[文章编号] 1007－7405(2025)06－0544－07 DOI:10.19715/j.jmuzr.2025.06.05

具有阶段结构的随机 Beddington-DeAngelis 捕食模型的动力学分析

陈 超，李智勇

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 研究一类具有阶段结构的随机 Beddington-DeAngelis 捕食模型的动力学行为。通过构造李雅普诺夫函数证明了模型存在唯一的全局正解，且给出了模型存在唯一遍历的平稳分布和捕食者灭绝的充分条件。最后，通过数值模拟验证了结论的可行性和有效性。

[关键词] Beddington-DeAngelis；阶段结构；平稳分布；捕食模型

[中图分类号] O 175

Dynamics of a Stochastic Beddington-DeAngelis Predator-Prey Model with Stage Structure for Predator

CHEN Chao, LI Zhiyong

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: This paper concentrates on dynamics of a stochastic Beddington-DeAngelis predator-prey model with stage structure for predator. By constructing Lyapunov functions, we establish sufficient conditions for the existence of a unique global positive solution. Then we extend the existence of stationary distribution under certain parametric restrictions and obtain the sufficient conditions for extinction of the predators. Finally, the feasibility and validity of the conlusion were verified through numerical simulations.

Keywords: Beddington-DeAngelis; stage structure; stationary distribution; predator-prey model

0 引言

在生物数学中，捕食模型是描述捕食者和与食饵数量动态变化的微分方程，其动力学性质是一个非常重要的课题。美国学者 Lotka[1] 和意大利学者 Voltera[2] 提出了 Lotka-Voltera 模型来描述种群之间的竞争关系，之后大量的学者对此进行了广泛的研究[3-4]。随着研究的深入，学者发现该模型所描述的种群之间的竞争关系与实际现象有差异，因此引入了功能性反应对模型进行优化。功能性反应分为依赖捕食者和依赖被捕食者两种类型，常见的依赖被捕食者的功能性反应有 Holling Ⅰ-Ⅲ型，但依赖被捕食者的功能性反应不能体现捕食者自身的影响。因此，有学者在此基础上提出了比率依赖捕食模型，引入了捕食者之间的影响。该模型虽能更好地体现其中的动力学行为，但当捕食者处于低密度

[收稿日期] 2024－04－01

[基金项目] 福建省自然科学基金项目（2024J01725）

[通信作者] 陈超（1978—），硕士，讲师，从事复杂网络与生物数学方向研究。E-mail:200461000017@jmu.edu.cn

时，其部分性质会出现矛盾。后来，Beddington[5] 和 DeAngelis 等[6] 提出了捕食模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = x(t)\{a - bx(t) - my(t)/[m_1 + m_2x(t) + m_3y(t)]\}, \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = y(t)\{-d + cx(t)/[m_1 + m_2x(t) + m_3y(t)]\}。 \end{cases}$$

其中 $my(t)/[m_1 + m_2x(t) + m_3y(t)]$ 被称为 Beddington-DeAngelis 功能性反应函数。此模型不仅具有 Holling Ⅱ型功能性反应的特点，还克服了比率依赖在低密度下的缺陷。有学者研究了其全局动力学行为，得到了很好的结果。

众所周知，很多捕食种群都会经历幼年和成年两个阶段，两个阶段之间存在明显的形态和行为差异。在捕食种群中，成年者具有捕食能力，而幼年捕食者没有捕食能力，因此阶段结构也是捕食模型中的重要因素。比如文献［7］研究了模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = x(t)\{r - ax(t) - \alpha y_2(t)/[x(t) + my_2(t)]\}, \\ \mathrm{d}y_1/\mathrm{d}t = \beta x(t)y_2(t)/[x(t) + my_2(t)] - c_1y_1(t) - d_1y_1(t), \\ \mathrm{d}y_2/\mathrm{d}t = d_1y_1(t) - c_2y_1(t)。 \end{cases}$$

周期现象在现实世界中是非常普遍的，因此生态系统周期解的存在性问题是一个很重要的研究方向，许多学者运用不同的理论方法，研究了很多种类的生态系统周期解的存在性。特别是借助于经典的重合度理论中的延拓定理来研究周期解的存在性问题是非常有效的，比如文献[8 -9]研究了周期捕食者-食饵动力学模型；文献[10 -11]研究了周期传染病和周期病毒动力学模型；文献［12］研究了一类具有 Beddington-DeAngelis 功能性反应的空气污染周期动力学模型的正周期解的存在性。

在自然界中，许多动物会选择待在洞穴等避难场所，通过减少捕食者和食饵之间的冲突，能够有效地降低捕获率，在稳定生态系统方面发挥着重要的作用。近年来，很多的捕食模型都考虑了食饵避难的情况[13 -16]。另一方面，在自然环境中，生态系统具有复杂性和多样性，各种随机干扰无处不在，其形式和强度各异，这些干扰可能对生态系统产生显著影响，甚至导致系统崩溃。例如，温度、湿度、下雨等白噪声。正如 May[17] 指出的环境白噪声会不同程度地影响种群的增长率、环境容纳量、竞争系数以及捕食模型的其他参数。因此，必须考虑捕食系统所处环境的随机性[18 -20]。本文考虑了如下具有阶段结构的随机 Beddington-DeAngelis 捕食模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = [rx(t)(1 - x(t)/K) - \alpha_1(1 - \beta_1)x(t)y_2(t)/(m_1 + m_2(1 - \beta_1)x(t) + m_3y(t))]\mathrm{d}t + \\ \qquad \sigma_1x(t)\mathrm{d}B_1(t), \\ \mathrm{d}y_1(t) = [\alpha_1\alpha_2(1 - \beta_1)x(t)y_2(t)/(m_1 + m_2(1 - \beta_1)x(t) + m_3y(t)) - c_1y_1(t) - d_1y_1(t)]\mathrm{d}t + \\ \qquad \sigma_2y_1(t)\mathrm{d}B_2(t), \\ \mathrm{d}y_2(t) = [d_1y_1(t) - c_2y_2(t)]\mathrm{d}t + \sigma_3y_2(t)\mathrm{d}B_3(t)。 \end{cases} \tag{1}$$

其中：$x(t)$、$y_1(t)$和 $y_2(t)$分别表示 t 时刻食饵、幼年捕食者和成年捕食者的种群数量；r 表示食饵的内禀增长率；K 表示环境容纳量；α_1 表示成年捕食者的捕获率；α_2 表示捕食转化率；β_1 为食饵避难参数；c_1 和 c_2 分别表示幼年捕食者和成年捕食者的死亡率；d_1 表示幼年捕食者向成年捕食者的转化率，所有的参数都大于零。此外，$B_i(t)(i = 1,2,3)$ 表示定义在完备概率空间 $(\Omega,F,\{F_t\}_{t\geqslant 0},P)$ 上的相互独立的布朗运动，滤子 $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足通常的条件。$\sigma_i^2(i = 1,2,3)$ 表示白噪声的强度。记 $R_+^3 = \{(x(t),y_1(t),y_2(t)) \in R^3 : x(t) > 0, y_1(t) > 0, y_2(t) > 0\}$。

1　全局正解的存在性和唯一性

定理 1　对于任意给定的初始条件 $(x(0),y_1(0),y_2(0)) \in R_+^3$，式（1）存在唯一的正解 $(x(t),y_1(t),y_2(t)) \in R_+^3, t \geqslant 0$，并且以概率 1 存在于 R_+^3 中。

证明　因为式（1）的系数满足局部 Lipschitz 条件，因此式（1）存在唯一局部解 $(x(t),y_1(t),y_2(t)) \in R_+^3, t \in [0,\tau_e)$，其中 τ_e 是爆破时间。令 $k_0 > 0$ 足够大，使得 $(x(0),y_1(0),y_2(0)) \in$

$[1/k_0,k_0]\times[1/k_0,k_0]\times[1/k_0,k_0]$。

对于任意 $k\geqslant k_0$，定义停时序列为 $\tau_k=\inf\{t\in[0,\tau_e):\min\{(x(t),y_1(t),y_2(t))\}\leqslant 1/k$ 或 $\max\{(x(t),y_1(t),y_2(t))\}\geqslant k\}$。令 $\inf\varnothing=\infty$，根据停时的定义可知 $\tau_\infty=\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k$，因此只要证明 $\tau_\infty=\infty$,a.s.。

假设 $\tau_\infty\neq\infty$，那么存在常数 $T>0$ 和 $0<\varepsilon<1$ 使得 $P\{\tau_k\leqslant T\}\geqslant\varepsilon,k\geqslant k_0$。

定义 C^2-函数 $V:R^3_+\to R_+$ 如下：$V(x(t),y_1(t),y_2(t))=x(t)-b_1-b_1\ln[x(t)/b_1]+y_1(t)-1-\ln y_1(t)+y_2(t)-b_2-b_2\ln[y_2(t)/b_2]$。由 Itô's 公式可得 $LV(x(t),y_1(t),y_2(t))\leqslant(rm_3K+rm_3b_1+\alpha_1\alpha_2K)^2/4rm_3^2K+b_1\alpha_1/m_3+c_1+d_1+b_2c_2+(b_1\sigma_1^2+\sigma_2^2+b_2\sigma_3^2)/2:=A$，从而有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V(x(t),y_1(t),y_2(t))\leqslant A\mathrm{d}t+\sigma_1(x(t)-b_1)\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2(y_1(t)-1)\mathrm{d}B_2(t)+\\ \sigma_3(y_2(t)-b_2)\mathrm{d}B_3(t)。\end{aligned}\tag{2}$$

对式（2）两边在 $[0,\tau_k\wedge T],\tau_k\wedge T=\min\{\tau_k,T\}$ 上积分可得

$$\begin{aligned}V(x(\tau_k\wedge T),y_1(\tau_k\wedge T),y_2(\tau_k\wedge T))\leqslant V(x(0),y_1(0),y_2(0))+A(\tau_k\wedge T)-b_1\sigma_1B_1(\tau_k\wedge T)-\\ \sigma_2B_2(\tau_k\wedge T)-b_2\sigma_3B_3(\tau_k\wedge T)+\int_0^{\tau_k\wedge T}\sigma_1x(s)\mathrm{d}B_1(s)+\int_0^{\tau_k\wedge T}\sigma_2y_1(s)\mathrm{d}B_2(s)+\int_0^{\tau_k\wedge T}\sigma_3y_2(s)\mathrm{d}B_3(s)。\end{aligned}\tag{3}$$

对式（3）两边取期望可得

$$EV(x(\tau_k\wedge T),y_1(\tau_k\wedge T),y_2(\tau_k\wedge T))\leqslant V(x(0),y_1(0),y_2(0))+AT。\tag{4}$$

令 $\Omega_k=\{\omega\in\Omega:\tau_k(\omega)\leqslant T\},k\geqslant k_0$，则有 $P(\Omega_k)\geqslant\varepsilon$。对于任意的 $\omega\in\Omega_k,x(\tau_k,\omega),y_1(\tau_k,\omega)$ 和 $y_2(\tau_k,\omega)$ 中至少有一个等于 k 或 $1/k$，即有 $V(x(\tau_k,\omega),y_1(\tau_k,\omega),y_2(\tau_k,\omega))\geqslant(k-b_1-b_1\ln(k/b_1))\wedge(k-1-\ln k)\wedge(k-b_2-b_2\ln(k/b_2))\wedge(1/k-b_1+b_1\ln(kb_1))\wedge(1/k-1+\ln k)\wedge(1/k-b_2+b_2\ln(kb_2))$。

由式（4）可得 $V(x(0),y_1(0),y_2(0))+AT\geqslant E[1_{\Omega_k(\omega)}V(x(\tau_k,\omega),y_1(\tau_k,\omega),y_2(\tau_k,\omega))]\geqslant\varepsilon[(k-b_1-b_1\ln(k/b_1))\wedge(k-1-\ln k)\wedge(k-b_2-b_2\ln(k/b_2))\wedge(1/k-b_1+b_1\ln(kb_1))\wedge(1/k-1+\ln k)\wedge(1/k-b_2+b_2\ln(kb_2))]$。这里 $1_{\Omega_k(\omega)}$ 是 $\Omega_k(\omega)$ 的示性函数。令 $k\to\infty$，则有 $\infty>V(x(0),y_1(0),y_2(0))+AT=\infty$。因此有 $\tau_\infty=\infty$，即式（1）存在唯一的全局正解。

2 平稳分布

假设 $X(t)$ 是 R^n 中的一个 Markov 自治过程，可表示为随机微分方程 $\mathrm{d}X(t)=f(X(t))+\sum\limits_{s=1}^{k}g_s(X(t))\mathrm{d}B_s(t)$。其扩散矩阵为 $\boldsymbol{A}(X(t))=(a_{ij}(x)),a_{ij}(x)=\sum\limits_{s=1}^{k}g_s^i(x)g_s^j(x)$。

引理 1[21] Markov 过程 $X(t)$ 存在唯一的遍历平稳分布，如果存在具有正则边界 Γ 的有界区域 $U\subset R^n$，具有如下的条件：1）对于任意 $x\in U$，扩散矩阵 $\boldsymbol{A}(X)$ 是严格正定的；2）存在非负 C^2-函数 V，使得在 $R^n\setminus U$ 上 LV 为负数。

定理 2 设 $\alpha_1\alpha_2d_1/[m_2(c_2+\sigma_3^2/2)]>c_1+d_1+\sigma_2^2/2,r>\sigma_1^2+\alpha_1/m_3$，那么对于任意给定的初始条件 $(x(0),y_1(0),y_2(0))\in R^3_+$，系统式（1）存在唯一的遍历平稳分布。

证明 式（1）的扩散矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2x^2&0&0\\0&\sigma_2^2y_1^2&0\\0&0&\sigma_3^2y_2^2\end{pmatrix}$，显然满足引理 1 的条件 1。

定义正定 C^2-函数 $V(x,y_1,y_2):R^3_+\to R_+$ 如下：$V=\bar{V}(x,y_1,y_2)-\bar{V}(x_0,y_{10},y_{20})=V_1+MV_2+V_3$。其中：$M>0$；$V_1=1/x-\ln y_1,V_2=-\ln y_1-m_2\delta\ln y_2$，$\delta=d_1\alpha_1\alpha_2/[m_2(c_2+\sigma_3^2/2)]^2>0$；$V_3=[x+y_1/\alpha_2+(c_1+d_1)y_2/2d_1\alpha_2]^{\gamma+1}/(\gamma+1)-\bar{V}(x_0,y_{10},y_{20})$，$(x_0,y_{10},y_{20})$ 为 $\bar{V}(x,y_1,y_2)$ 的最小值点，$\gamma>0$ 且有 $\gamma3^\gamma<\min\{(c_1+d_1)/4\sigma_{\max},c_2/2\sigma_{\max}\}$，这里 $\sigma_{\max}=\max\{\sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma_3^2\}$。

由 Itô's 公式可得 $LV_1 = -1/x^2\{rx(1-x/K) - \alpha_1(1-\beta_1)xy_2/[m_1 + m_2(1-\beta_1)x + m_3y_2]\} + \sigma_1^2/x - \{\alpha_1\alpha_2(1-\beta_1)xy_2/[m_1 + m_2(1-\beta_1)x + m_3y_2] - c_1y_1 - d_1y_1\}/y_1 + \sigma_2^2/2 \leqslant -(r - \sigma_1^2 - \alpha_1/m_3)/x + r/K + c_1 + d_1 + \sigma_2^2/2 - \alpha_1\alpha_2(1-\beta_1)xy_2/\{y_1[m_1 + m_2(1-\beta_1)x + m_3y_2]\}$。类似地，可得 $LV_2 \leqslant 2\sqrt{\delta\alpha_1\alpha_2d_1}(m_1 + m_3y_2)/[m_1 + m_2(1-\beta_1)x + m_3y_2] + c_1 + d_1 + \sigma_2^2/2 + m_2\delta(c_2 + \sigma_3^2/2) - 2\sqrt{\delta\alpha_1\alpha_2d_1}$。令 $\delta = \alpha_1\alpha_2d_1/[m_2(c_2 + \sigma_3^2/2)]^2$，则有 $LV_2 \leqslant -\alpha_1\alpha_2d_1/[m_2(c_2 + \sigma_3^2/2)]^2 + c_1 + d_1 + \sigma_2^2/2 + 2\alpha_1\alpha_2d_1(m_1 + m_3y_2)/\{[m_2(c_2 + \sigma_3^2/2)]^2[m_1 + m_2(1-\beta_1)x + m_3y_2]\}$，$LV_3 \leqslant -rx^{\gamma+2}/2K - (c_1 + d_1)y_1^{\gamma+1}/4\alpha_2^{\gamma+1} - c_2(c_1 + d_1)^{\gamma+1}y_2^{\gamma+1}/2^{\gamma+2}\alpha_2^{\gamma+1}d_1^{\gamma+1} + B$。这里 $B = \sup\limits_{(x,y_1,y_2)\in R_+^3}\{-rx^{\gamma+2}/2K + \gamma 3^\gamma\sigma_{\max}x^{\gamma+1}/2 - (c_1 + d_1)y_1^{\gamma+1}/8\alpha_2^{\gamma+1} + (rx + \alpha_1x/m_3)[x + y_1/\alpha_2 + (c_1 + d_1)y_2/2\alpha_2d_1]^\gamma - c_2(c_1 + d_1)^{\gamma+1}y_2^{\gamma+1}/2^{\gamma+3}\alpha_2^{\gamma+1}d_1^{\gamma+1}\}$，所以有 $LV \leqslant -(r - \sigma_1^2 - \alpha_1/m_3)/x - \alpha_1\alpha_2(1-\beta_1)xy_2/\{y_1[m_1 + m_2(1-\beta_1)x + m_3y_2]\} + 2M\alpha_1\alpha_2d_1(m_1 + m_3y_2)/\{[m_2(c_2 + \sigma_3^2/2)][m_1 + m_2(1-\beta_1)x + m_3y_2]\} - rx^{\gamma+2}/2K - (c_1 + d_1)y_1^{\gamma+1}/(4\alpha_2^{\gamma+1}) - c_2(c_1 + d_1)^{\gamma+1}y_2^{\gamma+1}/(2^{\gamma+2}\alpha_2^{\gamma+1}d_1^{\gamma+1}) - M\lambda + c_1 + d_1 + r/K + \sigma_2^2/2 + B$。

定义如下的开集 $U = \{(x,y_1,y_2) \in R_+^3 : \xi < x < 1/\xi, \xi^4 < y_1 < 1/\xi^4, \xi^2 < y_1 < 1/\xi^2\}$，这里 $0 < \xi < 1$ 是一个充分小的常数且满足：$-(r - \sigma_1^2 - \alpha_1/m_3)/\xi + C_1 \leqslant -1$，$-(c_1 + d_1)/(4\alpha_2^{\gamma+1}\xi^{4\gamma+4}) + C_1 \leqslant -1$，$-c_2(c_1 + d_1)^{\gamma+1}/(2^{\gamma+2}\alpha_2^{\gamma+2}d_1^{\gamma+1}\xi^{2\gamma+2}) + C_1 \leqslant -1$，$2M\alpha_1\alpha_2d_1(m_1 + m_3\xi^2)/[m_2^2(c_2 + \sigma_3^2/2)(1-\beta_1)\xi] - M\lambda + C_2 \leqslant -1$，$-r\xi^{\gamma+2}/4K - c_2(c_1 + d_1)^{\gamma+1}\xi^{2\gamma+2}/(2^{\gamma+2}\alpha_2^{\gamma+2}d_1^{\gamma+1}) - \alpha_1\alpha_2(1-\beta_1)/\{\xi[m_1 + m_2(1-\beta_1)\xi + m_3\xi^2]\} + C_3 \leqslant -1$，$-r/(4K\xi^{\gamma+2}) + C_3 \leqslant -1$。其中：$C_1 = \sup\limits_{(x,y_1,y_2)\in R_+^3}\{-rx^{\gamma+2}/2K + 2M\alpha_1\alpha_2d_1/[m_2(c_2 + \sigma_3^2/2)] - M\lambda + c_1 + d_1 + r/K + \sigma_2^2/2 + B\}$，$C_2 = \sup\limits_{(x,y_1,y_2)\in R_+^3}\{-rx^{\gamma+2}/2K + c_1 + d_1 + r/K + \sigma_2^2/2 + B\}$，$C_3 = \sup\limits_{(x,y_1,y_2)\in R_+^3}\{-rx^{\gamma+2}/4K + 2M\alpha_1\alpha_2d_1/[m_2(c_2 + \sigma_3^2/2)] - M\lambda + c_1 + d_1 + r/K + \sigma_2^2/2 + B\}$。

为了方便，将 $R_+^3 \setminus U$ 分成如下的六个区域：$U_1^C = \{(x,y_1,y_2) \in R_+^3 : 0 < x \leqslant \xi\}$；$U_2^C = \{(x,y_1,y_2) \in R_+^3 : x > \xi, 0 < y_2 \leqslant \xi^2\}$；$U_3^C = \{(x,y_1,y_2) \in R_+^3 : x > \xi, 0 < y_1 < \xi^4, y_2 \geqslant \xi^2\}$；$U_4^C = \{(x,y_1,y_2) \in R_+^3 : x \geqslant 1/\xi\}$；$U_5^C = \{(x,y_1,y_2) \in R_+^3 : y_1 \geqslant 1/\xi^4\}$；$U_6^C = \{(x,y_1,y_2) \in R_+^3 : y_2 \geqslant 1/\xi^2\}$。接下来，将证明在 $R_+^3 \setminus U$ 上有 $LV \leqslant -1$。

情形 1　对任意的 $(x,y_1,y_2) \in U_1^C$，有

$$LV \leqslant -(r - \sigma_1^2 - \alpha_1/m_3)/\xi - rx^{\gamma+2}/(2K) + 2M\alpha_1\alpha_2d_1/[m_2(c_2 + \sigma_3^2/2)] = -(r - \sigma_1^2 - \alpha_1/m_3)/\xi + C_1 \leqslant -1。 \tag{5}$$

情形 2　对任意的 $(x,y_1,y_2) \in U_2^C$，有

$$LV \leqslant 2M\alpha_1\alpha_2d_1(m_1 + m_3y_2^2)/[m_2^2(c_2 + \sigma_3^2/2)(1-\beta_1)x] - rx^{\gamma+2}/(2K) - M\lambda + c_1 + d_1 + r/K + \sigma_2^2/2 + B \leqslant 2M\alpha_1\alpha_2d_1(m_1 + m_3\xi^2)/[m_2^2(c_2 + \sigma_3^2/2)(1-\beta_1)\xi] - M\lambda + C_2 \leqslant -1。 \tag{6}$$

情形 3　对任意的 $(x,y_1,y_2) \in U_3^C$，有

$$LV \leqslant -r\cdot\xi^{\gamma+2}/4K - c_2(c_1 + d_1)^{\gamma+1}\xi^{2\gamma+2}/(2^{\gamma+2}\alpha_2^{\gamma+2}d_1^{\gamma+1}) - \alpha_1\alpha_2(1-\beta_1)/\{\xi[m_1 + m_2(1-\beta_1)\xi + m_3\xi^2]\} + C_3 \leqslant -1。 \tag{7}$$

情形 4　对任意 $(x,y_1,y_2) \in U_4^C$，有

$$LV \leqslant -r/(4K\xi^{\gamma+2}) + C_3 \leqslant -1。 \tag{8}$$

情形 5　对任意 $(x,y_1,y_2) \in U_5^C$，有

$$LV \leqslant -(c_1 + d_1)/(4\alpha_2^{\gamma+1}\xi^{4\gamma+4}) + C_1 \leqslant -1。 \tag{9}$$

情形 6　对任意 $(x,y_1,y_2) \in U_6^C$，有

$$LV \leqslant -c_2(c_1 + d_1)^{\gamma+1}/(2^{\gamma+2}\alpha_2^{\gamma+2}d_1^{\gamma+1}\xi^{2\gamma+2}) + C_1 \leqslant -1。 \tag{10}$$

由式(5)~(10)可得，对任意的 $(x,y_1,y_2)\in R_+^3\setminus U$，有 $LV(x,y_1,y_2)\leqslant -1$，因此式（1）存在唯一的遍历平稳分布。

3 灭绝性

定理 3 如果 $\min\{c_1+d_1,c_2\}(\sqrt{R}-1)I_{\{\sqrt{R}\leqslant 1\}}+\max\{c_1+d_1,c_2\}(\sqrt{R}-1)I_{\{\sqrt{R}>1\}}-\sigma_2^2\sigma_3^2/[2(\sigma_2^2+\sigma_3^2)]+c_2\sigma_1\sqrt{R/(2r)}<0$，$R=\alpha_1\alpha_2/[m_2c_2(c_1+d_1)]$ 且 $r>\sigma_1^2/2$，则幼年捕食者和成年捕食者种群几乎必然灭绝。

证明 由式（1）可得 $\mathrm{d}x(t)\leqslant rx(t)[1-x(t)/K]+x(t)\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)$。

考虑如下的微分方程 $\mathrm{d}X(t)\leqslant rX(t)[1-X(t)/K]+X(t)\sigma_1\mathrm{d}B_1(t),X(0)=x(0)>0$，由比较原理，可得 $x(t)\leqslant X(t),t\geqslant 0,\text{a.s.}$。

令 $\sqrt{R}(\omega_1,\omega_2)=(\omega_1,\omega_2)D$，这里 $(\omega_1,\omega_2)=(\sqrt{R},\alpha_1\alpha_2/[m_2(c_1+d_1)])$，$D=\begin{pmatrix}0 & \alpha_1\alpha_2/[m_2(c_1+d_1)]\\ d_1/c_2 & 0\end{pmatrix}$。

定义正定 C^2-函数 $\tilde{V}:R_+^2\to R_+$ 如下：$\tilde{V}(y_1(t),y_2(t))=py_1(t)+qy_2(t)$。其中：$p=\omega_1/(c_1+d_1)$，$q=\omega_2/c_2$。由 Itô's 公式可得 $L\tilde{V}(t)=p/\tilde{V}(t)\cdot\{\alpha_1\alpha_2(1-\beta_1)x(t)y_2(t)/[m_1+m_2(1-\beta_1)x(t)+m_3y_2(t)]-c_1y_1(t)-d_1y_1(t)\}+q/\tilde{V}(t)[-c_2y_2(t)+d_1y_1(t)]-[p^2\sigma_2^2y_1^2(t)+q^2\sigma_3^2y_2^2(t)]/[2\tilde{V}^2(t)]$，且有 $\tilde{V}^2(y_1(t),y_2(t))\leqslant[p^2\sigma_2^2y_1^2(t)+q^2\sigma_3^2y_2^2(t)](1/\sigma_2^2+1/\sigma_3^2)$。又 $[p/\tilde{V}(t)]\{\alpha_1\alpha_2(1-\beta_1)x(t)y_2(t)/[m_1+m_2(1-\beta_1)x(t)+m_3y_2(t)]-c_1y_1(t)-d_1y_1(t)\}\leqslant p\alpha_1\alpha_2|X-K|/(qm_2K)+\min\{c_1+d_1,c_2\}(\sqrt{R}-1)I_{\{\sqrt{R}\leqslant 1\}}+\max\{c_1+d_1,c_2\}(\sqrt{R}-1)I_{\{\sqrt{R}>1\}}$，所以 $L\tilde{V}(t)\leqslant p\alpha_1\alpha_2|X-K|/(qm_2K)+\min\{c_1+d_1,c_2\}(\sqrt{R}-1)I_{\{\sqrt{R}\leqslant 1\}}+\max\{c_1+d_1,c_2\}(\sqrt{R}-1)I_{\{\sqrt{R}>1\}}-2\sigma_2^2\sigma_3^2/(\sigma_2^2+\sigma_3^2)$，从而有

$$\mathrm{d}\ln\tilde{V}(t)\leqslant\{p\alpha_1\alpha_2|X-K|/(qm_2K)+\min\{c_1+d_1,c_2\}(\sqrt{R}-1)I_{\{\sqrt{R}\leqslant 1\}}+\max\{c_1+d_1,c_2\}(\sqrt{R}-1)I_{\{\sqrt{R}>1\}}-2\sigma_2^2\sigma_3^2/(\sigma_2^2+\sigma_3^2)\}\mathrm{d}t-[p\sigma_2y_1(t)/\tilde{V}(t)]\mathrm{d}B_2(t)+[q\sigma_3y_2(t)/\tilde{V}(t)]\mathrm{d}B_3(t)。\quad(11)$$

式（11）两边在 $[0,t]$ 积分，可得

$$[\ln\tilde{V}(t)-\ln\tilde{V}(0)]/t\leqslant[p\alpha_1\alpha_2/(qm_2K)]\int_0^t|X(s)-K|\mathrm{d}s+\min\{c_1+d_1,c_2\}(\sqrt{R}-1)I_{\{\sqrt{R}\leqslant 1\}}+\max\{c_1+d_1,c_2\}(\sqrt{R}-1)I_{\{\sqrt{R}>1\}}-2\sigma_2^2\sigma_3^2/(\sigma_2^2+\sigma_3^2)+\bar{M}(t)/t+\bar{N}(t)/t。\quad(12)$$

其中：$\bar{M}(t)=\int_0^t[p\sigma_2y_1(s)/\tilde{V}(s)]\mathrm{d}B_2(s)$，$\bar{N}(t)=\int_0^t[q\sigma_3y_2(s)/\tilde{V}(s)]\mathrm{d}B_3(s)$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}[\bar{M}(t)/t]=0$，$\lim\limits_{t\to\infty}[\bar{N}(t)/t]=0,\text{a.s.}$。

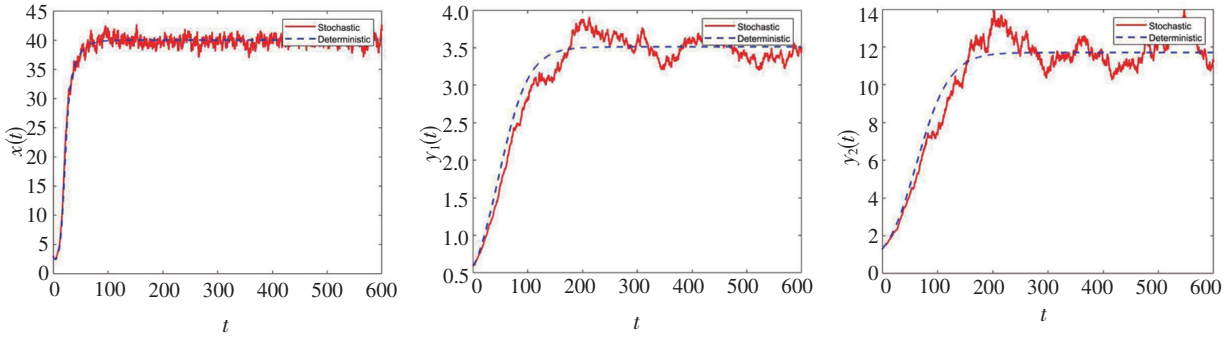
由（12）可得 $\limsup\limits_{t\to\infty}[\ln\tilde{V}(t)/t]\leqslant\min\{c_1+d_1,c_2\}(\sqrt{R}-1)I_{\{\sqrt{R}\leqslant 1\}}+\max\{c_1+d_1,c_2\}(\sqrt{R}-1)I_{\{\sqrt{R}>1\}}-2\sigma_2^2\sigma_3^2/(\sigma_2^2+\sigma_3^2)+c_2\sigma_1\sqrt{R/(2r)}<0$，从而有 $\limsup\limits_{t\to\infty}[\ln y_1(t)/t]<0$，$\limsup\limits_{t\to\infty}[\ln y_2(t)/t]<0$，即有 $\lim\limits_{t\to\infty}y_1(t)=0$，$\lim\limits_{t\to\infty}y_2(t)=0,\text{a.s.}$。

4 数值模拟

为了验证上述理论结果，采用 Milstein[22] 高阶方法给出式（1）的数值模拟结果。

选取参数 $r=0.9$，$\alpha_1=0.3$，$\alpha_2=0.5$，$c_1=0.04$，$c_2=0.02$，$d_1=0.8$，$m_2=0.5$，$m_3=0.8$，$\sigma_1^2=0.03$，$\sigma_2^2=0.05$，$\sigma_3^2=0.04$，计算可知满足定理2的条件，所以系统式（1）存在唯一的平稳分布（见图1）。

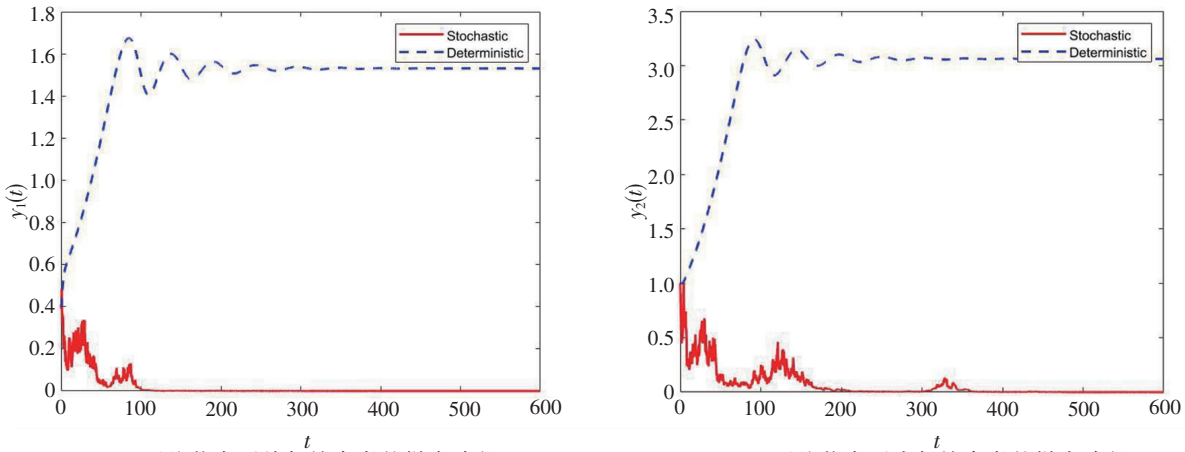
选取参数 $r = 0.4$，$\alpha_1 = 0.9$，$\alpha_2 = 0.01$，$c_1 = 0.4$，$c_2 = 0.01$，$d_1 = 0.6$，$m_2 = 10$，$\sigma_1^2 = 0.04$，$\sigma_2^2 = 20$，$\sigma_3^2 = 20$，计算可知满足定理3 的条件，因此幼年捕食者和成年捕食者都几乎必然灭绝（见图 2）。



a) 食饵的随机性与确定性路径　b) 幼年捕食者的随机性与确定性路径　c) 成年捕食者的随机性与确定性路径

图 1　式(1)的解及其确定性系统的解

Fig.1　The solution of model(1) and its corresponding deterministic model



a) 灭绝状态下幼年捕食者的样本路径　b) 灭绝状态下成年捕食者的样本路径

图 2　式(1)的捕食者种群灭绝图

Fig.2　Predator population extinction of model(1)

[参 考 文 献]

[1] LOTKA A J. Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems[J]. Proceeding of the National Academy of Sciences,1920,6:410-415.

[2] VOLTERA V. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically[J]. Nature,1926,118(2972):558-560.

[3] LI J,LIU X,WEI C. The impact of fear factors and self-defence on the dynamics of predator-prey model with digestion delay[J]. Mathematical Biosciences and Engineering,2021,18:5478-5504.

[4] WIJAYA K P,CHAVEZ J P,POCHAMPALLI R. Food sharing and time budgeting in predator-prey interaction[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,2021,97:105757.

[5] BEDDINGTON J R. Mutual interference between parasites or predators and its effect on searching effciency[J]. Journal of Animal Ecology,1975,44(1):331-340.

[6] DEANGELIS D L,GOLDSTEIN R A,O'NEILL R V. A model for trophic interaction[J]. Ecology,1975,56(4):881-892.

[7] DENG L,WANG X,PENG M. Hopf bifurcation analysis for a ratio-dependent predator-prey system with two delays and stage structure for the predator[J]. Applied Mathematics and Computation,2014,231:214-230.

[8] 范猛,王克. 一类具有 Holling Ⅱ型功能性反应的捕食者-食饵系统全局周期解的存在性[J]. 数学物理学报,2001,21A

(4):492-497.
[9]徐炳详,曾志军. 一类具有 Holling Ⅲ型功能性反应的捕食者-食饵系统的周期解的存在性[J]. 纯粹数学与应用数学,2012,28(4):523-530.
[10]FANG H,WANG M,ZHOU T. Existence of positive periodic solution of a hepatitis B virus infection model[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences,2014,38(1):188-196.
[11]GUO K,MA W. Existence of positive periodic solutions of several types of biological models with periodic coefficients[J]. Nonlinear Analysis:Real World Applications,2023,69:103760.
[12]周丽婷,许峻维,王棋,等. 一类具有 Beddington-DeAngelis 功能反应的空气污染周期动力学模型的正周期解的存在性[J]. 数学的实践与认识,2023,53(10):169-177.
[13]LU W L,XIA Y H. Multiple periodicity in a predator-prey model with prey refuge[J]. Mathematics,2022,421(10):1-13.
[14]GHOSH J,SAHOO B,PORIA W. Prey-predator dynamics with prey refuge providing additional food to predator[J]. Chaos Solitons and Fractals,2017,96:110-119.
[15]LU W L,XIA Y H,BAI Y. Periodic solution of a stage-structured predator-prey model incorporating prey refuge[J]. Mathematical Biosciences and Engineering,2020,4:3160-3174.
[16]MOLLA H,SARWARDI S,SMITH S R,et al. Dynamics of adding variable prey refuge and an Allee effect to a predator-prey model[J]. Alexandria Engineering Journal,2022,61:4175-4188.
[17]MAY R. Stability and complexity in model ecosystems[M]. Princeton:Princeton University Press,1973.
[18]陈哲文,魏春金,张树文. 具有心理效应的随机扰动捕食-食饵模型[J]. 集美大学学报(自然科学版),2020,25(1):69-75.
[19]QI H K,MENG X Z. Threshold behavior of a stochastic predator-prey system with prey and fear effect[J]. Applied Mathematics Letters,2021,113:106846.
[20]LI M,SHAO Y,YANG Y. Dynamics of a stochastic delayed predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional response[J]. International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application,2019,8:93-105.
[21]LI J,LIU X H,WEI C J. The impact of role reversal on the dynamics of predator-prey model with stage structure[J]. Applied Mathematics Modelling,2022,104:339-357.
[22]HIGHAM D J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. SIAM Review,2001,43:525-546.

(责任编辑　彭海滨　英文审校　黄振坤)