第 28 卷　第 5 期
2023 年 9 月

集美大学学报（自然科学版）
Journal of Jimei University (Natural Science)

Vol. 28　No. 5
Sep. 2023

［文章编号］1007－7405(2023)05－0407－08　　DOI:10.19715/j.jmuzr.2023.05.03

具变系数和弱阻尼的非局部高阶波方程的长时间动力学行为

吕鹏辉[1]，余莎莎[2]，林国广[3]

（1. 苏州大学应用技术学院，江苏 苏州 215325；2. 苏州工业园区星洋学校，江苏 苏州 215127；
3. 云南大学数学与统计学院，云南 昆明 650500）

［**摘要**］研究具变系数和弱阻尼的非局部高阶波方程的渐近行为。通过合理的先验估计及经典 Galerkin 方法，证明方程整体解的存在唯一性；根据先验估计引理，得到有界吸收集。结果表明，当变系数 $a(x) \geqslant a_{00} > 0$ 时，该类方程存在整体吸引子族。

［**关键词**］非局部高阶波方程；整体解；变系数弱阻尼；整体吸引子族

［**中图分类号**］O 175.2

Long-time Dynamic Behavior of Nonlocal Higher-Order Wave Equations with Variable Coefficients and Weak Damping

LÜ Penghui[1], YU Shasha[2], LIN Guoguang[3]

(1. Applied Technology College of Soochow University, Suzhou 215325, China; 2. Suzhou Industrial Park Xingyang School, Suzhou 215127, China; 3. School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming 650500, China)

Abstract: The asymptotic behavior of nonlocal higher-order wave equation with variable coefficients and weak damping was studied. The existence and uniqueness of global solution of the equation were proved by reasonable prior estimation and classical Galerkin method. Then the bounded absorption set was obtained according to the prior estimation lemma. Finally, when the variable coefficient $a(x) \geqslant a_{00} > 0$, the family of global attractors of the equation was obtained.

Keywords: nonlocal higher-order wave equation; global solution; weak damping with variable coefficient; family of global attractors

0　引言

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 是具有光滑边界的有界区域，本文主要研究 Ω 上具有变系数和弱阻尼非局部高阶波方程的渐近行为，即

$$\begin{cases} u_{tt} + a(x)u_t + (-\Delta)^{2m}u + M(\|\nabla^m u\|^2)(-\Delta)^m u + g(x,u) = f(x), \\ u = 0,\ \partial^i u/\partial \boldsymbol{v}^i = 0, i - 1,2,\cdots,2m-1,\ x \in \Gamma,\ t \geqslant 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ x \in \Omega。 \end{cases} \tag{1}$$

［**收稿日期**］2021－03－11
［**基金项目**］云南省教育厅基金项目（2020J0908）；江苏省高等学校基础科学（自然科学）项目（21KJB110013）
［**作者简介**］吕鹏辉（1989—），男，讲师，从事无穷维动力系统方向研究，E-mail:18487279097@163.com

其中：Γ 为 Ω 的光滑边界；$\boldsymbol{\nu}$ 是边界 Γ 上的外法向量；$m>1$；$a(x)$ 为变系数函数；$M(\|\nabla^m u\|^2)$ 是非负一阶连续可导函数；$g(x,u)$ 是满足一定增长条件和耗散条件的非线性函数；$f(x)$ 是外力项。

波动方程通常描述弦的振动规律或者波的运动规律，弦的振动和波的运动通常伴随着阻尼和外力，阻尼通常来自于物体内摩擦或者介质摩擦。梁方程作为一类特殊的波动方程，主要描述梁的偏转和实用负载关系，该方程与基础建设如房屋、桥梁、公路、铁路等息息相关。Woinowsky-Krieger[1] 于 1950 年研究了一维问题下梁的振动问题，建立了模型

$$u_{tt}-\alpha u_{xxxx}-\left(\beta+\gamma\int_0^L|u_x|^2\mathrm{d}x\right)u_{xx}=0。\tag{2}$$

式(2)中的非线性部分表示梁的延伸效应。在 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 下，式(2)的一般形式为

$$u_{tt}+\Delta^2u-M(\|\nabla u\|^2)\Delta u+g(u_t)+f(u)=h(x)。\tag{3}$$

近年来，人们致力于式（3）的可展梁或板方程的研究，也得到了该类问题的许多重要结果。Lin 等[2] 研究了具阻尼项的广义非线性 Kirchhoff-Boussinesq 方程的整体动力学，得到了该类方程的整体吸引子和指数吸引子；Feng 等[3] 研究了一类具强阻尼非线性非自治可延伸板方程解的长时间动力学，在初始条件、非线性项和外力项的适当条件下，证明了问题整体解的存在性，并且得到了一致吸引子的存在。更多有关梁板方程的研究可见文献［4－6］。

变系数 $a(x)$ 表示空间坐标 x 处的波速，它出现在海洋声学、数学物理等许多领域的波动现象中，因此，研究具变系数的波方程的相关性质具有重要的现实意义。许多学者也研究了具变系数的波动方程的长时间动力学行为，如：Limaco 等[7] 研究了具有变系数 Kirchhoff 方程在非线性内阻尼作用下初边值问题强解的整体唯一性及总能量的指数衰减性；Karachalios 等[8] 研究了半线性双曲方程 $u_{tt}+\delta u_t-\varphi(x)\Delta u+\lambda f(u)=\eta(x)$ 的柯西问题，它克服了无界域中算子非紧性带来的困难，并且得到了解的局部存在性和整体吸引子的存在性。更多有关具变系数的波方程研究可见文献［9－11］。

随着研究的深入，学者开始研究高阶波动方程的长时间动力学行为。Messaoudia 等[12] 研究了具有 Dirichlet 边界条件的多维高阶 Kirchhoff 方程，估计了正初始能量下解爆破。林国广等[13] 研究了一类非线性非局部且具强阻尼项的高阶 Kirchhoff 方程的初边值问题，得到了该类高阶方程的整体解的存在唯一性。更多关于高阶 Kirchhoff 方程的相关研究可见文献［14－16］。

目前，对于具变系数的高阶波方程的渐近行为研究较少，主要遇到的困难是在求解问题时，变系数的处理方式不同。当 $a(x)$ 是正常数时，作为 u_t 的阻尼系数，此时在做内积过程时，可直接提到内积外面；当 $a(x)$ 是变系数函数时，$a(x)u_t$ 与 $(-\Delta)^k\boldsymbol{v}(k=1,2,\cdots,2m)$ 做内积，将不能直接把 $a(x)$ 提出，此时如何处理变系数将成为得到渐近紧的关键。本文运用合理的假设和莱布尼兹公式，灵活处理了变系数带来的耗散估计问题，克服了变系数带来的困难，进而得到有界吸收集和渐近紧性，最后得到问题的整体吸引子族。

1 预备知识

本节主要给出动力系统和整体吸引子(族)的相关理论。

首先引进本文需用到的相关记号。定义 $H=L^2(\Omega)$ 上的内积和范数分别为 $(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$，$L^p=L^p(\Omega)$，$\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{L^p}$，其中 $p\geqslant1$。现令 $V_{2m}=H_0^{2m}(\Omega)=H^{2m}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，$V_{2m+k}=H_0^{2m+k}(\Omega)=H^{2m+k}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，$k=0,1,\cdots,2m$，其相应的内积和范数分别为 $(u,v)_{V_{2m+k}}=(\nabla^{2m+k}u,\nabla^{2m+k}v)$、$\|u\|_{V_{2m+k}}=\|\nabla^{2m+k}u\|_H$。同时，有一般形式的 Poincare 不等式：$\lambda_1\|\nabla^r u\|^2\leqslant\|\nabla^{r+1}u\|^2$，其中 λ_1 是 $-\Delta$ 的第一特征值。文中，C_i 为正常数，$C(\cdot)$ 表示依赖于括号内参数的正常数，C_m^n 为对应的组合数。

定义 1[13] 设 X 是完备度量空间，$S(t):X\to X(t\in\mathbf{R}^+)$ 是连续算子族，若对任意 $s,t\in\mathbf{R}^+$，$S(t)$ 满足 $S(0)=I$、$S(t+s)=S(t)S(s)$，则称 $\{S(t)\}_{t\geqslant0}$ 是 X 上的算子半群，$(S(t),X)$ 构成连续动力系统，X 称为该动力系统的相空间。

定义 2[13]（整体吸引子）　设 X 是 Banach 空间，$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 为连续的算子半群，如果紧集 $A\subset X$ 满足：1）不变性，在半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 作用下为不变集，即 $S(t)A=A(\forall t\geqslant 0)$；2）吸引性，$A$ 吸引 X 中一切有界集，即 $\forall B\subset X$ 为 X 中的有界集，则有：$\mathrm{dist}(S(t)B,A)=\sup\limits_{x\in B}\inf\limits_{y\in A}\|S(t)x-y\|_X\to 0(t\to\infty)$。特别地，当 $t\to\infty$ 时，从 u_0 出发的一切轨道 $S(t)u_0$ 收敛于 A 内，即有 $\mathrm{dist}(S(t)u_0,A)\to 0(t\to\infty)$，则称紧集 A 为半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的整体吸引子。

引理 1[13]　设 X 是 Banach 空间，连续的算子半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 满足：1）半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在 X 中一致有界，即 $\forall R>0$，存在正常数 $C(R)$，使得 $\|u\|_X\leqslant R$，有 $\|S(t)u\|_X\leqslant C(R)$，$\forall t\in(0,+\infty)$；2）存在 X 中有界吸收集 B_0，则任意一个有界集 $B\subset X$，存在一个时刻 t_0，使得 $S(t)B\subset B_0$，$t\geqslant t_0$；3）对 $t>0$，$S(t)$ 是全连续算子，那么半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 具有紧的整体吸引子 A。

定义 3（整体吸引子族）　设 $X_k(k=1,2,\cdots,2m)$ 是 Banach 空间，$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 为连续的算子半群，如果紧集 $A_k\subset X_k$ 满足：1）不变性，在半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 作用下为不变集，即 $S(t)A_k=A_k(\forall t\geqslant 0)$；2）吸引性，$A_k$ 吸引 X_k 中一切有界集，即 $\forall B_k\subset X_k$ 为 X_k 中的有界集，则有：$\mathrm{dist}(S(t)B_k,A_k)=\sup\limits_{x\in B_k}\inf\limits_{y\in A_k}\|S(t)x-y\|_{X_k}\to 0(t\to\infty)$。特别地，当 $t\to\infty$ 时，从 u_0 出发的一切轨道 $S(t)u_0$ 收敛于 A_k 内，即有 $\mathrm{dist}(S(t)u_0,A_k)\to 0(t\to\infty)$，则称紧集 A_k 为半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的整体吸引子族。

引理 2　设 $X_k(k=1,2,\cdots,2m)$ 是 Banach 空间，连续的算子半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 满足：1）半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在 X_k 中一致有界，即 $\forall R>0$，存在正常数 $C_k(R_k)$，使得 $\|u\|_{X_k}\leqslant R_k$，有 $\|S(t)u\|_{X_k}\leqslant C_k(R_k)$，$\forall t\in(0,+\infty)$；2）存在 X_k 中有界吸收集 B_{0k}，则任意一个有界集 $B\subset X_k$，存在一个时刻 t_{0k}，使得 $S(t)B\subset B_{0k}$，$t\geqslant t_{0k}$；3）对 $t>0$，$S_k(t)$ 是全连续算子，那么半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 具有紧的整体吸引子族 A_k。

2　整体解的存在性

首先给出问题（1）的假设条件：（H）变系数 $a(x)$，满足 $a\in C_0^\infty(\Omega)$，$a(x)\geqslant a_{00}>0$，$\partial^i a/\partial\boldsymbol{\nu}^i|_\Gamma=0$，$a_0=\|a(x)\|_\infty$；（M）$M\in C^1(\mathbf{R}^+)$，且 $M'(s)\geqslant 0$，$M(s)\geqslant M(0)=M_0\geqslant 0$，$\forall s\in\mathbf{R}^+$，$x\in\Omega$，$k=0,1,\cdots,2m$。非线性项 $g(x,u)$ 满足下列条件：存在正常数 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5>0$，对 $\forall u\in\mathbf{R}$，$x\in\Omega$，满足

$$|g(x,u)|\leqslant\beta_1|u|^p+\Phi_1(x),\Phi_1\in L^2(\Omega),\tag{4}$$

$$ug(x,u)-\beta_2 G(x,u)\geqslant\Phi_2(x),\Phi_2\in L^1(\Omega),\tag{5}$$

$$G(x,u)\geqslant\beta_3|u|^{p+1}-\Phi_3(x),\Phi_3\in L^1(\Omega),\tag{6}$$

$$|g_u(x,u)|\leqslant\beta_4|u|^{p-1}+\Phi_4(x),\Phi_4\in V_m(\Omega),\tag{7}$$

$$|\nabla_x^k g(x,u)|\leqslant\beta_5|u|^p+\Phi_5(x),\Phi_5\in V_k(\Omega)。\tag{8}$$

当 $N=1,2$ 时，$1\leqslant p<+\infty$；当 $N=3,4$ 时，$1\leqslant p<N/(N-2)$，其中 $G(x,u)=\int_0^u g(x,s)\mathrm{d}s$。由方程（4）~方程（5）可得

$$G(x,u)\leqslant\beta_6(|u|^2+|u|^{p+1}+\Phi_1^2+\Phi_2)。\tag{9}$$

定义相空间 $X_k=V_{2m+k}\times V_k$，$k=0,1,\cdots,2m$。当 $k=0$ 时，$V_0=L^2$，则定义范数为 $\|(u,\boldsymbol{v})\|_{X_k}^2=\|u\|_{V_{2m+k}}^2+\|v\|_{V_k}^2$。

设 $\varepsilon>0$ 足够小，且满足

$$7a_{00}/4-2\varepsilon>0,\ \lambda_1^{2m}+M_0\lambda_1^m-1/4-a_0\varepsilon>0。\tag{10}$$

引理 3　设条件（H）成立，M 满足条件（M），$f\in H$，式（4）~式（8）成立，$(u,u_1)\in X_0$，由问题（1）确定的 $(u,\boldsymbol{v})$ 满足

$$\|\boldsymbol{v}\|^2+\|\Delta^m u\|+\int_0^{\|\nabla^m u\|^2}M(s)\,\mathrm{d}s-\varepsilon(a(x)u,u)+\varepsilon^2\|u\|^2+2\int_\Omega G(x,u)\,\mathrm{d}x\leqslant \mathrm{e}^{-\sigma_1 t}[\|\boldsymbol{v}_0\|^2+\|\Delta^m u_0\|^2+\int_0^{\|\nabla^m u\|^2}M(s)\,\mathrm{d}s-\varepsilon(a(x)u_0,u_0)+\varepsilon^2\|u_0\|^2+2\int_\Omega G(x,u_0)\,\mathrm{d}x]+4\|f(x)\|^2/(a_{00}\sigma_1),$$

其中 $\boldsymbol{v}=u_t+\varepsilon u$。且存在一个正常数 R_0 和 $t_0>0$，使得 $\|(u,\boldsymbol{v})\|_{X_0}^2=\|\boldsymbol{v}\|^2+\|\nabla^{2m}u\|^2\leqslant R_0$，$t>t_0$。

证明 将 $\boldsymbol{v}$ 与方程组（1）在 $L^2(\Omega)$ 中作内积，得

$$(1/2)\mathrm{d}\|\boldsymbol{v}\|^2/\mathrm{d}t+(a(x)\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})-\varepsilon\|\boldsymbol{v}\|^2-\varepsilon(a(x)u,\boldsymbol{v})+\varepsilon^2(u,\boldsymbol{v})+((-\Delta)^{2m}u,\boldsymbol{v})+(M(\|\nabla^m u\|^2)(-\Delta)^m u,\boldsymbol{v})+(g(x,u),\boldsymbol{v})=(f(x),\boldsymbol{v})。\tag{11}$$

分别处理式（11）中各项得

$$\varepsilon(a(x)u,\boldsymbol{v})=\varepsilon(a(x)u,u_t+\varepsilon u)=(\varepsilon/2)\mathrm{d}(a(x)u,u)/\mathrm{d}t+\varepsilon^2(a(x)u,u),\tag{12}$$

$$\varepsilon^2(u,\boldsymbol{v})=\varepsilon^2(u,(u_t+\varepsilon u))=(\varepsilon^2/2)\mathrm{d}\|u\|^2/\mathrm{d}t+\varepsilon^3\|u\|^2,\tag{13}$$

$$((-\Delta)^{2m}u,\boldsymbol{v})=(\Delta^{2m}u,(u_t+\varepsilon u))=(1/2)\mathrm{d}\|\Delta^m u\|^2/\mathrm{d}t+\varepsilon\|\Delta^m u\|^2,\tag{14}$$

$$\begin{aligned}M(\|\nabla^m u\|^2)((-\Delta)^m u,\boldsymbol{v})&=M(\|\nabla^m u\|^2)(\nabla^m u,\nabla^m\boldsymbol{v})=M(\|\nabla^m u\|^2)(\nabla^m u,\nabla^m(u_t+\varepsilon u))=\\&(1/2)M(\|\nabla^m u\|^2)\mathrm{d}\|\nabla^m u\|^2/\mathrm{d}t+\varepsilon M(\|\nabla^m u\|^2)\|\nabla^m u\|^2=\\&(1/2)\mathrm{d}\int_0^{\|\nabla^m u\|^2}M(s)\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t+\varepsilon M(\|\nabla^m u\|^2)\|\nabla^m u\|^2,\end{aligned}\tag{15}$$

$$(g(x,u),\boldsymbol{v})=(g(x,u),u_t+\varepsilon u)=\mathrm{d}\int_\Omega G(x,u)\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t+\varepsilon(g(x,u),u),\tag{16}$$

$$(f(x),\boldsymbol{v})\leqslant\|f(x,t)\|\|\boldsymbol{v}\|\leqslant a_{00}\|\boldsymbol{v}\|^2/8+2\|f(x)\|^2/a_{00}。\tag{17}$$

将式（12）~式（17）代入式（11）中，得到

$$\mathrm{d}[\|\boldsymbol{v}\|^2+\|\Delta^m u\|^2+\int_0^{\|\nabla^m u\|^2}M(s)\,\mathrm{d}s-\varepsilon(a(x)u,u)+\varepsilon^2\|u\|^2+2\int_\Omega G(x,u)\,\mathrm{d}x]/\mathrm{d}t+2(a(x)\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})-2\varepsilon\|\boldsymbol{v}\|^2-a_{00}\|\boldsymbol{v}\|^2/4+2\varepsilon\|\Delta^m u\|^2+2\varepsilon M(\|\nabla^m u\|^2)\|\nabla^m u\|^2-2\varepsilon^2(a(x)u,u)+2\varepsilon^3\|u\|^2+2\varepsilon(g(x,u),u)\leqslant 4\|f(x)\|^2/a_{00}。\tag{18}$$

根据假设（H）、（M）和式（5），得

$$2(a(x)\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})-2\varepsilon\|\boldsymbol{v}\|^2-a_{00}\|\boldsymbol{v}\|^2/4\geqslant(7a_{00}/4-2\varepsilon)\|\boldsymbol{v}\|^2,\tag{19}$$

$$\varepsilon\int_0^{\|\nabla^m u\|^2}M(s)\,\mathrm{d}s\leqslant\varepsilon M(\|\nabla^m u\|^2)\|\nabla^m u\|^2,\tag{20}$$

$$2\varepsilon(g(x,u),u)\geqslant 2\varepsilon(\beta_2\int_\Omega G(x,u)\,\mathrm{d}x+\int_\Omega \Phi_2(x)\,\mathrm{d}x)。\tag{21}$$

由式（10）及式（19）~式（21），取 $\sigma_1=\min\{7a_{00}/4-2\varepsilon,\varepsilon,2\varepsilon\beta_2\}$，则式（18）化为

$$\mathrm{d}[\|\boldsymbol{v}\|^2+\|\Delta^m u\|^2+\int_0^{\|\nabla^m u\|^2}M(s)\,\mathrm{d}s-\varepsilon(a(x)u,u)+\varepsilon^2\|u\|^2+2\int_\Omega G(x,u)\,\mathrm{d}x]/\mathrm{d}t+\sigma_1[\|\boldsymbol{v}\|^2+\|\Delta^m u\|^2+\int_0^{\|\nabla^m u\|^2}M(s)\,\mathrm{d}s-\varepsilon(a(x)u,u)+\varepsilon^2\|u\|^2+2\int_\Omega G(x,u)\,\mathrm{d}x]+2\varepsilon\int_\Omega\Phi_2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 4\|f(x)\|^2/a_{00}。\tag{22}$$

由 Gronwall 不等式和式（22）可得：$\|\boldsymbol{v}\|^2+\|\Delta^m u\|^2+\int_0^{\|\nabla^m u\|^2}M(s)\,\mathrm{d}s-\varepsilon(a(x)u,u)+\varepsilon^2\|u\|^2+2\int_\Omega G(x,u)\,\mathrm{d}x\leqslant\mathrm{e}^{-\sigma_1 t}[\|\boldsymbol{v}_0\|^2+\|\Delta^m u_0\|^2+\int_0^{\|\nabla^m u_0\|^2}M(s)\,\mathrm{d}s-\varepsilon(a(x)u_0,u_0)+\varepsilon^2\|u_0\|^2+2\int_\Omega G(x,u_0)\,\mathrm{d}x]+4\|f(x)\|^2/(a_{00}\sigma_1)$。由 $\int_0^{\|\nabla^m u\|^2}M(s)\,\mathrm{d}s-\varepsilon(a(x)u,u)+\varepsilon^2\|u\|^2\geqslant M_0\|\nabla^m u\|^2-\varepsilon a_0\lambda_1^{-m}\|\nabla^m u\|^2+\varepsilon^2\|u\|^2$、式（9）、式（10），则 $\|\boldsymbol{v}\|^2+\|\Delta^m u\|^2\leqslant C_0\mathrm{e}^{-\sigma_1 t}[\|\boldsymbol{v}_0\|^2+\|\Delta^m u_0\|^2+\int_0^{\|\nabla^m u_0\|^2}M(s)\,\mathrm{d}s-\varepsilon(a(x)u_0,u_0)+\varepsilon^2\|u_0\|^2+2\int_\Omega G(x,u_0)\,\mathrm{d}x]+4C_0\|f(x)\|^2/(a_{00}\sigma_1)$，并且，$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\|(u,\boldsymbol{v})\|_{X_0}^2\leqslant 4C_0\|f(x)\|^2/$

$(a_{00}\sigma_1)$。因此，存在一个正常数 R_0 和 $t_0>0$，使得 $\|(u,\boldsymbol{v})\|_{X_0}^2=\|\boldsymbol{v}\|^2+\|\Delta^m u\|^2\leqslant R_0$，$t>t_0$。引理 3 证毕。

引理 4　设条件（H）成立，M 满足条件（M），$f\in V_k$，式（4）~式（8）成立，$(u,u_1)\in X_k$，$k=1,2,\cdots,2m$。由问题（1）确定的 $(u,\boldsymbol{v})$ 满足：$\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2+\|\nabla^{2m+k}u\|^2\leqslant C_k\mathrm{e}^{-\sigma_2 t}[\|\nabla^k\boldsymbol{v}_0\|^2+\|\nabla^{2m+k}u_0\|^2+M_0(M_1)\|\nabla^{m+k}u_0\|^2-\varepsilon(a(x)\nabla^k u_0,\nabla^k u_0)+\varepsilon^2\|\nabla^k u_0\|^2]+C_k[C(R_0)+4\|\nabla^k f(x)\|^2/a_{00}]/\sigma_2$，其中 $\boldsymbol{v}=u_t+\varepsilon u$，且存在一个正常数 R_k 和 $t_k>0$，使得 $\|(u,\boldsymbol{v})\|_{X_k}^2=\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2+\|\nabla^{2m+k}u\|^2\leqslant R_k$，$t>t_k$。

证明　将 $(-\Delta)^k\boldsymbol{v}(k=1,2,\cdots,2m)$ 与方程组（1）在 $L^2(\Omega)$ 中做内积，得

$$(1/2)\mathrm{d}\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2/\mathrm{d}t-\varepsilon\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2+(a(x)\boldsymbol{v},(-\Delta)^k\boldsymbol{v})-\varepsilon(a(x)u,(-\Delta)^k\boldsymbol{v})+\varepsilon^2(u,(-\Delta)^k\boldsymbol{v})+((-\Delta)^{2m}u,(-\Delta)^k\boldsymbol{v})+(M(\|\nabla^m u\|^2)(-\Delta)^m u,(-\Delta)^k\boldsymbol{v})+(g(x,u),(-\Delta)^k\boldsymbol{v})=(f(x),(-\Delta)^k\boldsymbol{v})。\tag{23}$$

分别处理式（23）各项得

$$(a(x)\boldsymbol{v},(-\Delta)^k\boldsymbol{v})=(a(x)\nabla^k\boldsymbol{v},\nabla^k\boldsymbol{v})+(\sum_{i=1}^k C_k^i\nabla^{k-i}\boldsymbol{v}\,\nabla^i a(x),\nabla^k\boldsymbol{v}),\tag{24}$$

$$\varepsilon(a(x)u,(-\Delta)^k\boldsymbol{v})=\varepsilon(a(x)\nabla^k u,\nabla^k\boldsymbol{v})+\varepsilon(\sum_{i=1}^k C_k^i\nabla^{k-i}\boldsymbol{v}\,\nabla^i a(x),\nabla^k u)=(\varepsilon/2)\mathrm{d}(a(x)\nabla^k u,\nabla^k u)/\mathrm{d}t+\varepsilon^2(a(x)\nabla^k u,\nabla^k u)+\varepsilon(\sum_{i=1}^k C_k^i\nabla^{k-i}\boldsymbol{v}\,\nabla^i a(x),\nabla^k u),\tag{25}$$

$$\varepsilon^2(u,(-\Delta)^k\boldsymbol{v})=\varepsilon^2(u,(-\Delta)^k(u_t+\varepsilon u))=(\varepsilon^2/2)\mathrm{d}\|\nabla^k u\|^2/\mathrm{d}t+\varepsilon^3\|\nabla^k u\|^2,\tag{26}$$

$$((-\Delta)^{2m}u,(-\Delta)^k\boldsymbol{v})=((-\Delta)^{2m}u,(-\Delta)^k(u_t+\varepsilon u))=(1/2)\mathrm{d}\|\nabla^{2m+k}u\|^2/\mathrm{d}t+\varepsilon\|\nabla^{2m+k}u\|^2,\tag{27}$$

$$M(\|\nabla^m u\|^2)((-\Delta)^m u,(-\Delta)^k\boldsymbol{v})=M(\|\nabla^m u\|^2)(\nabla^{m+k}u,\nabla^{m+k}\boldsymbol{v})=M(\|\nabla^m u\|^2)(\nabla^{m+k}u,\nabla^{m+k}(u_t+\varepsilon u))=(1/2)M(\|\nabla^m u\|^2)\mathrm{d}\|\nabla^{m+k}u\|^2/\mathrm{d}t+\varepsilon M(\|\nabla^m u\|^2)\|\nabla^{m+k}u\|^2,\tag{28}$$

$$(g(x,u),(-\Delta)^k\boldsymbol{v})=(\nabla_x^k g(x,u),\nabla^k\boldsymbol{v})\leqslant\left|\int_\Omega(\beta_5|u|^p+\Phi_5(x))\nabla^k\boldsymbol{v}\mathrm{d}x\right|\leqslant\beta_5\left|\int_\Omega|u|^p\nabla^k\boldsymbol{v}\mathrm{d}x\right|+\left|\int_\Omega\Phi_5(x)\nabla^k\boldsymbol{v}\mathrm{d}x\right|\leqslant\beta_5\|u\|_{L^{2p}}^p\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|+\|\Phi_5(x)\|\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|\leqslant a_{00}\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2/8+C_{k\_1}(R_0^{p/2}+\|\Phi_5(x)\|^2),\tag{29}$$

$$(f(x),(-\Delta)^k\boldsymbol{v})=(\nabla^k f(x),\nabla^k\boldsymbol{v})\leqslant\|\nabla^k f(x)\|\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|\leqslant a_{00}\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2/8+2\|\nabla^k f(x)\|^2/a_{00}。\tag{30}$$

又有 $(\nabla^{k-i}\boldsymbol{v}\,\nabla^i a(x),\nabla^k\boldsymbol{v})\leqslant a_i\|\nabla^{k-i}\boldsymbol{v}\|\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|$，$i=1,2,\cdots,k$，$a_i=\|\nabla^i a(x)\|_\infty$，根据内插不等式得 $\|\nabla^{k-i}\boldsymbol{v}\|\leqslant C_{ki}\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^{\alpha_{ki}}\|\boldsymbol{v}\|^{1-\alpha_{ki}}$，$\alpha_{ki}=(k-i)/k$，则

$$C_k^i(\nabla^{k-i}\boldsymbol{v}\,\nabla^i a(x),\nabla^k\boldsymbol{v})\leqslant C_k^i C_{ki}a_i\|\boldsymbol{v}\|^{1-\alpha_{ki}}\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^{1+\alpha_{ki}}\leqslant a_{00}\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2/(8k)+(1-\alpha_{ki})/2[a_{00}/(4(1-\alpha_{ki})k)]^{(1+\alpha_{ki})/(1-\alpha_{ki})}(C_k^i C_{ki}a_i)^{2/(1-\alpha_{ki})}\|\boldsymbol{v}\|^2,\tag{31}$$

$$(C_k^i\nabla^{k-i}\boldsymbol{v}\,\nabla^i a(x),\nabla^k u)\leqslant\|\nabla^k u\|^2/(8k)+2k(C_k^i a_i)^2\|\nabla^{k-i}\boldsymbol{v}\|^2\leqslant\|\nabla^k u\|^2/(8k)+a_{00}\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2/(8k)+(1-\alpha_{ki})[a_{00}/(8\alpha_{ki}k)]^{\alpha_{ki}/(\alpha_{ki}-1)}[2k(C_k^i a_i C_{ki})^2]^{1/(1-\alpha_{ki})}\|\boldsymbol{v}\|^2。\tag{32}$$

结合式（23）~式（32）得到

$$\mathrm{d}[\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2+\|\nabla^{2m+k}u\|^2-\varepsilon(a(x)\nabla^k u,\nabla^k u)+\varepsilon^2\|\nabla^k u\|^2]/\mathrm{d}t+M(\|\nabla^m u\|^2)\mathrm{d}\|\nabla^{m+k}u\|^2/\mathrm{d}t+2(a(x)\nabla^k\boldsymbol{v},\nabla^k\boldsymbol{v})-(3+\varepsilon)a_{00}\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2/4-2\varepsilon\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2+2\varepsilon\|\nabla^{2m+k}u\|^2+2\varepsilon M(\|\nabla^m u\|^2)\|\nabla^{m+k}u\|^2-\varepsilon\|\nabla^k u\|^2/4-2\varepsilon^2(a(x)\nabla^k u,\nabla^k u)+2\varepsilon^3\|\nabla^k u\|^2\leqslant\sum_{i=1}^k\{(1-\alpha_{ki})[a_{00}/(4(1-\alpha_{ki})k)]^{(1+\alpha_{ki})/(1-\alpha_{ki})}(C_k^i C_{ki}a_i)^{2/(1-\alpha_{ki})}\|\boldsymbol{v}\|^2\}+2\varepsilon\sum_{i=1}^k\{(1-\alpha_{ki})[a_{00}/(8\alpha_{ki}k)]^{\alpha_{ki}/(\alpha_{ki}-1)}[2k(C_k^i a_i C_{ki})^2]^{1/(1-\alpha_{ki})}\|\boldsymbol{v}\|^2\}+4\|\nabla^k f(x)\|^2/a_{00}+2C_{k\_1}(R_0^{p/2}+\|\Phi_5(x)\|^2)\leqslant C(R_0)+4\|\nabla^k f(x)\|^2/a_{00}。\tag{33}$$

当 $\mathrm{d}\|\nabla^{m+k}u\|^2/\mathrm{d}t+2\varepsilon\|\nabla^{m+k}u\|^2\geqslant 0$ 时，$M(\|\nabla^m u\|^2)(\mathrm{d}\|\nabla^{m+k}u\|^2/\mathrm{d}t+2\varepsilon\|\nabla^{m+k}u\|^2)\geqslant\mathrm{d}(M_0$

$\|\nabla^{m+k}u\|^2)/\mathrm{d}t+2\varepsilon M_0\|\nabla^{m+k}u\|^2$；当 $\mathrm{d}\|\nabla^{m+k}u\|^2/\mathrm{d}t+2\varepsilon\|\nabla^{m+k}u\|^2<0$ 时，$M(\|\nabla^m u\|^2)(\mathrm{d}\|\nabla^{m+k}u\|^2/\mathrm{d}t+2\varepsilon\|\nabla^{m+k}u\|^2)\geqslant \mathrm{d}(M_1\|\nabla^{m+k}u\|^2)/\mathrm{d}t+2\varepsilon M_1\|\nabla^{m+k}u\|^2$，其中由引理 3 得 $M_0\leqslant M(s)\leqslant M_1$。则式（33）变换为：$\mathrm{d}[\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2+\|\nabla^{2m+k}u\|^2+M_0(M_1)\|\nabla^{m+k}u\|^2-\varepsilon(a(x)\nabla^k u,\nabla^k u)+\varepsilon^2\|\nabla^k u\|^2]/\mathrm{d}t+2(a(x)\nabla^k\boldsymbol{v},\nabla^k\boldsymbol{v})-(3+\varepsilon)a_{00}\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2/4-2\varepsilon\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2+2\varepsilon\|\nabla^{2m+k}u\|^2+2\varepsilon M_0(M_1)\|\nabla^{m+k}u\|^2-\varepsilon\|\nabla^k u\|^2/4-2\varepsilon^2(a(x)\nabla^k u,\nabla^k u)+2\varepsilon^3\|\nabla^k u\|^2\leqslant C(R_0)+4\|\nabla^k f(x)\|^2/a_{00}$。由式（10），令 $\sigma_2=\min\{5a_{00}/4-\varepsilon a_{00}/4-2\varepsilon,\varepsilon\}$，则有：$\mathrm{d}[\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2+\|\nabla^{2m+k}u\|^2+M_0(M_1)\|\nabla^{m+k}u\|^2-\varepsilon(a(x)\nabla^k u,\nabla^k u)+\varepsilon^2\|\nabla^k u\|^2]/\mathrm{d}t+\sigma_2[\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2+\|\nabla^{2m+k}u_0\|^2+M_0(M_1)\|\nabla^{m+k}u\|^2-\varepsilon(a(x)\nabla^k u,\nabla^k u)+\varepsilon^2\|\nabla^k u\|^2]\leqslant C(R_0)+4\|\nabla^k f(x)\|^2/a_{00}$。

利用 Gronwall 不等式，可得：$\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2+\|\nabla^{2m+k}u\|^2+M_0(M_1)\|\nabla^{m+k}u\|^2-\varepsilon(a(x)\nabla^k u,\nabla^k u)+\varepsilon^2\|\nabla^k u\|^2\leqslant \mathrm{e}^{-\sigma_2 t}[\|\nabla^k\boldsymbol{v}_0\|^2+\|\nabla^{2m+k}u_0\|^2+M_0(M_1)\|\nabla^{m+k}u_0\|^2-\varepsilon(a(x)\nabla^k u_0,\nabla^k u_0)+\varepsilon^2\|\nabla^k u_0\|^2]+[C(R_0)+4\|\nabla^k f(x)\|^2/a_{00}]/\sigma_2$，由假设（H）、式（10）得：$\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2+\|\nabla^{2m+k}u\|^2\leqslant C_k\mathrm{e}^{-\sigma_2 t}[\|\nabla^k\boldsymbol{v}_0\|^2+\|\nabla^{2m+k}u_0\|^2+M_0(M_1)\|\nabla^{m+k}u_0\|^2-\varepsilon(a(x)\nabla^k u_0,\nabla^k u_0)+\varepsilon^2\|\nabla^k u_0\|^2]+C_k[C(R_0)+4\|\nabla^k f(x)\|^2/a_{00}]/\sigma_2$，并且，$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|(u,\boldsymbol{v})\|_{X_k}^2\leqslant C_k[C(R_0)+4\|\nabla^k f(x)\|^2/a_{00}]/\sigma_2$。因此，存在一个正常数 R_k 和 $t_k>0$，使得 $\|(u,\boldsymbol{v})\|_{X_k}^2=\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2+\|\nabla^{2m+k}u\|^2\leqslant R_k$，$t>t_k$。引理 4 证毕。

引理 5（整体解的存在唯一性） 在引理 3、引理 4 假设条件下，$(u,u_1)\in X_k$，$k=0,1,\cdots,2m$，则初边值问题（1）存在唯一的整体解 $(u,\boldsymbol{v})\in L^\infty([0,+\infty);X_k)$。

证明 1）解的存在性。利用 Galerkin 方法证明整体解的存在性。

第一步，近似解构造。设 $(-\Delta)^{2m+k}w_j=\lambda_j^{2m+k}w_j$，$k=0,1,2,\cdots,2m$，其中 λ_j 是 $-\Delta$ 在 Ω 上带有齐次 Dirichlet 边界的特征值，w_j 为特征值 λ_j 的特征函数。由特征值理论知，$w_1,w_2,\cdots,w_n$ 构成 H 的标准正交基。

设问题（1）的近似解是 $u_n(t)=\sum_{j=1}^n h_j(t)w_j$，其中 $h_j(t)$ 由非线性常微分方程组

$$(u_{tt}+a(x)u_t+(-\Delta)^{2m}u+M(\|\nabla^m u\|^2)(-\Delta)^m u+g(x,u),w_j)=(f(x),w_j),\ j=1,2,\cdots,n \tag{34}$$

确定，满足初始条件 $u_n(0)=u_{n0}$，$u_{nt}(0)=u_{n1}$。当 $n\to+\infty$ 时，在 X_k 中 $(u_{n0},u_{n1})\to(u_0,u_1)$，由常微分方程的基本理论可知，近似解 $u_n(t)$ 在 $(0,t_n)$ 存在。

第二步，先验估计。现需证明 $X_k(k=0,1,\cdots,2m)$ 空间解的存在性，故在式（34）两端同时乘以 $\lambda_j^k(h_j'(t)+\varepsilon h_j(t))$，并对 j 求和，令 $\boldsymbol{v}_n(t)=u_{nt}(t)+\varepsilon u_n(t)$。由引理 3 和引理 4 得，当 $k=0$ 时，得到 X_0 空间中解的先验估计 $\|(u_n,\boldsymbol{v}_n)\|_{X_0}^2=\|\boldsymbol{v}_n\|^2+\|\nabla^{2m}u_n\|^2\leqslant R_0$，$t>t_0$；当 $k=1,2,\cdots,2m$ 时，得到 X_k 空间中解的先验估计 $\|(u_n,\boldsymbol{v}_n)\|_{X_k}^2=\|\nabla^k\boldsymbol{v}_n\|^2+\|\nabla^{2m+k}u_n\|^2\leqslant R_k$，$t>t_k$。由此可知，$(u_n,\boldsymbol{v}_n)$ 在 $L^\infty([0,+\infty);X_0)$ 中有界，$(u_n,\boldsymbol{v}_n)$ 在 $L^\infty([0,+\infty);X_k)$ 中有界。

第三步，极限过程。在 $X_k(k=0,1,\cdots,2m)$ 空间中，从序列 u_n 中选取子列，任用 u_n 表示，则

$$(u_n,\boldsymbol{v}_n)\to(u,\boldsymbol{v}) \tag{35}$$

在 $L^\infty([0,+\infty);X_k)$ 中弱 * 收敛。由 Rellich-Kohdrachov 紧嵌入定理知，$X_k(k=1,2,\cdots,2m)$ 紧嵌入 X_0，有 $(u_n,\boldsymbol{v}_n)\to(u,\boldsymbol{v})$ 在 X_0 中几乎处处强收敛。由式（35）得 $(u_{nt},(-\Delta)^k w_j)=(\boldsymbol{v}_n,\lambda_j^k w_j)-(\varepsilon u_n,\lambda_j^k w_j)$，故 $(u_{nt},(-\Delta)^k w_j)\to(\boldsymbol{v},\lambda_j^k w_j)-(\varepsilon u,\lambda_j^k w_j)$ 在 $L^\infty[0,+\infty)$ 中弱 * 收敛。由 $(u_{ntt},(-\Delta)^k w_j)=\mathrm{d}(u_{nt},(-\Delta)^k w_j)/\mathrm{d}t$，故 $(u_{ntt},(-\Delta)^k w_j)\to(u_{tt},\lambda_j^k w_j)$ 在 $D'[0,+\infty)$ 中收敛，$D'(0,+\infty)$ 是 $D[0,+\infty)$ 无穷可微空间的共轭空间。由于 $((-\Delta)^{2m}u_n,(-\Delta)^k w_j)=(\nabla^{2m+k}u_n,\lambda_j^{2m+k}w_j)\to(\nabla^{2m+k}u,\lambda_j^{2m+k}w_j)$ 在 $L^\infty[0,+\infty)$ 中弱 * 收敛，故 $M(\|\nabla^m u_n\|^2)((-\Delta)^m u_n,(-\Delta)^k w_j)=M(\|\nabla^m u_n\|^2)(\nabla^{m+k}u_n,\lambda_j^{m+k}w_j)\to M(\|\nabla^m u\|^2)(\nabla^{m+k}u,\lambda_j^{m+k}w_j)$ 在 $L^\infty[0,+\infty)$ 中弱 * 收敛。由 $(a(x)u_{nt},(-\Delta)^k w_j)=(a(x)\nabla^k u_{nt},\lambda_j^k w_j)+$

$(\sum_{i=1}^{k} C_k^i \lambda_j^{k-i} w_j \nabla^i a(x), \nabla^k u_{nt})(a(x)\nabla^k v_n, \lambda_j^k w_j) - (\varepsilon a(x)\nabla^k u_n, \lambda_j^k w_j) + (\sum_{i=1}^{k} C_k^i \lambda_j^{k-i} w_j \nabla^i a(x), \nabla^k v_n) - (\sum_{i=1}^{k} C_k^i \lambda_j^{k-i} w_j \nabla^i a(x), \varepsilon\nabla^k u_n)$，则 $(a(x)u_{nt}, (-\Delta)^k w_j) = (a(x)\nabla^k u_{nt}, \lambda_j^k w_j) + (\sum_{i=1}^{k} C_k^i \lambda_j^{k-i} w_j \nabla^i a(x), \nabla^k u_{nt}) = (a(x)\nabla^k v_n, \lambda_j^k w_j) - (\varepsilon a(x)\nabla^k u_n, \lambda_j^k w_j) + (\sum_{i=1}^{k} C_k^i \lambda_j^{k-i} w_j \nabla^i a(x), \nabla^k \boldsymbol{v}_n) - (\sum_{i=1}^{k} C_k^i \lambda_j^{k-i} w_j \nabla^i a(x), \varepsilon\nabla^k u_n) \to (a(x)\nabla^k \boldsymbol{v}, \lambda_j^k w_j) - (\varepsilon a(x)\nabla^k u, \lambda_j^k w_j) + (\sum_{i=1}^{k} C_k^i \lambda_j^{k-i} w_j \nabla^i a(x), \nabla^k \boldsymbol{v}) - (\sum_{i=1}^{k} C_k^i \lambda_j^{k-i} w_j \nabla^i a(x), \varepsilon\nabla^k u)$ 在 $L^\infty[0, +\infty)$ 中弱 * 收敛。

根据假设可知，$(g(x,u_n), w_j) \to (g(x,u), w_j)$ 在 $L^\infty[0, +\infty)$ 中弱 * 收敛，易得 $(u_n(0), u_{nt}(0)) \to (u_0, u_1)$ 在 X_k 中弱收敛。当 $j \to +\infty$ 及 $n \to +\infty$ 时，可得 $(u_{tt} + a(x)u_t + (-\Delta)^{2m}u + M(\|\nabla^m u\|^2)(-\Delta)^m u + g(x,u), (-\Delta)^k w_j) = (f(x), (-\Delta)^k w_j)$，$j = 1,2,\cdots,n$，因此得到问题（1）解的存在性。

2）解的唯一性。设 u_1 和 u_2 是方程的两个解，令 $w = u_1 - u_2$，则将 $\overline{w} = w_t + \varepsilon w$ 与问题（1）在 $L^2(\Omega)$ 中做内积，得

$$(1/2)\mathrm{d}(\|\overline{w}\|^2 + \|\Delta^m w\|^2)/\mathrm{d}t + (a(x)\overline{w}, \overline{w}) - \varepsilon\|\overline{w}\|^2 + \varepsilon\|\Delta^m w\|^2 + \varepsilon^2(w, \overline{w}) - \varepsilon(a(x)w, \overline{w}) + (M(\|\nabla^m u_1\|^2)(-\Delta)^m u_1 - M(\|\nabla^m u_2\|^2)(-\Delta)^m u_2, \overline{w}) + (g(x,u_1) - g(x,u_2), \overline{w}) = 0。\tag{36}$$

类似于引理 3、引理 4 处理方法，得

$$\varepsilon^2(w, \overline{w}) = (\varepsilon^2/2)\mathrm{d}\|w\|^2/\mathrm{d}t + \varepsilon^3\|w\|^2,\tag{37}$$

$$\varepsilon(a(x)w, \overline{w}) \leqslant \varepsilon a_0\|w\|\|\overline{w}\| \leqslant \varepsilon a_0\|w\|^2/2 + \varepsilon a_0\|\overline{w}\|^2/2,\tag{38}$$

$$(M(\|\nabla^m u_1\|^2)(-\Delta)^m u_1 - M(\|\nabla^m u_2\|^2)(-\Delta)^m u_2, \overline{w}) = M(\|\nabla^m u_1\|^2)((-\Delta)^m w, \overline{w}) + (M(\|\nabla^m u_1\|^2) - M(\|\nabla^m u_2\|^2))((-\Delta)^m u_2, \overline{w}) = (1/2)M(\|\nabla^m u_1\|^2)\mathrm{d}\|\nabla^m w\|^2/\mathrm{d}t + \varepsilon M(\|\nabla^m u_1\|^2)\|\nabla^m w\|^2 + (M(\|\nabla^m u_1\|^2) - M(\|\nabla^m u_2\|^2))((-\Delta)^m u_2, \overline{w}),\tag{39}$$

$$(M(\|\nabla^m u_1\|^2) - M(\|\nabla^m u_2\|^2))((-\Delta)^m u_2, \overline{w}) \leqslant C_{0\_1} M'(\xi_1)(\|\nabla^m u_1\| + \|\nabla^m u_2\|)\|\Delta^m u_2\|\|\nabla^m w\|\|\overline{w}\| \leqslant C(R_0)\|\overline{w}\|^2 + C(R_0)\|\Delta^m w\|^2。\tag{40}$$

其中：$\xi_1 = \theta\|\nabla^m u_1\|^2 + (1-\theta)\|\nabla^m u_2\|^2$，$\theta \in (0,1)$，

$$(g(x,u_1) - g(x,u_2), w_t) \leqslant g'(x,\xi_2)\|w\|\|w_t\| \leqslant C_{0\_2}\lambda_1^{2m}\|\Delta^m w\|^2/2 + C_{0\_2}\|\overline{w}\|^2/2,\tag{41}$$

其中，$\xi_2 = \theta u_1 + (1-\theta)u_2$，$\theta \in (0,1)$。

当 $\mathrm{d}\|\Delta^m w\|^2/\mathrm{d}t + 2\varepsilon\|\Delta^m w\|^2 \geqslant 0$ 时，有

$$M(\|\nabla^m u_1\|^2)(\mathrm{d}\|\Delta^m w\|^2/\mathrm{d}t + 2\varepsilon\|\Delta^m w\|^2) \geqslant \mathrm{d}(M_0\|\Delta^m w\|^2)/\mathrm{d}t + 2\varepsilon M_0\|\Delta^m w\|^2。\tag{42}$$

当 $\mathrm{d}\|\Delta^m w\|^2/\mathrm{d}t + 2\varepsilon\|\Delta^m w\|^2 < 0$ 时，有

$$M(\|\nabla^m u_1\|^2)(\mathrm{d}\|\Delta^m w\|^2/\mathrm{d}t + 2\varepsilon\|\Delta^m w\|^2) \geqslant \mathrm{d}(M_1\|\Delta^m w\|^2)/\mathrm{d}t + 2\varepsilon M_1\|\Delta^m w\|^2。\tag{43}$$

结合式（37）~ 式（43），式（36）化为：$\mathrm{d}(\|\overline{w}\|^2 + \|\Delta^m w\|^2 + \varepsilon^2\|w\|^2 + M_0(M_1)\|\nabla^m w\|^2)/\mathrm{d}t \leqslant C_{0\_3}(\|\overline{w}\|^2 + \|\Delta^m w\|^2 + \varepsilon^2\|w\|^2 + M_0(M_1)\|\nabla^m w\|^2)$，由 Gronwall 不等式得：$\|\overline{w}\|^2 + \|\Delta^m w\|^2 + \varepsilon^2\|w\|^2 + M_0(M_1)\|\nabla^m w\|^2 \leqslant \mathrm{e}^{C_{0\_3}t}(\|\overline{w_0}\|^2 + \|\Delta^m w_0\|^2 + \varepsilon^2\|w_0\|^2 + M_0(M_1)\|\nabla^m w_0\|^2)$，由此可得，$\|\overline{w}\|^2 + \|\Delta^m w\|^2 \leqslant C_{0\_4}\mathrm{e}^{C_{0\_3}t}(\|\overline{w_0}\|^2 + \|\Delta^m w_0\|^2 + \varepsilon^2\|w_0\|^2 + M_0(M_1)\|\nabla^m w_0\|^2)$，从而解的唯一性得证。

3　整体吸引子族的存在性

定理 1　由引理 3、引理 4 的假设条件以及引理 5，问题（1）存在整体吸引子族：$A_k = \omega(B_{0k}) =$

$\overline{\bigcap_{\tau\geqslant 0}\bigcup_{t\geqslant\tau}S(t)B_{0k}}$, $k=1,2,\cdots,2m$，其中，$B_{0k}=\{(u,\boldsymbol{v})\in X_k:\|(u,\boldsymbol{v})\|_{X_k}^2=\|\nabla^{2m+k}u\|^2+\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2\leqslant R_k\}$ 是 X_k 中的有界吸收集：1）$S(t)A_k=A_k(\forall t\geqslant 0)$；2）$A_k$ 吸引 X_k 中一切有界集，即 $\forall B_k\subset X_k$ 为 X_k 中的有界集，有 $\mathrm{dist}(S(t)B_k,A_k)=\sup_{x\in B_k}\inf_{y\in A_k}\|S_k(t)x-y\|_{X_k}\to 0(t\to\infty)$，$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是问题（1）生成的解半群。

证明　根据引理 2 和引理 5 可知，问题（1）生成半群 $S(t):X_k\to X_k$。由引理 3 和引理 4 可得，$\forall B_k\subset X_k$ 且是包含在球 $\{\|(u,\boldsymbol{v})\|_{X_k}^2\leqslant R_k\}$ 的有界集，则 $\|S(t)(u_0,\boldsymbol{v}_0)\|_{X_k}^2=\|u\|_{V_{2m+k}}^2+\|\boldsymbol{v}\|_{V_k}^2\leqslant\|u_0\|_{V_{2m+k}}^2+\|\boldsymbol{v}_0\|_{V_k}^2+C\leqslant R_k+C$，表明 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在 X_k 上一致有界。进一步，对 $\forall(u_0,\boldsymbol{v}_0)\in X_k$，有 $\|S(t)(u_0,\boldsymbol{v}_0)\|_{X_k}^2=\|u\|_{V_{2m+k}}^2+\|\boldsymbol{v}\|_{V_k}^2\leqslant R_k$，因此，$B_{0k}=\{(u,\boldsymbol{v})\in X_k:\|(u,\boldsymbol{v})\|_{X_k}^2=\|\nabla^{2m+k}u\|^2+\|\nabla^k\boldsymbol{v}\|^2\leqslant R_k\}$ 是半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 中的有界吸收集。因为 $X_k\hookrightarrow X_0$ 是紧嵌入，即 X_k 中的有界集是 X_0 中的紧集，因此解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是全连续算子。综上，得到解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的整体吸引子族 $A_k=\omega(B_k)=\overline{\bigcap_{\tau\geqslant 0}\bigcup_{t\geqslant\tau}S(t)B_{0k}}$。定理 1 证毕。

[参考文献]

[1] WOINOWSKY-KRIEGER. The effect of an axial force on the vibration of hinged bars[J]. Journal of Applied Mechanics Transactions of the Asme, 1950, 17(1): 35-36.

[2] LIN G G, LÜ P H, LOU R J. Exponential attractors and inertial manifolds for a class of nonlinear generalized Kirchhoff-Boussinesq model[J]. Far East Journal of Mathematical Sciences, 2017, 101(9): 1913-1945.

[3] FENG B W, YANG X G, QIN Y. Uniform attractors for a nonautonomous extensible plate equation with a strong damping[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2017, 40(10): 3479-3492.

[4] 苏小虎，姜金平. 梁方程时间依赖全局吸引子的存在性[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(2): 195-203.

[5] NARCISO V. Long-time behavior of a nonlinear viscoelastic beam equation with past history[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2015, 38(4): 775-784.

[6] BAYSAL O, HASANOV A. Solvability of the clamped Euler-Bernoulli beam equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 93: 85-90.

[7] LIMACO J, CLARK H R, MEDEIROS L A. On damped Kirchhoff equation with variable coefficients[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2005, 307(2): 641-655.

[8] KARACHALIOS N I, STAVRAKAKIS N M. Existence of a global attractor for semilinear dissipative wave equations on $\mathbf{R}^N$[J]. Journal of Differential Equations, 1999, 157(1): 183-205.

[9] PAPADOPOULOS P G, STAVRAKAKIS N M. Global existence and blow-up results for an equation of Kirchhoff type on $\mathbf{R}^N$[J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 2001, 17(1): 91-109.

[10] PAPADOPOULOS P G, STAVRAKAKIS N M. Strong global attractor for a quasilinear nonlocal wave equation on $\mathbf{R}^N$[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2006(77): 1-10.

[11] PATA V, BELLERI V. Attractors for semilinear strongly damped wave equations on $\mathbf{R}^3$[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems: Series A(DCDS-A), 2012, 7(4): 719-735.

[12] MESSAOUDI S A, HOUARI B S. A blow-up result for a higher-order nonlinear Kirchhoff-type hyperbolic equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2007, 20(8): 866-871.

[13] 林国广，李卓茜. 一类高阶非线性 Kirchhoff 方程吸引子族及其维数[J]. 山东大学学报(理学版), 2019, 54(12): 1-11.

[14] LI F C. Global existence and blow-up of solutions for a higher-order Kirchhoff-type equation with nonlinear dissipation[J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17(12): 1409-1414.

[15] 林国广，朱昌清. 一类非线性高阶 Kirchhoff 型方程解的渐进性态[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2019, 41(5): 867-875.

[16] 叶耀军，陶祥兴. 一类非线性高阶 Kirchhoff 型方程的初边值问题[J]. 数学学报, 2019, 62(6): 923-938.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）