[文章编号] 1007－7405(2025)06－0608－05 DOI:10.19715/j.jmuzr.2025.06.13

Z_3^n 上凯莱图的电阻距离

陈君竹，陈海燕

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 令 Z_3 表示模3的剩余类加群，n 个 Z_3 的直和构成阿贝尔群，记作 $Z_3^n=\{s=s_1\cdots s_n \mid s_k\in\{0,1,2\},k=1,\cdots,n\}$。考虑群 Z_3^n 上凯莱图任意两点之间的电阻距离。利用群 Z_3^n 的所有不可约特征标，得到其上凯莱图中任意两点间电阻距离的一个简化表达式，即只和正则度与特征值有关的表达式。最后利用此表达式计算了 $n=2$ 和 $n=3$ 的一些凯莱图电阻距离的具体值。

[关键词] 电网络；电阻距离；凯莱图

[中图分类号] O 157.5

On the Resistance Distances in Cayley Graphs of Z_3^n

CHEN Junzhu, CHEN Haiyan

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: Let Z_3 be the additive group of the residue class of module 3, and $Z_3^n=\{s=s_1\cdots s_n \mid s_k\in\{0,1,2\},k=1,\cdots,n\}$ be the direct sum of Z_3. In this paper, resistance distances were considered in the Cayley graphs on group Z_3^n. By using irreducible characters of Z_3^n, a uniform formula for the resistance distances was given only in terms of regular degree and eigen values of the Cayley graph. Using the uniform formula, the explicit values of resistance distances for some special Cayley graphs were calculated for $n=2$ and $n=3$, respectively.

Keywords: electrical network; resistance distance; Cayley graph

0 引言

给定一个连通图 $\Gamma=(V(\Gamma),E(\Gamma))$，如果将 Γ 中的每条边都看作是一个单位电阻，则 Γ 就可以看作一个电网络 N。Γ 中任意两点 u 和 v 之间的电阻距离记作 $\Omega_\Gamma(u,v)$，定义为 N 中这两个节点之间的等效电阻[1]。

电阻距离作为电网络理论的重要组成部分，从1847年文献［1］的经典结果开始，就得到了众多物理学家和工程师的研究，特别是电阻距离的计算问题一直是物理和工程领域中的经典研究问题。在数学上，文献［2］指出，等效电阻是图上的距离函数并将其命名为电阻距离，自此，电阻距离就成为图论领域的一个重要研究对象。更加有意义的是，电阻距离虽然是纯粹的物理学概念，但是可以从代数、概率和组合等多个角度给出其等价的数学诠释，从而得到相应的代数、概率与组合等各种计算公式[3]。利用这些公式，可以得到很多特殊图类或网络上任意两点之间电阻距离的解析表达式，

[收稿日期] 2023－05－28
[基金项目] 国家自然科学基金项目（12271210，12071180）
[通信作者] 陈海燕（1970—），博士，教授，博导，从事组合图论方向研究。E-mail:chey5@jmu.edu.cn

如完全图、轮图、距离正则图等[4-5]。本文考虑一类特殊凯莱图上任意两点之间的电阻距离，首先给出凯莱图的定义。

设 G 是一个有限群，$H\subseteq G$ 满足单位元 $1\notin H$ 并且 $H^{-1}=H$，则凯莱图 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,H)$ 是顶点集 $V(\Gamma)=G$、边集 $E(\Gamma)=\{(x,y)\mid x,y\in G,yx^{-1}\in H\}$ 的图。群上的凯莱图已得到全面深入的研究，其中电阻距离也是人们广泛关注的对象[6-7]。众所周知，凯莱图 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,H)$ 是正则图，正则度为 $|H|$，且其连通当且仅当 H 是 G 的一个生成元集。下面都约定 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,H)$ 是连通图，且若 G 是阿贝尔群（可交换群），记 $H^{-1}=-H=H$，单位元用 0 表示。令 Z_n 表示模 n 的剩余类加群，$G=Z_{n1}\oplus Z_{n2}\oplus\cdots\oplus Z_{nt}$，这里$\oplus$表示直和。很显然，$G=Z_{n1}\oplus Z_{n2}\oplus\cdots\oplus Z_{nt}$是阿贝尔群。2011 年，文献[8]利用阿贝尔群的不可约表示得到了 G 上凯莱图电阻距离的一般表达式。

定理 1[8]　设 $G=Z_{n1}\oplus Z_{n2}\oplus\cdots\oplus Z_{nt}$，且 $H=-H$ 是 G 的任意一个不含零元的生成元集，则凯莱图 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,H)$ 任意两点 u、v 间的电阻距离为：

$$\Omega_\Gamma(u,v)=\sum_{0\neq(r_1,\cdots,r_t)\in G}\Big(\sum_{(k_1,\cdots,k_t)\in H}\Big(1-\sum_{j=1}^{t}\cos(2r_jk_j/n_j)\Big)\Big)^{-1}[(\boldsymbol{U}_{r_1,\cdots,r_t})_u-(\boldsymbol{U}_{r_1,\cdots,r_t})_v]^2。\tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{U}$ 是实正交矩阵，其列向量是凯莱图 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,H)$ 拉普拉斯矩阵的实特征向量。

容易看出，式（1）用来直接计算电阻距离不是很方便，还需要做很多工作，特别是要计算所有的特征向量。即使得到了所有的特征向量，给出式（1）一个闭的表达式也是一个具有挑战性的工作。因此，对一些特殊情形，得到更简洁、更实用的计算公式是非常有意义的工作。本文考虑 $n_1=\cdots=n_t=3$ 的情况，得到了凯莱图 $\Gamma=\mathrm{Cay}(Z_3^n,H)$ 上任意两点 u、v 间的电阻距离的一个简洁的组合表达式。

1　主要结果及其证明

为了利用群的不可约特征标，考虑复数域上的 n-维欧氏空间 C^n。对任意的 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)\in C^n$，它们的内积定义为 $\langle x,y\rangle=\sum_{j=1}^{n}(x_j\bar{y}_j)$，所以 $|x|^2=\sum_{j=1}^{n}(x_j\bar{y}_j)$。

设 $\Gamma=(V,E)$ 是一个简单连通图，其顶点集 $V=\{1,2,\cdots,n\}$。用 $\boldsymbol{A}(\Gamma)=(a_{ij})_{n\times n}$ 表示它的邻接矩阵，$\boldsymbol{D}(\Gamma)=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$ 表示它的度对角矩阵，即 d_i 表示顶点 i 的度，则 Γ 的 Laplacian 矩阵为 $\boldsymbol{L}(\Gamma)=\boldsymbol{D}(\Gamma)-\boldsymbol{A}(\Gamma)$。设 $\lambda_1>\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}(\Gamma)$ 的特征值，$\boldsymbol{V}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为对应的一组特征向量。$0=\mu_1<\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_n$ 为 $\boldsymbol{L}(\Gamma)$ 的特征值，若 $U_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为对应的一组标准正交特征向量，即 $\langle\boldsymbol{U}_i,\boldsymbol{U}_j\rangle=1$。若 $i=j$，否则为 0。当 $\boldsymbol{U}_j$ 为实的向量时，有下面的结果。

引理 1[9-11]　设 $\Gamma=(V,E)$ 是顶点集 $V=\{1,2,\cdots,n\}$ 的简单连通图，则对任意的两点 $s,t\in V$，$\Omega_\Gamma(s,t)=\sum_{j=2}^{n}[(1/\mu_j)(\boldsymbol{U}_{js}-\boldsymbol{U}_{jt})^2]$。

对复的正交特征向量，引理 1 可以改写为引理 2。

引理 2　设 $\Gamma=(V,E)$ 是顶点集 $V=\{1,2,\cdots,n\}$ 的简单连通图，则对任意的两点 $s,t\in V$，有

$$\Omega_\Gamma(s,t)=\sum_{j=2}^{n}[(1/\mu_j)|U_{js}-U_{jt}|^2]。\tag{2}$$

其中：$\boldsymbol{U}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为 $L(\Gamma)$ 任意的一组复的标准正交特征向量。

下面的引理 3 给出了阿贝尔群上凯莱图邻接矩阵的特征值、特征向量和群的不可约特征标之间的关系。

引理 3[12]　设 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,H)$ 为阿贝尔群 $G=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$ 上的一个凯莱图，$\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_n$ 为 G 的所有不可约特征标，则 Γ 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_j=\sum_{h\in H}\chi_j(h),j=1,2,\cdots,n,\tag{3}$$

对应的正交特征向量为

$$\boldsymbol{V}_j = (\chi_j(g_1),\chi_j(g_2),\cdots,\chi_j(g_n))。\tag{4}$$

既然凯莱图 $\Gamma = \mathrm{Cay}(G,H)$ 是 $|H|$-正则图，$\boldsymbol{L}(\Gamma)$ 的所有特征值为 $\mu_j = |H| - \lambda_j, j = 1,\cdots,n$，对应的一组标准正交特征向量为 $(1/|\boldsymbol{V}_j|)\boldsymbol{V}_j, j = 1,\cdots,n$。所以由引理 2 和引理 3 可知，由一个阿贝尔群的所有不可约特征标可得其上任意一个凯莱图任意两点的电阻距离。对阿贝尔群 $Z_3^n = \{s_1s_2\cdots s_t \mid s_j \in \{0,1,2\}, 1 \leqslant j \leqslant n\}$，它的所有不可约特征标如下。

引理 4[13] 设 $s = s_1s_2\cdots s_n$ 是阿贝尔群 Z_3^n 中的任意元素，则其对应的不可约特征标为 $\chi_{s_1s_2\cdots s_n}(a_1a_2\cdots a_n) = \omega^{s_1a_1+s_2a_2+\cdots+s_na_n}, \forall a_1a_2\cdots a_n \in Z_3^n$，其中 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3} = -1/2 + \sqrt{3}\mathrm{i}/2$，i 是虚数单位，即 $\mathrm{i}^2 = -1$。

对任意的凯莱图 $\Gamma = \mathrm{Cay}(Z_3^n,H)$，它的拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}(\Gamma)$ 所有特征值为 $\mu_{s_1s_2\cdots s_n} = |H| - \sum_{a_1a_2\cdots a_n \in H} \omega^{s_1a_1+s_2a_2+\cdots+s_na_n}, \forall s_1s_2\cdots s_n \in Z_3^n$，对应的一组标准正交特征向量为 $V_{s_1s_2\cdots s_n}/\sqrt{3^n}$，其中：$V_{s_1s_2\cdots s_n}(a_1a_2\cdots a_n) = \omega^{s_1a_1+s_2a_2+\cdots+s_na_n}, \forall a_1a_2\cdots a_n \in Z_3^n$。所以由引理 2 可得到定理 2。

定理 2 设 $s = s_1s_2\cdots s_n$、$t = t_1t_2\cdots t_n$ 是凯莱图 $\Gamma = \mathrm{Cay}(Z_3^n,H)$ 的任意两个顶点，则

$$\Omega_\Gamma(s,t) = (1/3^n) \sum_{0 \neq k_1k_2\cdots k_n \in Z_3^n} (1/\mu_{k_1k_2\cdots k_n}) \left| \omega_{j=1}^{\sum_{j=1}^{n}(k_js_j)} - \omega_{j=1}^{\sum_{j=1}^{n}(k_jt_j)} \right|^2,\tag{5}$$

其中：$\mu_{k_1k_2\cdots k_n} = |H| - \sum_{a_1a_2\cdots a_n \in H} \omega_{j=1}^{\sum_{j=1}^{n}(k_ja_j)}$。

例 1 当 $n = 1$ 时，阿贝尔群 $Z_3 = \{0,1,2\}$ 的 3 个不可约特征标为 $\chi_0 = (1,1,1)$、$\chi_1 = (1,\omega,\omega^2)$、$\chi_2 = (1,\omega^2,\omega)$。取 $H = \{1,2\}$，这时 $\Gamma = C_3$，即长为 3 的圈。由定理 2，$\Omega_{C_3}(0,1) = (1/3)[1/2 - \omega - \omega^2 \mid 1 - \omega \mid^2 + (1/(2 - \omega^2 - \omega)) \mid -\omega^2 \mid^2] = 2/3$。同理可得，$\Omega_{C_3}(0,2) = \Omega_{C_3}(1,2) = 2/3$。

注意到，式（5）中，$\left|\omega_{j=1}^{\sum_{j=1}^{n}(k_js_j)} - \omega_{j=1}^{\sum_{j=1}^{n}(k_jt_j)}\right| = \left|1 - \omega_{j=1}^{\sum_{j=1}^{n}(k_j(t_j-s_j))}\right|^2$，即对任意的 $s = s_1s_2\cdots s_n$、$t = t_1t_2\cdots t_n \in \boldsymbol{V}(\Gamma)$，有 $\Omega_\Gamma(s,t) = \Omega_\Gamma(0,t-s)$。这个事实也可由凯莱图是顶点可迁的直接得到，所以不失一般性，只需考虑对任意的 $s = s_1s_2\cdots s_n \neq 0$，$\Omega_\Gamma(0,s)$ 简记为 $\Omega_\Gamma(s)$。对给定的 s，定义指标集 $\mathrm{Ind}_0(s) = \{l \mid s_l = 0\}$、$\mathrm{Ind}_1(s) = \{l \mid s_l = 1\}$、$\mathrm{Ind}_2(s) = \{l \mid s_l = 2\}$。

令 $\boldsymbol{A}(s) = \{k_1k_2\cdots k_n \mid \sum_{j \in \mathrm{Ind}_1(s)} k_j \equiv \sum_{j \in \mathrm{Ind}_2(s)} k_j (\mathrm{mod}\ 3)\}$，则有定理 3。

定理 3 设 $s = s_1s_2\cdots s_n$ 是凯莱图 $\Gamma = \mathrm{Cay}(Z_3^n,H)$ 的任意顶点，则

$$\Omega_\Gamma(s) = (1/3^{n-1}) \sum_{k_1k_2\cdots k_n \in Z_3^n \setminus \boldsymbol{A}(s)} \frac{1}{(|H| - \lambda_{k_1k_2\cdots k_n})}。\tag{6}$$

其中：$\lambda_{k_1k_2\cdots k_n} = \sum_{a_1a_2\cdots a_n \in H\omega} \sum_{j=1}^{n} (k_ja_j)$。

证明 因为 $\omega^3 = 1$，$|1 - \omega|^2 = |1 - \omega^2|^2 = 3$，所以对任意的 $k_1k_2\cdots k_n \in Z_3^n$，有 $|1 - \omega_{j=1}^{\sum_{j=1}^{n}(k_js_j)}|^2 = 0$ 或者 3。而上式等于 0 当且仅当 $\sum_{j=1}^{n} (k_js_j) = \sum_{j \in \mathrm{Ind}_1(s)} k_j + 2\sum_{j \in \mathrm{Ind}_2(s)} k_j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$，即当且仅当 $\sum_{j \in \mathrm{Ind}_1(s)} k_j \equiv \sum_{j \in \mathrm{Ind}_2(s)} k_j (\mathrm{mod}\ 3)$。因此由定理 2，结论得证。

由上面的定理 3，可以得到推论 1。

推论 1 设 $s = s_1s_2\cdots s_n$ 是凯莱图 $\Gamma = \mathrm{Cay}(Z_3^n,H)$ 的任意顶点，则 $\Omega_\Gamma(s) = \Omega_\Gamma(-s)$，其中：$-s = (-s_1)(-s_2)\cdots(-s_n)$ 表示 s 的逆元，即 $-1 = 2$，$-2 = 1$。

证明 由 $\boldsymbol{A}(s)$ 的定义，显然 $\boldsymbol{A}(s) = \boldsymbol{A}(-s)$，所以由定理 3，结论得证。

最后给出集合 $\boldsymbol{A}(s)$ 的一个等价刻画。

定理 4　设 $0 \neq s = s_1 s_2 \cdots s_n$ 是凯莱图 $\Gamma = \mathrm{Cay}(Z_3^n, H)$ 的任意非零顶点，t 是 s 中最大的下标，使得 $s_t \neq 0$，i）若 $s_t = 1$，则 $\boldsymbol{A}(s) = \{k = k_1 \cdots k_t \cdots k_n \mid k_j \in \{0,1,2\}, j \neq t, k_t \equiv (\sum_{j \in \mathrm{Ind}_2(s)} k_j - \sum_{j \in \mathrm{Ind}_1(s) \setminus t} k_j) (\mathrm{mod}\ 3)\}$；ii）若 $s_t = 2$，则 $\boldsymbol{A}(s) = \{k = k_1 \cdots k_t \cdots k_n \mid k_j \in \{0,1,2\}, j \neq t, k_t \equiv (\sum_{j \in \mathrm{Ind}_1(s)} k_j - \sum_{j \in \mathrm{Ind}_2(s) \setminus t} k_j) (\mathrm{mod}\ 3)\}$。特别地，$|\boldsymbol{A}(s)| = 3^{n-1}$。

证明　当 $s_t = 1$ 时，很容易看出条件 $\sum_{j \in \mathrm{Ind}_1(s)} k_j \equiv \sum_{j \in \mathrm{Ind}_2(s)} k_j (\mathrm{mod}\ 3)$ 和 $k_t \equiv (\sum_{j \in \mathrm{Ind}_2(s)} k_j - \sum_{j \in \mathrm{Ind}_1(s) \setminus t} k_j) (\mathrm{mod}\ 3)$ 等价，所以结论成立。同理可得 ii。既然 $k_j \in \{0,1,2\} (j \neq t)$，每个都有 3 种选择，集合 $\boldsymbol{A}(s)$ 元素个数为 $|\boldsymbol{A}(s)| = 3^{n-1}$。证毕。

由上面的定理 4 可以看出，对任意的 s，很容易列出 $\boldsymbol{A}(s)$ 中的所有元素，从而得到它补集中的所有元素，然后由定理 3 就可以得到任意两点之间的电阻距离。

2　几个例子

利用定理 3 计算 $n = 2$ 和 $n = 3$ 的几类凯莱图 $\Gamma = \mathrm{Cay}(Z_3^n, H)$ 中任意两点的电阻距离。

例 2　凯莱图 $\Gamma = \mathrm{Cay}(Z_3^2, H)$ 上的电阻距离，$Z_3^2 = \{00,01,02,10,11,12,20,21,22\}$。

首先由定理 4 可得，$\boldsymbol{A}(01) = \boldsymbol{A}(02) = \{00,10,20\}$；$\boldsymbol{A}(10) = \boldsymbol{A}(20) = \{00,01,02\}$；$\boldsymbol{A}(11) = \boldsymbol{A}(22) = \{00,12,21\}$；$\boldsymbol{A}(12) = \boldsymbol{A}(21) = \{00,11,22\}$。

1）$\Gamma_1 = \mathrm{Cay}(Z_3^2, H_1)$ 上任意两点的电阻距离，其中 $H_1 = \{01,02,10,20\}$。$\lambda_{00} = 4, \lambda_{01} = \lambda_{10} = \omega + \omega^2 + 1 + 1 = 1, \lambda_{02} = \lambda_{20} = \omega^2 + \omega + 1 + 1 = 1, \lambda_{12} = \lambda_{21} = 2(\omega^2 + \omega) = -2, \lambda_{11} = \lambda_{22} = 2(\omega^2 + \omega) = -2$。所以由定理 3 可得，$\Omega_{\Gamma_1}(01) = \Omega_{\Gamma_1}(02) = (1/3)(2/(4-1) + 4/(4+2)) = 4/9$；$\Omega_{\Gamma_1}(10) = \Omega_{\Gamma_1}(20) = (1/3)(3/(4-1) + 4/(4+2)) = 5/9$；$\Omega_{\Gamma_1}(11) = \Omega_{\Gamma_1}(22) = (1/3)(4/(4-1) + 2/(4+2)) = 5/9$；$\Omega_{\Gamma_1}(12) = \Omega_{\Gamma_1}(21) = (1/3)(4/(4-1) + 2/(4+2)) = 5/9$。

2）$\Gamma_2 = \mathrm{Cay}(Z_3^2, H_2)$ 上任意两点的电阻距离，其中 $H_2 = \{01,02,11,22\}$。$\lambda_{00} = 4, \lambda_{01} = \lambda_{02} = 2(\omega + \omega^2) = -2, \lambda_{10} = \lambda_{20} = 1, \lambda_{12} = \lambda_{21} = \omega^2 + \omega + 1 + 1 = 1, \lambda_{11} = \lambda_{22} = 2(\omega^2 + \omega) = -2$。所以由定理 3 可得，$\Omega_{\Gamma_2}(01) = \Omega_{\Gamma_2}(02) = (1/3)(2/(4-1) + 4/(4+2)) = 4/9$；$\Omega_{\Gamma_2}(10) = \Omega_{\Gamma_2}(20) = (1/3)(4/(4-1) + 2/(4+2)) = 5/9$；$\Omega_{\Gamma_2}(11) = \Omega_{\Gamma_2}(22) = (1/3)(2/(4-1) + 4/(4+2)) = 4/9$；$\Omega_{\Gamma_2}(12) = \Omega_{\Gamma_2}(21) = (1/3)(4/(4-1) + 2/(4+2)) = 5/9$。

3）$\Gamma_3 = \mathrm{Cay}(Z_3^2, H_3)$ 上任意两点的电阻距离，其中 $H_3 = \{01,02,10,20,11,22\}$。$\lambda_{00} = 6$，$\lambda_{01} = \lambda_{02} = 2(\omega + \omega^2) = 0$，$\lambda_{10} = \lambda_{20} = 0$，$\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$，$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 2(\omega^2 + \omega) = -3$。所以由定理 3 可得，$\Omega_{\Gamma_2}(01) = \Omega_{\Gamma_2}(02) = (1/3)(4/6 + 2/(6+3)) = 8/27$；$\Omega_{\Gamma_2}(10) = \Omega_{\Gamma_2}(20) = \Omega_{\Gamma_2}(11) = \Omega_{\Gamma_2}(22) = 8/27$；$\Omega_{\Gamma_2}(12) = \Omega_{\Gamma_2}(21) = (1/3) \times (6/6) = 1/3$。

例 3　凯莱图 $\Gamma = \mathrm{Cay}(Z_3^3, H)$ 上的电阻距离，其中 $H = \{001,002,010,020,100,200\}$。$Z_3^2 = \{000,001,002,010,011,012,020,021,022,100,101,102,110,111,112,120,121,122,200,201,202,210,211,212,220,221,222\}$。

首先由定理 4 可得，$\boldsymbol{A}(001) = \boldsymbol{A}(002) = \{000,010,020,100,110,120,200,210,220\}$；$\boldsymbol{A}(010) = \boldsymbol{A}(020) = \{000,001,002,100,101,102,200,201,202\}$；$\boldsymbol{A}(100) = \boldsymbol{A}(200) = \{000,001,002,010,011,012,020,021,022\}$；$\boldsymbol{A}(011) = \boldsymbol{A}(022) = \{000,012,021,100,112,121,200,212,221\}$；$\boldsymbol{A}(101) = \boldsymbol{A}(202) = \{000,102,201,010,112,211,020,122,221\}$；$\boldsymbol{A}(110) = \boldsymbol{A}(220) = \{000,120,210,001,121,211,002,122,212\}$；$\boldsymbol{A}(111) = \boldsymbol{A}(222) = \{000,102,201,111,012,021,120,210,222\}$；$\boldsymbol{A}(012) = \boldsymbol{A}(021) = \{000,011,022,100,111,122,200,211,222\}$；$\boldsymbol{A}(102) = \boldsymbol{A}(201) = \{000,101,202,010,111,$

212,020,121,222}; $A(120) = A(210) = \{000,110,220,001,111,221,002,112,222\}$; $A(112) = A(221) = \{000,011,022,101,112,120,202,210,221\}$; $A(121) = A(212) = \{000,011,022,110,121,102,220,201,212\}$; $A(211) = A(122) = \{000,101,202,110,211,012,220,021,122\}$。

求 $\Gamma = \mathrm{Cay}(Z_3^3, H)$ 任意两点的电阻距离。$\lambda_{000} = 6, \lambda_{001} = \lambda_{010} = \lambda_{001} = \lambda_{002} = \lambda_{020} = \omega^2 + \omega + 4 = 3, \lambda_{011} = \lambda_{110} = \lambda_{101} = \lambda_{022} = \lambda_{220} = \lambda_{202} = 2(\omega^2 + \omega) + 2 = 0, \lambda_{012} = \lambda_{021} = \lambda_{102} = \lambda_{120} = \lambda_{210} = \lambda_{201} = 2(\omega^2 + \omega) + 2 = 0, \lambda_{112} = \lambda_{121} = \lambda_{211} = \lambda_{122} = \lambda_{221} = \lambda_{212} = 3(\omega^2 + \omega) = -3; \lambda_{111} = \lambda_{222} = 3(\omega^2 + \omega) = -3$。所以由定理 3 可得，$\Omega_\Gamma(001) = \Omega_\Gamma(002) = \Omega_\Gamma(010) = \Omega_\Gamma(020) = \Omega_\Gamma(100) = \Omega_\Gamma(200) = (1/9)(2/(6-3) + 14/6 + 2/(6+3)) = 29/81$; $\Omega_\Gamma(011) = \Omega_\Gamma(022) = \Omega_\Gamma(110) = \Omega_\Gamma(220) = \Omega_\Gamma(101) = \Omega_\Gamma(202) = (1/9)(4/(6-3) + 12/6 + 2/(6+3)) = 32/81$; $\Omega_\Gamma(012) = \Omega_\Gamma(021) = \Omega_\Gamma(102) = \Omega_\Gamma(201) = \Omega_\Gamma(120) = \Omega_\Gamma(210) = (1/9)(4/(6-3) + 14/6) = 11/27$; $\Omega_\Gamma(112) = \Omega_\Gamma(211) = \Omega_\Gamma(121) = \Omega_\Gamma(212) = \Omega_\Gamma(211) = \Omega_\Gamma(122) = (1/9)(6/(6-3) + 10/6 + 2/(6+3)) = 35/81$; $\Omega_\Gamma(111) = \Omega_\Gamma(222) = (1/9)(6/(6-3) + 12/6) = 4/9$。

[参 考 文 献]

[1] KIRCHHOFF G. Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird[J]. Annalen der Physik ,1847,148:497-508.

[2] KLEIN D J, RANDIĆ M. Resistance distance[J]. Journal of Mathematical Chemistry, 1993, 12:81-95.

[3] 杨玉军. 图的电阻距离综述[J]. 集美大学学报（自然科学版）, 2022, 27(1):1-16.

[4] JAFARIZADEH M A, SUFIANI R, JAFARIZADEH S. Recursive calculation of effective resistances in distance-regular networks based on Bose-Mesner algebra and Christoffel-Darboux identity[J]. Journal of Mathematical Physics, 2009, 50(2): 023302.

[5] ZHANG H, YANG Y. Resistance distance and Kirchhoff index in circulant graphs[J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2007, 107:330-339.

[6] HUANG J. Resistance distance and Kirchhoff index in dihedral Cayley graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2022, 307: 125-134.

[7] VASKOUSKI M, ZADOROZHNYUK A. Resistance distances in Cayley graphs on symmetric groups[J]. Discrete Applied Mathematics, 2017, 227:121-135.

[8] GAO X, LUO Y F, LIU W W. Resistance distances and the Kirchhoff index in Cayley graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2011, 159:2050-2057.

[9] XIAO W, GUTMAN I. Resistance distance and Laplacian spectrum[J]. Theoretical Chemistry Accounts, 2003, 110:284-289.

[10] KLEIN D J. Graph geometry, graph metrics and Wiener[J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 1997, 35:7-27.

[11] WU F Y. Theory of resistor networks: the two-point resistance[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2004, 37:6653-6673.

[12] LOVÁSZ L. Spectra of graphs with transitive groups[J]. Periodica Mathematica Hungarica, 1975, 6:191-195.

[13] ALPERIN J L, BELL R B. Groups and representations[M]. New York: Springer Science & Business Media, 2012.

（责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤）