

$$\|u_n\|^2 = \|u\|^2 + \|\tilde{u}_n\|^2 + o(1), \quad \int_{\mathbf{R}^3} a(x)|u_n|^p dx = \int_{\mathbf{R}^3} a(x)|u|^p dx + \int_{\mathbf{R}^3} a(x)|\tilde{u}_n|^p dx + o(1).$$

当 n 足够大时, 可得

$$o(1) \|u_n\| = \langle I'(u_n), u_n \rangle = \|u_n\|^2 + b \left(\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx \right)^2 + \lambda \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbf{R}^3} a(x) |u_n|^p dx =$$

$$\|u\|^2 + \|\tilde{u}_n\|^2 + b \left(\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx \right)^2 + \lambda \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbf{R}^3} a(x) |u|^p dx - \int_{\mathbf{R}^3} a(x) |\tilde{u}_n|^p dx + o(1). \quad (14)$$

结合式 (13) 和式 (14), 可得 $o(1) \|u_n\| = \|\tilde{u}_n\|^2 + b \left(\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx \right)^2 - b \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx \int_{\mathbf{R}^3} \nabla u_n \cdot \nabla u_n dx +$
 $\lambda \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbf{R}^3} a(x) |\tilde{u}_n|^p dx + o(1) \|u\| - \lambda \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n u dx$, 即 $\|\tilde{u}_n\|^2 = \int_{\mathbf{R}^3} a(x) |\tilde{u}_n|^p dx + o(1)$
 $\|u_n\| - o(1) \|u\| + \lambda \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n u dx - \lambda \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx + b \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx \int_{\mathbf{R}^3} \nabla u_n \cdot \nabla u dx - b \left(\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx \right)^2$.

由式 (12) 可知, 存在 $\nabla u \in L^2(\mathbf{R}^3)$, 使得 $b \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx \int_{\mathbf{R}^3} \nabla u \cdot \nabla (u_n - u) dx \rightarrow 0$ 。所以有
 $b \left(\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx \right)^2 - b \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx \int_{\mathbf{R}^3} \nabla u_n \cdot \nabla u dx = b \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx \int_{\mathbf{R}^3} \nabla u_n \cdot \nabla (u_n - u) dx =$
 $b \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla (u_n - u)|^2 dx + b \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx \int_{\mathbf{R}^3} \nabla u_n \cdot \nabla (u_n - u) dx \geq 0$ 。因此,

$$0 \leq \|\tilde{u}_n\|^2 \leq \int_{\mathbf{R}^3} a(x) |\tilde{u}_n|^p dx + o(1) \|\tilde{u}_n\| - o(1) \|u\| + \lambda \left(\int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n u dx - \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \right). \quad (15)$$

参考文献 [18], 如果 $u_n \rightarrow u$ 在 \mathbf{R}^3 , 则 $\phi_{u_n}(x) \rightarrow \phi_u(x)$ 在 \mathbf{R}^3 。由 ϕ_{u_n} 的定义, 有 $\|\phi_{u_n}\|_{D^{1,2}}^2 =$
 $\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla \phi_{u_n}|^2 dx = \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \leq \|\phi_{u_n}\|_{L^6} \|u_n\|_{L^{12/5}}^2 \leq \bar{S}^{-1} \|u_n\|_{L^{12/5}}^2 \|\phi_{u_n}\|_{D^{1,2}},$ 即 $\|\phi_{u_n}\|_{D^{1,2}} \leq$
 $\bar{S}^{-1} \|u_n\|_{L^{12/5}}^2$ 。所以可得, $\|\phi_{u_n}\|_{L^6} \leq \bar{S}^{-1} \|\phi_{u_n}\|_{D^{1,2}} \leq \bar{S}^{-2} \|u_n\|_{L^{12/5}}^2 \leq \bar{S}^{-2} \bar{S}_{12/5}^{-2} \|u_n\|^2 \leq C$ 。因此存在一个子序列 (依然设为 ϕ_{u_n}), 使得 $\phi_{u_n} \rightarrow \phi_u$ 在 $L^6(\mathbf{R}^3)$ 。又因为 $u \in H^1(\mathbf{R}^3)$ 、 $u^2 \in L^{6/5}(\mathbf{R}^3)$, 所以当
 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \rightarrow \int_{\mathbf{R}^3} \phi_u u^2 dx$ 。因为 $u_n \rightarrow u$ 在 \mathbf{R}^3 、 $\phi_{u_n}(x) \rightarrow \phi_u(x)$ 在 \mathbf{R}^3 , 则 $\phi_{u_n}(x) u_n(x) \rightarrow$
 $\phi_u(x) u(x)$ 在 \mathbf{R}^3 。利用 $\|\phi_{u_n} u_n\|_{L^2} \leq \|\phi_{u_n}\|_{L^6} \|u_n\|_{L^3} \leq \bar{S}^{-2} \bar{S}_{12/5}^{-2} \|u_n\|^2 \|u_n\|_{L^3} \leq C$ 可以得到,
 $\phi_{u_n} u_n \in L(\mathbf{R}^3)$ 和 $\phi_{u_n} u_n \in L^2(\mathbf{R}^3)$ 在 $L^2(\mathbf{R}^3)$ 上有界。因此存在一个子序列 (依然设为 ϕ_{u_n}), 使得
 $\phi_{u_n} u_n \rightarrow \phi_u u$ 在 $L^2(\mathbf{R}^3)$ 。又因为 $u \in L^2(\mathbf{R}^3)$, 有 $\int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 u dx \rightarrow \int_{\mathbf{R}^3} \phi_u u^2 dx$ 。

注意到, 当 n 足够大时, $\int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n u dx = \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} (u + \tilde{u}_n)^2 dx - \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n u dx =$
 $\int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u^2 dx + 2 \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u \tilde{u}_n dx + \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} \tilde{u}_n^2 dx - \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n u dx$, $\int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u \tilde{u}_n dx = o(1)$ 。因为 $\int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u^2 dx \rightarrow$
 $\int_{\mathbf{R}^3} \phi_u u^2 dx$ 和 $\int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n u dx \rightarrow \int_{\mathbf{R}^3} \phi_u u^2 dx$, 所以当 n 足够大时, 有 $\int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n u dx = \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} \tilde{u}_n^2 dx +$
 $o(1)$ 。即当 n 足够大时, 有

$$\int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 u dx - \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n} u_n u dx \leq 0. \quad (16)$$

接下来, 不失一般性, 假设 $a_\infty < -1$ 。由条件 (A1) 可知, 存在 $R_0 > 0$, 使得 $a(x) < -1$,
 $|x| > R_0$ 。又因为 $a(x) \in C(\mathbf{R}^3)$ 和 $4 < p < 6$, 得到 $u_n \rightarrow u$ 在 $H^1(\mathbf{R}^3)$ 。由 Sobolev 嵌入定理, 有

$$\int_{|x| \leq R_0} a(x) |u_n - u|^p dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

由式 (15) ~ 式 (17) 可以推断出: $0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|^2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^3} a(x) |u_n - u|^p dx \leq$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq R_0} a(x) |u_n - u|^p dx \rightarrow 0$ 。这就证明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n \rightarrow u$ 在 $H^1(\mathbf{R}^3)$ 中。

第二步,山路几何结构。由 Hölder 不等式,有 $I(u) = \|u\|^2/2 + b\left(\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 dx\right)^2/4 + \lambda \int_{\mathbf{R}^3} \phi_u u^2 dx/4 - \int_{\mathbf{R}^3} a(x) |u|^p dx/p \geq \|u\|^2/2 - C \|u\|^p$ 。当 $\rho = \|u\|$ 足够小时,就有 $\|u\|^2/2 - C \|u\|^p > 0$, 因此可以得到 $I(u) > 0$ 。

选择 $\psi \in H^1(\mathbf{R}^3)$ 且 $\text{supp } \psi \in \Omega^+$, 使得对所有的 $x \in \Omega^+$, 都有 $\psi(x) \geq 0$, $I(s\psi) = s^2/2 + bs^4\left(\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla \psi|^2 dx\right)^2/4 + \lambda s^4 \int_{\mathbf{R}^3} \phi_\psi \psi^2 dx/4 - s^p \int_{\Omega^+} a(x) |\psi|^p dx/p$ 。当 $s \rightarrow \infty$ 时, $I(s\psi) \rightarrow -\infty$ 。因此, 存在 $\bar{u} = s\psi \in H^1(\mathbf{R}^3)$, 且 $\|\bar{u}\| > \rho$ 满足 $I(\bar{u}) < 0$ 。

第三步, I 的临界值。对于第二步中的 \bar{u} , 定义 $\Gamma := \{\gamma: C[0,1] \rightarrow H^1(\mathbf{R}^3) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \bar{u}\}$, $c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t))$ 。

因为 $I(u) = I(|u|)$ 在 $H^1(\mathbf{R}^3)$ 中, 所以可得 $u \geq 0$ 在 \mathbf{R}^3 , 它为问题 (3) 的解且满足 $I(u) > 0$ 。由强极大值原理可得, $u > 0$ 在 \mathbf{R}^3 中。

[参 考 文 献]

- [1] D'APRILE T, MUGNAI D. Non-existence results for the coupled Klein-Gordon-Maxwell equations[J]. Advanced Nonlinear Studies, 2004, 4(3): 307-322. DOI: 10.1515/ans-2004-0305.
- [2] D'APRILE T, MUGNAI D. Solitary waves for nonlinear Klein-Gordon-Maxwell and Schrödinger Maxwell equations[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 2004, 134(5): 893-906.
- [3] D'AVENIA P. Non-radially symmetric solutions of nonlinear Schrödinger equation coupled with Maxwell equations[J]. Advanced Nonlinear Studies, 2002, 2(2): 177-192. DOI: 10.1515/ans-2002-0205.
- [4] 谷花, 李宇华. 带有临界指数的 Schrödinger-Poisson 系统解的多重性[J]. 河南科学, 2019, 37(1): 10-14.
- [5] CHEN S T, TANG X H. On the planar Schrödinger-Poisson systems with the axially symmetric potential[J]. Journal of Differential Equations, 2020, 268(3): 945-976. DOI: 10.1016/j.jde.2019.08.036.
- [6] GAO Y P, YU S L, TANG C L. Positive ground state solutions to Schrödinger-Poisson systems with a negative non-local term[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2015, 118: 1-11.
- [7] VAIRA G. Ground states for Schrödinger-Poisson type systems[J]. Ricerche Di Matematica, 2011, 60(2): 263-297.
- [8] 马超. 两类渐近线性 Schrödinger-Poisson 系统正解的存在性[D]. 重庆: 西南大学, 2014.
- [9] CERAMI G, VAIRA G. Positive solution for some non-autonomous Schrödinger-Poisson systems[J]. Journal of Differential Equations, 2010, 248: 521-543. DOI: 10.1016/j.jde.2009.06.017.
- [10] HUANG L R, ROCHA E M, CHEN J Q. Two positive solutions of a class of Schrödinger-Poisson system with indefinite nonlinearity[J]. Journal of Differential Equations, 2013, 255(8): 2463-2483. DOI: 10.1016/j.jde.2013.06.022.
- [11] CHEN J Q. Multiple positive solutions of a class of non autonomous Schrödinger-Poisson systems[J]. Nonlinear Analysis RWA, 2015, 21: 13-26. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2014.06.002.
- [12] GAN W B, LIU S B. Multiple positive solutions of a class of Schrödinger-Poisson equation involving indefinite nonlinearity in \mathbf{R}^3 [J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 93: 111-116. DOI: 10.1016/j.aml.2019.01.032.
- [13] KIRCHHOFF G. Mechanik[M]. Leipzig: Teubner, 1883.
- [14] 牟孟钧. 含奇异项的基尔霍夫-薛定谔-泊松方程的正解[D]. 济南: 山东师范大学, 2018.
- [15] 刘紫玉. 两类基尔霍夫薛定谔型方程解的存在性研究[D]. 太原: 中北大学, 2019.
- [16] CHEN Y S, CHANG H J. Existence and concentration of solutions for an indefinite Schrödinger-Kirchhoff system[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2020, 35(1): 37-45.
- [17] BRÉZIS H, LIEB E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1983, 8: 486-490.
- [18] ZHAO L G, ZHAO F K. Positive solutions for Schrödinger-Poisson equations with a critical exponent[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70: 2150-2164. DOI: 10.1016/j.na.2008.02.116.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)