[引用格式]肖杨,齐豪,叶永南. 水平步或峰避免在给定集合的 Motzkin 路径[J]. 集美大学学报(自然科学版),2026,31(3):368-378. DOI:10.19715/j.jmuzr.2026.03.11.

水平步或峰避免在给定集合的 Motzkin 路径

肖 杨，齐 豪，叶永南

（温州大学数理学院，浙江 温州 325005）

[摘要] 对于给定集合 A，文中主要研究了水平步或峰避免在 A 的 Motzkin 路径（关于峰个数）的生成函数。首先，讨论了 A 为奇数集合或偶数集合时生成函数的显式表达式，然后给出了 A 为任意集合时，避免水平步在 A 的生成函数的递推关系及连分式，最后得出了水平步和峰分别避免在一对给定集合 A 和 B 的移位等价性。

[关键词] Motzkin 路径；避免水平步；避免峰；移位等价

[中图分类号]O 157.1 [文章编号]1007－7405(2026)03－0368－11 DOI:10.19715/j.jmuzr.2026.03.11

Motzkin Path with Levels or Peaks Avoiding a Given Set

XIAO Yang, QI Hao, YE Yongnan

(School of Mathematics and Physics, Wenzhou University, Wenzhou 325005, China)

Abstract: In this paper, for a given set A, we study the generating functions with respect to the number of peaks in Motzkin paths in which the levels or peaks avoid A. We first consider the case Where A consists of odd or even integers, secondly, when A is any set, we give the recursive relations and continued fractions of the generating functions for Motzkin paths with levels avoiding A, finally, for any sets A and B, we also derive the shift equivanlence of Motzkin paths with levels and peaks avoiding a pair of given sets A and B, respectively.

Keywords: Motzkin path; avoiding levels; avoiding peaks; shift equivanlence

0 引言

Dyck 路径[1－4]、Motzkin 路径[4－5]等路径是组合计数学的重要研究对象，它们的研究中蕴含着许多数学问题[6－10]，以及与树、正交多项式、连分数之间联系。本文将重点研究在特定限制下的 Motzkin 路径。

首先，给出 Dyck 路径的定义及相关符号。

定义 1 在平面直角坐标系的第一象限中，一条从起点 $(0,0)$ 走到 $(2n,0)$，由上升步 $U=(1,1)$ 和下降步 $D=(1,-1)$ 组成的半长为 n 的路径称为 n-Dyck 路径。

[收稿日期] 2024－10－27
[基金项目] 浙江省自然科学基金项目（LQ24A010014）
[通信作者] 齐豪，讲师，硕导，从事组合图论方向研究，E-mail:qihao@wzu.edu.cn

对任意 $n \geqslant 0$，令 D_n 表示所有 n-Dyck 路径的集合。众所周知，$|D_n| = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。其中 C_n 为第 n 个 Catalan 数。序列 $\{C_n\}_{n\geqslant 0}$ 的生成函数记为 $C(z) := \sum_{n\geqslant 0} C_n z^n$，其满足等式：$C(z) = 1 + zC^2(z)$。故 $C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$。

类似地，有 Motzkin 路径定义及相关符号表示。

定义 2　在平面直角坐标系的第一象限中，一条从起点（0，0）走到（n,0），由上升步 $U = (1,1)$、下降步 $D = (1,-1)$ 和水平步 $L = (1,0)$ 组成的长为 n 的路径称为 n-Motzkin 路径。

对任意 $n \geqslant 0$，令 $\mathscr{M}_n$ 为所有 n-Motzkin 路径的集合，并令 $M_n = |\mathscr{M}_n|$，其中 M_n 为第 n 个 Motzkin 数。序列 $\{M_n\}_{n\geqslant 0}$ 的生成函数记为 $M(z) := \sum_{n\geqslant 0} M_n z^n$，它满足等式 $M(z) = 1 + zM(z) + z^2M^2(z)$，故 $M(z) = \frac{1-z-\sqrt{1-2z-3z^2}}{2z^2}$。

在 Dyck 路径中，一个上升步紧随着一个下降步称为一个峰，一个下降步紧随着一个上升步称为一个谷。峰的高度（谷的高度）是指在两个步中较大（小）的 y 坐标值。对 Dyck 路径做各种限制的研究吸引了众多学者的关注，比方说，禁止双上升步、双下降步、上升水平步等，或者对各步的高度进行限制，如峰、谷的高度避免在给定集合等。

Deutsch[6] 证明了峰的高度避免在集合 $\{1\}$ 的 n-Dyck 路径的个数为第 n 个 Fine 数；Peart 等[7] 证明了峰的高度避免在集合 $\{2\}$ 的 n-Dyck 路径的个数为第 $n-1$ 个 Catalan 数。Mansour[8] 研究了峰的高度在 k 时的 n-Dyck 路径的性质，其中 k 为任意非负整数。Eu 等[9] 以连分式的形式给出了峰的高度避免或限制在某个给定集合下的 n-Dyck 路径的生成函数，并发现了峰的高度避免在偶数集合、奇数集合、集合 $\{2,3,\cdots,m\}$ 的 n-Dyck 路径的个数分别等于 $(n-1)$-Motzkin 数、n-Riordan 数、移位的 Catalan 数 C_{n-m+1}，同时他们还发现了峰的高度避免和限制在某个集合的移位等价关系。Liu 等[10] 研究了峰的高度和谷的高度避免在给定集合的 n-Dyck 路径的计数。

目前对峰或者谷进行相关限制的研究主要集中在 Dyck 路径，本文将研究转向 Motzkin 路径，研究水平步或峰的高度避免在给定集合的 Motzkin 路径。

在 Motzkin 路径中，峰及谷的高度类同于 Dyck 路径中的定义，水平步的高度指水平步的纵坐标 y 的坐标值。为了描述方便，给出 Motzkin 路径中峰（或水平步）的高度避免在给定集合的定义如下：

定义 3　给定集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ 和任意 $n \in \mathbb{N}$，令 $M_{n,P,\bar{A}}$（或 $M_{n,L\bar{A}}$）表示所有峰（或水平步）的高度避免在集合 A 的 n-Motzkin 路径的集合，它们的生成函数分别记为：$M_{P,\bar{A}}(x,z) = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{P\in M_{n,P,\bar{A}}} x^{\mathrm{peak}(P)} z^n$，及 $M_{L\bar{A}}(x,z) = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{P\in M_{n,L,\bar{A}}} x^{\mathrm{peak}(P)} z^n$。其中：$\mathbb{N}$ 为非负整数集合；$\mathrm{peak}(P)$ 表示 Motzkin 路径 P 中峰的个数。

定义 4　给定集合 $A,B \subseteq \mathbb{N}$，以及 $n \in \mathbb{N}$，令 $\widetilde{M}_{n,\bar{A},\bar{B}}$ 表示所有水平步的高度和所有峰的高度分别避免在集合 A 和 B 的 n-Motzkin 路径的集合。

在本文中，为了描述更加简洁，将“峰（或水平步）的高度避免在给定集合 A”简称为“峰（或水平步）避免在给定集合 A”。

1 峰或水平步避免在奇、偶集合的 Motzkin 路径

令 O 表示奇数集合，E 表示偶数集合。本节将给出水平步或峰的高度避免在 O 或 E 的 Motzkin 路径的生成函数的显式表达式。根据定义 3，有下述生成函数：$M_{P,\bar{O}}(x,z)=\sum_{n\geqslant 0}\sum_{P\in M_{n,P,\bar{O}}}x^{\mathrm{peak}(P)}z^n$，$M_{P,\bar{E}}(x,z)=\sum_{n\geqslant 0}\sum_{P\in M_{n,P,\bar{E}}}x^{\mathrm{peak}(P)}z^n$，$M_{L,\bar{O}}(x,z)=\sum_{n\geqslant 0}\sum_{P\in M_{n,L,\bar{O}}}x^{\mathrm{peak}(P)}z^n$，$M_{L,\bar{E}}(x,z)=\sum_{n\geqslant 0}\sum_{P\in M_{n,L,\bar{E}}}x^{\mathrm{peak}(P)}z^n$。首先考虑 $P\in M_{P,\bar{O}}(x,z)$ 和 $P\in M_{P,\bar{E}}(x,z)$。

定理 1 对任意 $n\in\mathbb{N}$，有：$P\in M_{P,\bar{O}}(x,z)=\dfrac{xz^4-xz^3-z^4+xz^2+2z^3-3z^2+2z-1+\sqrt{B(x,z)}}{-2(z^2-z+1)z^2}$，$P\in M_{P,\bar{E}}(x,z)=\dfrac{xz^4-xz^3-z^4+xz^2+2z^3-3z^2+2z-1+\sqrt{B(x,z)}}{-2z^2(xz^2-z^2+z-1)}$。其中 $B(x,z)=(x^2-2x+1)z^8+(-2x^2+6-x4)z^7+(3x^2-8x+6)z^6+(-2x^2+10x-8)z^5+(x^2-8x+7)z^4+(6x-8)z^3+(6-2x)z^2-4z+1$。

证明 对于任意 n-Motzkin 路径 P，皆有 $M_{0,P,\bar{O}}=M_{0,P,\bar{E}}=\varnothing$。

首先假设 $P\in M_{n,P,\bar{O}}$ 且 $n\geqslant 1$。由 Motzkin 路径的定义，可知 P 不会出现在 x 轴下方，所以 P 的第一步为上升步 U 或者水平步 L。因为峰的高度避免在 O，故 P 的第二步不能为下降步 D。根据 P 的第一步为 U 或 L，有两种不同情况：$P=UP_1DP_2$ 和 $P=LP_3$（如图 1 所示）。其中：$P_1\in M_{P,\bar{E}}$ 且 $P_1\neq\varnothing$；$P_2,P_3\in M_{P,\bar{O}}$。于是，可得递归关系为

$$M_{P,\bar{O}}(x,z)=1+z^2(M_{P,\bar{E}}(x,z)-1)M_{P,\bar{O}}(x,z)+zM_{P,\bar{O}}(x,z)。\tag{1}$$

类似地，如果 $P\in M_{n,P,\bar{E}}$ 且 $n\geqslant 1$，那么路径 P 的第一步可能为上升步 U 或者水平步 L。如果第一步为上升步 U，那么第二步可能是下降步 D 或其他。因此，可得三种不同情况：$P=UDP_1$，$P=UP_2DP_3$ 以及 $P=LP_4$（如图 2 所示）。其中：$P_2\in M_{P,\bar{O}}$ 且 $P_2\neq\varnothing$；$P_1,P_3,P_4\in M_{P,\bar{E}}$。

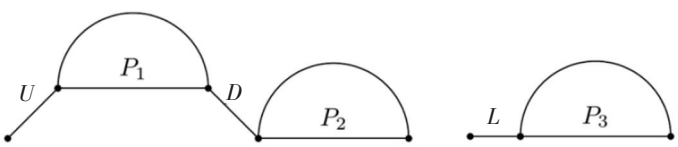


图 1 峰避免在奇数集合 O 的 Motzkin 路径

Fig.1 Motzkin paths avoiding peaks in the odd set O

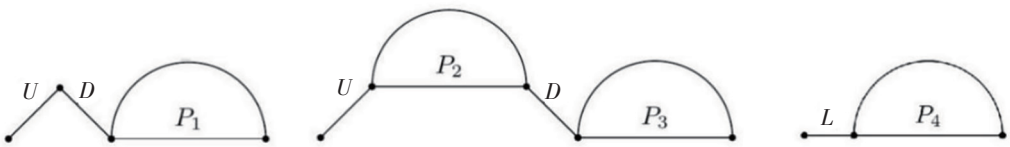


图 2 峰避免在偶数集合 E 的 Motzkin 路径

Fig.2 Motzkin paths avoiding peaks in the even set E

现可得递归关系为

$$M_{P,\bar{E}}(x,z)=1+xz^2M_{P,\bar{E}}(x,z)+z^2(M_{P,\bar{O}}(x,z)-1)M_{P,\bar{E}}(x,z)+zM_{P,\bar{E}}(x,z)。\tag{2}$$

将式（1）与式（2）相减，整理后可得

$$(1 - z + z^2)M_{P,\bar{O}}(x,z) = M_{P,\bar{E}}(x,z)(1 - z + z^2 - xz^2)。\tag{3}$$

再将式（3）代回式（1）和式（2），分别可得：

$$(xz^4 - z^4 + z^3 - z^2)M_{P,\bar{E}}(x,z) + A(x,z)M_{P,\bar{E}}(x,z) - z^2 + z + z = 0,\tag{4}$$

$$(-z^4 + z^3 - z^2)M^2_{P,\bar{O}}(x,z) + A(x,z)M_{P,\bar{O}}(x,z) - z^2 + z + 1 = 0。\tag{5}$$

其中 $A(x,z) = -xz^4 + xz^3 + z^4 - xz^2 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + z = 0$。

将式（4）和式（5）分别视为关于 $M_{P,\bar{E}}(x,z)$ 和 $M_{P,\bar{O}}(x,z)$ 的一元二次方程，解其可得定理 1 所示结果。

接下来考虑 $M_{L,\bar{O}}(x,z)$ 和 $M_{L,\bar{E}}(x,z)$。

定理 2　对任意∈ℕ，有：$M_{L,\bar{O}}(x,z) = \dfrac{-x^2z^4 + 2xz^4 - xz^3 - z^4 + 2xz^2 + z^3 - 2z^2 + z - 1\sqrt{C(x,z)}}{2(xz^2 - z^2 + z - 1)z^2}$，

$M_{L,\bar{E}}(x,z) = \dfrac{-x^2z^4 + 2xz^4 - xz^3 - z^4 + 2xz^2 + z^3 - 2z^2 + z - 1\sqrt{C(x,z)}}{2z^2(xz^2 - z^2 - 1)}$。其中 $C(x,z) = (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)z^8 + (2x^3 - 6x^2 + 6x - 2)z^7 + (4x^3 + 9x^2 - 6x + 1)z^6 - (6x^2 + 8x - 2)z^5 + (6x^2 - 6x)z^4 + (6x - 2)z^3 + (-4x + 1)z^2 - 2z + 1$。

证明　对于任意 n-Motzkin 路径 P，皆有 $M_{0,L,\bar{O}} = M_{0,L,\bar{E}} = \varnothing$。

先假设 $P \in M_{n,L,\bar{O}}$ 且 $n \geqslant 1$。由 Motzkin 路径的定义，可知 P 不会出现在 x 轴下方，又因为水平步的高度不能在 E，故 P 的第一步只能为上升步 U。又因为 P 的第二步可能是下降步或其他，有两种不同情况：$P = UDP_1$ 和 $P = UP_2DP_3$（如图 3 所示）。其中：$P_2 \in M_{L,\bar{O}}$ 且 $P_2 \neq \varnothing$；$P_1, P_3 \in M_{L,\bar{E}}$。因此，可得递归关系为

$$M_{L,\bar{E}}(x,z) = 1 + xz^2M_{L,\bar{E}}(x,z) + z^2(M_{L,\bar{O}}(x,z) - 1)M_{L,\bar{E}}(x,z)。\tag{6}$$

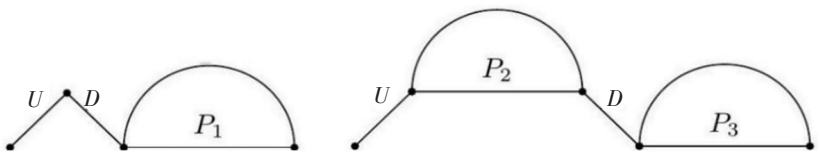


图 3　水平步避免偶数集合 E 的 Motzkin 路径

Fig.3　Motzkin paths avoiding levels in the even set E

类似地，假设 $P \in M_{n,L,\bar{O}}$ 且 $n \geqslant 1$，那么路径 P 的第一步可能为上升步 U 或水平步 L。如果第一步为上升步 U，那么第二步可能是下降步 D 或其他。相应地，可得三种不同情况：$P = UDP_1, P = UP_2DP_3$ 以及 $P = LP_4$（如图 4 所示）。其中：$P_2 \in M_{L,\bar{E}}$ 且 $P_2 \neq \varnothing$；$P_1, P_3, P_4 \in M_{L,\bar{O}}$。

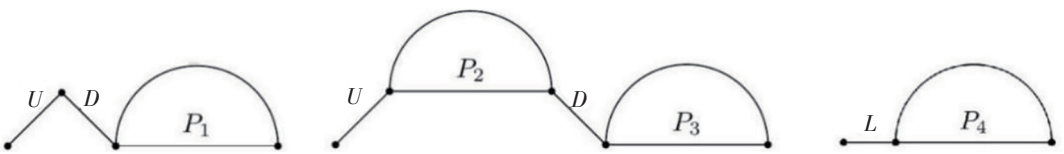


图 4　水平步避免在奇数集合 O 的 Motzkin 路径

Fig.4　Motzkin paths avoiding levels in the odd set O

于是，可得递归关系为

$$M_{L,\bar{O}}(x,z) = 1 + xz^2M_{L,\bar{O}}(x,z) + z^2(M_{L,\bar{E}}(x,z) - 1)M_{L,\bar{O}}(x,z) + zM_{L,\bar{O}}(x,z)。\quad (7)$$

将式（6）与式（7）相减，整理后可得

$$(1 - xz^2 + z^2)M_{L,\bar{E}}(x,z) = (1 - xz^2 + z^2 - z)M_{L,\bar{O}}(x,z)。\quad (8)$$

再将式（8）代回式（6）和式（7），分别有：

$$(xz^4 - z^4 + z^3 - z^2)M^2_{L,\bar{O}}(x,z) + A'(x,z)M_{L,\bar{O}}(x,z) + xz^2 - z^2 - 1 = 0,\quad (9)$$

$$(xz^4 - z^4 - z^2)M^2_{L,\bar{E}}(x,z) + A'(x,z)M_{L,\bar{E}}(x,z) + xz^2 - z^2 - 1 = 0。\quad (10)$$

其中 $A'(x,z) = x^2z^4 - 2xz^4 + xz^3 + z^4 - 2xz^2 - z^3 + 2z^2 - z + 1$。最后，解式（9）和式（10）可得定理 2 所述结果。

在定理 2 中，若设 x 为 1，则 $M_{L,\bar{O}}(1,z)$ 和 $M_{L,\bar{E}}(1,z)$ 分别与 OEIS[11] 中的序列 *A*090344 和 *A*090345 的生成函数一致，此外，$M_{L,\bar{O}}(1,z)$ 等于禁止 *UL* 步的 Motzkin 路径的生成函数。其中：$U = (1,1)$；$L = (1,0)$。Callan[12] 证明了 $M_{L,\bar{E}}(1,z)$ 是在第一象限中从起点 $(0,0)$ 到 $(n,0)$，步集为 $U(K) = (K,1)$ 及下降步 $D = (1,-1)$ 的路径的生成函数。其中 K 为任意正整数。

2 水平步避免在给定集合 A 的 Motzkin 路径

回顾定义 3，记 $\mathbb{N}$ 为非负整数集合，对于任意 $A \subseteq \mathbb{N}$，$M_{L,\bar{A}}(x,z) = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{P\in M_{n,L,\bar{A}}} x^{\mathrm{peak}(P)}z^n$。在本节中，首先给出 $M_{L,\bar{A}}(x,z)$ 的递推关系，由此可得它的连分式（连分式的相关研究可参见文献［13］），然后对于 A 的特殊子集，I 的模 k 同余类 $(k,\{I\})$ 集，给出 $M_{L,\overline{(k,\{I\})}}(x,z)$ 的连分式。

为了描述方便，做如下规定：对于任意 $i \in A \subseteq \mathbb{N}$，$A + i = \{n + i \mid i \in A\}$，$A - i = N \cap \{n - i \mid n \in A\}$。值得一提的是，$A - \{i\}$ 是指将元素 i 从集合 A 中移除，与 $A - i$ 的定义不同。

接下来，讨论 $M_{L,\bar{A}}(x,z)$。

定理 3 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $A \subseteq \mathbb{N}$，有 $M_{L,\bar{A}}(x,z) = 1 + \beta(0 \notin A)zM_{L,\bar{A}}(x,z) + xz^2M_{L,\bar{A}}(x,z) + z^2(M_{L,\overline{A-1}}(x,z) - 1)M_{L,\bar{A}}(x,z)$。其中：$\beta$ 是 Boolean 函数，有 $\beta(\mathrm{true}) = 1, \beta(\mathrm{false}) = 0$。此外，$M_{L,\bar{A}}(x,z) = \dfrac{1}{1 - z\beta(0 \notin A) - z^2x + z^2 - z^2M_{L,\overline{A-1}}(x,z)}$。

证明 对任意 n-Motzkin 路径 P，皆有 $M_{0,L,\bar{A}} = \varnothing$。

先假设 $P \in M_{n,L,\bar{A}}$ 且 $n \geqslant 1$。由 Motzkin 路径的定义，可知 P 不会出现在 x 轴下方，所以 P 的第一步可能为上升步 U 或者水平步 L。进一步，如果 $0 \notin A$，则第一步可以为上升步 U 或者水平步 L；如果 $0 \in A$，则第一步只能为上升步 U。因此，下面根据 A 是否包含 0，可分如下两种情况讨论。

如果 $0 \notin A$，则第一步可以为上升步 U 或者水平步 L，当第一步为上升步 U，则第二步是下降步 D 或者其他，因此有三种不同情况：$P = UDP_1, P = UP_2DP_3$ 以及 $P = HP_4$（如图 5 所示）。其中：$P_2 \in M_{L,\overline{A-1}}$ 且 $P_2 \neq \varnothing$；$P_1, P_3, P_4 \in M_{L,\bar{A}}$。

如果 $0 \in A$，那么第一步只能为上升步 U，根据第二步是下降步 D 或者其他，有两

种不同情形：$P = UDP_1$ 和 $P = UP_2DP_3$（如图 6 所示）。其中：$P_2 \in M_{L,\overline{A-1}}$ 且 $P_2 \neq \varnothing$；P_1，$P_3 \in M_{L,\overline{A}}$。

因此定理 3 成立。

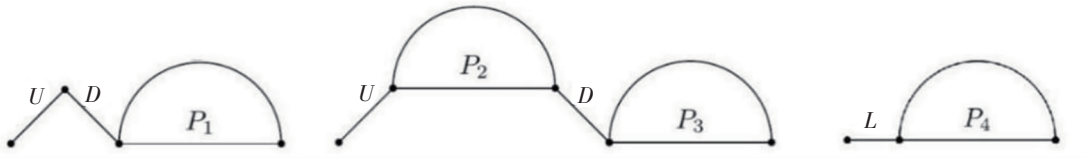


图 5　水平步避免在集合 A 的 Motzkin 路径且 $0 \notin A$

Fig.5　Motzkin paths avoiding levels in set A with $0 \notin A$

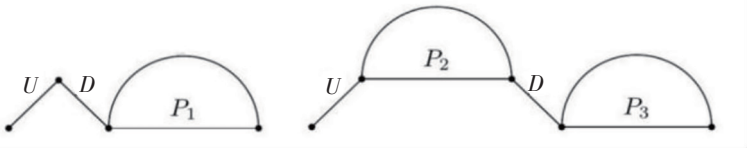


图 6　水平步避免在集合 A 的 Motzkin 路径且 $0 \in A$

Fig.6　Motzkin paths avoiding levels in set A with $0 \in A$

特别地，当 $A = \mathbb{N}$ 时，$M_{L,\overline{\mathbb{N}}}(x,z) = C(x,z)$，其中 $C(x,z) = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{P\in D_n} x^{\mathrm{peak}(P)}z^n$；当 $A = \varnothing$ 时，$M_{L,\overline{\varnothing}}(x,z) = M(x,z)$，其中 $M(x,z) = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{P\in \mathscr{M}_n} x^{\mathrm{peak}(P)}z^n$。由定理 3，可知 $M(x,z) = 1 + zM(x,z) + xz^2M(x,z) + z^2(M(x,z)-1)M(x,z)$，整理可得 $z^2M^2(x,z) + (xz^2 - z^2 + z - 1)M(x,z) = 0$，解得

$$M(x,z) = -\frac{(x-1)z^2 + z - 1 + \sqrt{x^2z^4 - 2xz^4 + 2xz^3 + z^4 - 2xz^2 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1}}{2z^2}。$$

考虑到 $A \subseteq \mathbb{N}$ 为有限集合，令 m 为 A 的最大整数，即 $m = \max A$，由定理 3 可得 $M_{L,\overline{A}}(x,z)$ 的 $m+1$ 阶连分式为

$$M_{L,\overline{A}}(x,z) = \cfrac{1}{1 - z\beta(0 \notin A) - z^2x + z^2 - \cfrac{z^2}{\ddots \cfrac{z^2}{1 - z\beta(m-1 \notin A) - z^2x + z^2 - \cfrac{z^2}{1 - z^2x + z^2 - z^2M(x,z)}}}}。$$

当 A 为一些特殊集合，可以给出 $M_{L,\overline{A}}(x,z)$ 的显式表达式。

例 1　A 是单个元素集合或者两个元素构成的集合。

首先讨论 A 是单个元素构成的集合的情况，$A = \{0\}$，$A = \{1\}$ 时情况如下：$M_{L,\overline{\{0\}}}(x,z) = \dfrac{1}{1 - xz^2 - z^2(M(x,z)-1)} = \dfrac{xz^2 - z^2 + \sqrt{B'(x,z)} - z - 1}{2z(xz^2 - z^2 - z - 1)} = 1 + xz^2 + z^3 + z^4(x^2 + x + 1) + 2z^5(2x+1) + z^6(x^3 + 3x^2 + 6x + 5) + \cdots$。其中 $B'(x,z) = x^2z^4 - 2xz^4 + 2xz^3 + z^4 - 2xz^2 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1$。事实上，$M_{L,\overline{\{0\}}}(x,z) = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{P\in R_n} x^{\mathrm{peak}(P)}z^n$。其中：$P$ 为 Riordan 路径，即没有水平步高度为 0 的 Motzkin 路径。那有

$$M_{L,\overline{\{1\}}}(x,z) = \cfrac{1}{1 - xz^2 - z + z^2 - \cfrac{z^2}{1 - xz^2 + z^2 - z^2M(x,z)}} =$$

$$-\frac{z^2M(x,z)+xz^2-z^2-1}{(xz^4-z^4+z^3-z^2)M(x,z)+x^2z^4-2xz^4+xz^3+z^4-2xz^2-z^3+z^2-z+1}=$$

$$-\frac{-2x^2z^4+4xz^4-xz^3-2z^4+4xz^2+z^3-z^2+z-2+\sqrt{B'(x,z)}z}{B''(x,z)}=$$

$$1+z+(x+z)z^2+z^3(2x+1)+z^4(x^2+4x+1)+z^5(3x^2+6x+2)+\cdots。$$

其中 $B''(x,z)=2x^3z^6-6x^2z^6+6xz^6-2z^6+4x^2z^5-8z^5x-6x^2z^4+10xz^4+4z^5-8xz^3-4z^4+6xz^2+2z^3-4z^2+4z-2$。

一般地，当 $k>0$，$A=\{k\}$ 时，由定理 3 可得

$$M_{L,\overline{\{k\}}}(x,z)=\frac{1}{1-z-z^2x+z^2-z^2M_{L,\overline{\{k-1\}}}(x,z)}。$$

那么对任意的 $k\in\mathbb{N}$，类似于 $M_{L,\overline{\{0\}}}(x,z)$ 和 $M_{L,\overline{\{1\}}}(x,z)$ 的讨论方法可以得出 $M_{L,\overline{\{k\}}}(x,z)$ 的表达式。

接下来讨论 A 是两个元素集合的情况，$A=\{0,1\}$ 的情况为

$$M_{L,\overline{\{0,1\}}}(x,z)=\frac{1}{1-xz^2+z^2-\dfrac{z^2}{1-xz^2+z^2-z^2M(x,z)}}=$$

$$-\frac{z^2M(x,z)+xz^2-z^2-1}{(xz^4-z^4-z^2)M(x,z)+x^2z^4-2xz^4+z^4-2xz^2+z^2+1}=$$

$$-\frac{-2x^2z^4+4xz^4+xz^3-2z^4+4xz^2-z^3+\sqrt{B'(x,z)}z-3z^2-z-2}{2(x^3z^6-3x^2z^6+3xz^6-3x^2z^4-z^6+5xz^4-2z^4+3xz^2-z^3-2z^2-1}=$$

$$1+xz^2+x(x+1)z^4+z^5+(x^3+3x^2+x+1)z^6+2(3x+1)z^7+\cdots。$$

当 A 是有三个或者更多元素的集合时，可以用类似的方法计算。

接下来讨论水平步避免在 $(k,\{I\})$（集合）的 Motzkin 路径。首先给出 I 的模 k 同余类 $(k,\{I\})$ 的定义：对于任意 $k\geqslant 2, I\subset[0,k-1]$，其中 $[0,k-1]:=\{0,1,2,\cdots,k-1\}$。记 I 的模 k 同余类为 $(k,\{I\}):=\{n\in\mathbb{N}\mid\equiv i(\bmod k), i\in L\}$。在定理 3 中，令 $A=(k,\{I\})$，可得 $M_{L,\overline{(k,\{I\})}}(x,z)$ 的连分式，即如下推论 1，其中 $M_{L,\overline{(k,\{I\})}}(x,z)=\sum_{n\geqslant 0}\sum_{P\in M_{n,L,\overline{(k,\{I\})}}}x^{\mathrm{peak}(P)}z^n$。

推论 1 对任意 $n\in\mathbb{N}$，有

$$M_{L,\overline{(k,\{I\})}}(x,z)=$$

$$\cfrac{1}{1-z\beta(0\notin I)-z^2x+z^2-\cfrac{z^2}{1-z\beta(1\notin I)-z^2x+z^2-\cfrac{z^2}{\ddots}}}$$

$$\cfrac{}{1-z\beta(k-1\notin I)-z^2x+z^2-z^2M_{L,\overline{(k,\{I\})}}(x,z)}。$$

整理上述式子，可得一个关于 $M_{L,\overline{(k,\{I\})}}(x,z)$ 的一元二次方程，进而有 $M_{L,\overline{(k,\{I\})}}(x,z)=\dfrac{a(x,z)+\sqrt{b(x,z)}}{c(x,z)}$。其中：$a(x,z),b(x,z),c(x,z)\in Z[x,z]$，$Z$ 是整数集合。

特别地，当 $k=2$，$I=\{0\}$ 时，$M_{L,\overline{(2,\{0\})}}(x,z)=M_{L,\bar{E}}(x,z)$；当 $k=2$，$I=\{1\}$ 时，

$M_{L,\overline{(2,\{1\})}}(x,z) = M_{L,\bar{O}}(x,z)$；当 $k=3$ 时，分别给出 $I=\{0\}$，$I=\{1\}$ 及 $I=\{2\}$ 时对应的生成函数。

例 2　在同余类 $(k,\{I\})$ 中取 $k=3$，对应有 $I=\{0\}$，$I=\{1\}$ 及 $I=\{2\}$。有：

$$M_{L,\overline{(3,\{0\})}}(x,z)=\cfrac{1}{1-xz^2+z^2-\cfrac{z^2}{1-z-xz^2+z^2-\cfrac{z^2}{1-z-xz^2+z^2-z^2M_{L,\overline{(3,\{0\})}}(x,z)}}},$$

$$M_{L,\overline{(3,\{1\})}}(x,z)=\cfrac{1}{1-xz^2+z^2-\cfrac{z^2}{1-z-xz^2+z^2-\cfrac{z^2}{1-z-xz^2+z^2-z^2M_{L,\overline{(3,\{1\})}}(x,z)}}},$$

$$M_{L,\overline{(3,\{2\})}}(x,z)=\cfrac{1}{1-z-xz^2+z^2-\cfrac{z^2}{1-z-xz^2+z^2-\cfrac{z^2}{1-xz^2+z^2-z^2M_{L,\overline{(3,\{2\})}}(x,z)}}}。$$

整理后可得：$D_1(x,z)M^2_{L,\overline{(3,\{0\})}}(x,z)+G_1(x,z)M_{L,\overline{(3,\{0\})}}(x,z)+H_1(x,z)=0$，$D_1(x,z)M^2_{L,\overline{(3,\{1\})}}(x,z)+G_2(x,z)M_{L,\overline{(3,\{1\})}}(x,z)+H_2(x,z)=0$，$D_2(x,z)M^2_{L,\overline{(3,\{2\})}}(x,z)+G_1(x,z)M_{L,\overline{(3,\{2\})}}(x,z)+H_2(x,z)=0$。其中：$D_1(x,z)=x^2z^6-2xz^6+xz^5+z^6-2xz^4-z^5+z^4-z^3+z^2$；$D_2(x,z)=x^2z^6-2xz^6+2xz^5+z^6-2xz^4-2z^5+z^4-z^3+z^2$；$H_1(x,z)=x^2z^4-2xz^4+2xz^3+z^4-2xz^2-2z^3+2z^2-2z+1$；$H_2(x,z)=x^2z^4-2xz^4+xz^3+z^4-2xz^2-z^3+z^2-z+1$。

最后解得：$M_{L,\overline{(3,\{0\})}}(x,z)=-\dfrac{G_1(x,z)+\sqrt{F_1(x,z)}}{2D_1(x,z)}=1+xz^2+z^3+(x^2+x+z)z^4+2z^5(2x+1)+z^6(x^3+3x^2+6x+5)+\cdots$，$M_{L,\overline{(3,\{1\})}}(x,z)=-\dfrac{G_2(x,z)+\sqrt{F_1(x,z)}}{2D_1(x,z)}=1+z+(x+z)z^2+(2x+1)z^3+(x^2+4x+1)z^4+(3x^2+6x+2)z^5+\cdots$，$M_{L,\overline{(3,\{2\})}}(x,z)=-\dfrac{G_2(x,z)+\sqrt{F_1(x,z)}}{2D_1(x,z)}=1+z+(x+z)z^2+2(x+1)z^3+(x^2+4x+4)z^4+(3x^2+10x+7)z^5+\cdots$。其中：$G_1(x,z)=(x^3-3x^2+3x-1)z^6+(2x^2-4x+2)z^5+(-3x^2+6x-3)z^4+(-4x+4)z^3+(3x-3)z^2+2z-1$；$G_2(x,z)=(x^3-3x^2+3x-1)z^6+(2x^2-4x+2)z^5+(-3x^2+6x-3)z^4+(-4x+2)z^3+(3x-3)z^2+2z-1$；$F_1(x,z)=G_1{}^2(x,z)-4D_1(x,z)H_1(x,z)=G_2{}^2(x,z)-4D_1(x,z)H_2(x,z)=G_1{}^2(x,z)-4D_2(x,z)H_2(x,z)$。

3　水平步和峰分别避免在给定集合 A 和 B 的 Motzkin 路径

本节将讨论水平步避免在给定集合 A 且峰避免在给定集合 B 时 Motzkin 路径的计数问题。

首先给出移位等价的定义：如果存在非负整数 p 和 q 使得对于所有 $n\in\mathbb{N}$（$\mathbb{N}$ 为非负整数集合），都有 $a_{n+p}=b_{n+q}$ 成立，则称两个序列 $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ 与 $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$ 是移位等价性的。

为了本节描述方便，给出如下符号规定。对任意集合 $A,B \subseteq \mathbb{N}$，$n \in \mathbb{N}$，令 $\tilde{M}_{n,\overline{A},\overline{B}}$ 表示所有水平步避免在集合 A 且所有峰避免在集合 B 的 n-Motzkin 路径集合，记 $\tilde{m}_{n,\overline{A},\overline{B}} := |\tilde{M}_{n,\overline{A},\overline{B}}|$，序列 $\{\tilde{m}_{n,\overline{A},\overline{B}}\}_{n\geqslant 0}$ 的生成函数为 $\tilde{M}_{\overline{A},\overline{B}} = \sum_{n\geqslant 0}\tilde{m}_{n,\overline{A},\overline{B}}z^n$ 有如下定理 4。

定理 4 对任意集合 $A,B \subseteq \mathbb{N}$，$n \in \mathbb{N}$，且 $0 \in A, 1 \notin B, 2 \in B$，有 $\tilde{m}_{n+2,\overline{A},\overline{B}} = \tilde{m}_{n,\overline{A-1},\overline{(B-\{2\})-1}}$。

证明 本文构造一个双射 $\sigma:\tilde{M}_{n+2,\overline{A},\overline{B}} \to \tilde{M}_{n,\overline{A-1},\overline{(B-\{2\})-1}}$ 来证明定理 4。

对任意 $(n+2)$-Motzkin 路径，$P_1 \in \tilde{M}_{n+2,\overline{A},\overline{B}}$，由于 $0 \in A$，故第一步必为 U，最后一步必为 D。首先，删除 P_1 中的第一步 U 和最后一步 D，并将所得路径每一步的高度都降低 1，得到 P_1'，然后将 P_1' 中所有高度为 -1 的山谷 DU 替换成高度为 1 的峰 UD 得到 P_1''（如图 7 所示）。于是，有 $\sigma(P_1) = P_1''$。不难验证 P_1'' 中所有水平步都不在集合 $A-1$，所有峰都不在集合 $(B-\{2\})-1$。

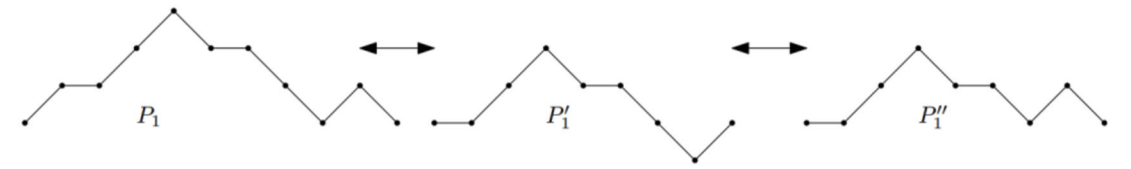


图 7 双射 $\sigma:\tilde{M}_{n+2,\overline{A},\overline{B}} \to \tilde{M}_{n,\overline{A-1},\overline{(B-\{2\})-1}}$

Fig.7 Bijection $\sigma:\tilde{M}_{n+2,\overline{A},\overline{B}} \to \tilde{M}_{n,\overline{A-1},\overline{(B-\{2\})-1}}$

反过来，对任意 n-Motzkin 路径 $P_1'' \in \tilde{M}_{n,\overline{A-1},\overline{(B-\{2\})-1}}$，首先将 P_1'' 中每一个高度为 1 的峰 UD 替换成高度为 -1 的山谷 DU，可得路径 P_1'；然后将 P_1' 中每一步的高度都增加 1，并在所得路径的开始和结束处分别加上一个向上的步 U 和一个向下的步 D（如图 7 所示），从而得到 P_1，因此有 $\sigma(P_1'') = P_1$。不难验证 P_1 的长度为 $n+2$。由于 P_1'' 中可能有高度为 1 的峰，因此有 $2 \in B$。

由定理 4 可知，对任意给定集合 $A,B \subseteq \mathbb{N}$，$n \in \mathbb{N}$，且 $0 \in A, 1 \notin B, 2 \in B$，序列 $\{\tilde{m}_{n,\overline{A},\overline{B}}\}_{n\geqslant 0}$ 和 $\{\tilde{m}_{n,\overline{A-1},\overline{(B-\{2\})-1}}\}_{n\geqslant 0}$ 是移位等价的。

特别地，当 $A = \{0\}$ 且 $B = \varnothing$ 时，$\tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\varnothing}} = R$，即所有 Riordan 路径的集合。接下来考虑 $A = \{0\}, B = \{1\}$，或者 $A = \{0\}, B = \{2\}$ 的情况。

为了得到 $\tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\{1\}}}(z)$ 和 $\tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\{2\}}}(z)$，需要 $M(z)$ 和 $M_{P,\overline{\{1\}}}(z)$。回顾 Motzkin 路径的生成函数为

$$M(z) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z^2}。\tag{11}$$

而 $M_{P,\overline{\{1\}}}(z)$ 为峰避免在集合 $\{1\}$ 的 Motzkin 路径的生成函数，类似定理 3 的证明过程，不难得到 $M_{P,\overline{\{1\}}}(z) = 1 + zM_{P,\overline{\{1\}}}(z) + z^2(M(z) - 1)M_{P,\overline{\{1\}}}(z)$，即有 $M_{P,\overline{\{1\}}} = \frac{1}{1 - z - z^2(M(z) - 1)}$，进而得

$$M_{P,\overline{\{1\}}}(z) = \frac{1 - z + 2z^2 - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z^2(z^2 - z + 2)}。\tag{12}$$

可见 OEIS[11] 中 A089372。

例 3　当 $A = \{0\}, B = \{1\}$，或者 $A = \{0\}, B = \{2\}$ 时，$\tilde{M}_{\overline{A},\overline{B}}(z)$ 对应的生成函数为：$\tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\{1\}}}(z) = \dfrac{1 + z + 2z^2 - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z(z^3 + z^2 + 2z + 1)}$，$\tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\{2\}}}(z) = \dfrac{3 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2}$。

证明　本文用两种不同方法证明。

方法一：首先设 $A = \{0\}, B = \{1\}$。对任意 n-Motzkin 路径 P，有 $\tilde{M}_{0,\overline{\{0\}},\overline{\{1\}}} = \tilde{M}_{0,\overline{\{0\}},\overline{\{1\}}} = \varnothing$。现假设 $P \in \tilde{M}_{n,\overline{\{0\}},\overline{\{1\}}}$ 且 $n \geqslant 1$。因为路径 P 的水平步避免的集合为 $A = \{0\}$，故 P 的第一步只能为上升步 U，则 $P = UP_1DP_2$（如图 8 所示）。其中：$P_2 \in \tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\{1\}}}$；$P_1$ 为 Motzkin 路径且 $P_1 \neq \varnothing$。又因为 P 的峰避免的集合为 $B = \{1\}$，可得 $\tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\{1\}}}(z) = 1 + z^2(M(z) - 1)\tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\{1\}}}(z)$。

现设 $A = \{0\}, B = \{2\}$。假设 $P \in \tilde{M}_{n,\overline{\{0\}},\overline{\{2\}}}$ 且 $n \geqslant 1$。因为路径 P 的水平步避免的集合为 $A = \{0\}$，故 P 第一步只能为上升步 U，则 $P = UP_1DP_2$（如图 9 所示）。其中：$P_1 \in M_{P,\overline{\{1\}}}$；$P_2 \in \tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\{2\}}}$。又因为 P 的峰避免的集合为 $B = \{2\}$，故 P_1 的峰避免的集合为 $\{1\}$，可得 $\tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\{2\}}}(z) = 1 + z^2 M_{P,\overline{\{1\}}}\tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\{2\}}}(z)$。

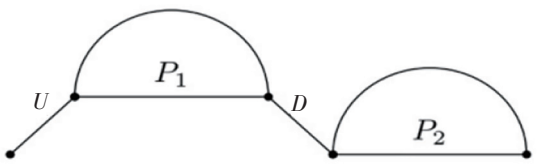


图 8　水平步避免在集合{0}且峰避免在集合{1}的 Motzkin 路径

Fig.8　Motzkin paths avoiding levels in {0} and peaks in {1}

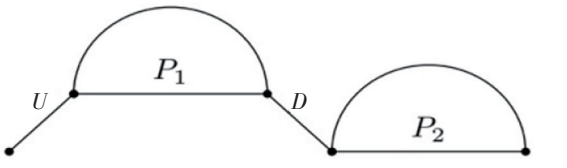


图 9　水平步避免在集合{0}且峰避免在集合{2}的 Motzkin 路径

Fig.9　Motzkin paths avoiding levels in {0} and peaks in {2}

将上述式子整理后，可得：

$$\tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\{1\}}}(z) = \frac{1}{1 - z^2(M(z) - 1)}，\tag{13}$$

$$\tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\{2\}}}(z) = \frac{1}{1 - z^2 M_{P,\overline{\{1\}}}}。\tag{14}$$

再将式（11）和式（12）代入式（13）和式（14），由定理 4 可知例 3 结果成立。

方法二：首先设 $A = \{0\}, B = \{1\}$。对任意 n-Motzkin 路径 $P \in \tilde{M}_{n,\overline{\{0\}},\overline{\{1\}}}$，因为路径 P 的水平步避免的集合为 $A = \{0\}$，故 P 第一步只能为上升步 U。假设路径 P 中间返回了 k 次 x 轴。其中：$k \geqslant 1$，含最后返回点 $(n,0)$。对于任意 $i, 1 \leqslant i \leqslant k$，记第 i 次离开 x 轴到下一次返回 x 轴为路径 P_i'，则有 $P = P_1'P_2'\cdots P_k' = UP_1DUP_2D\cdots UP_kD$。其中：$P'_i = UP_iD$；$P_i$ 为 Motzkin 路径且 $P_i \neq \varnothing$。因为 P 的峰避免的集合为 $B = \{1\}$，则 P_i 的

生成函数为 $M(z)-1$。因此

$$\tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\{1\}}}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[z^2\left(M_{P,\overline{\{1\}}}(z)\right)\right]^k=\frac{1}{1-z^2\left[M(z)-1\right]}。\tag{15}$$

现设 $A=\{0\}$，$B=\{2\}$。对任意 n-Motzkin 路径 $P\in\tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\{2\}}}$，类似于 $\tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\{1\}}}$ 的讨论，有 $P=P'_1P'_2\cdots P'_k=UP_1DUP_2D\cdots UP_kD$。其中：$P'_i=UP_iD$；$P_i\in M_{P,\overline{\{1\}}}$。又因为 P 的峰不能在集合 $B=\{2\}$，所以有

$$\tilde{M}_{\overline{\{0\}},\overline{\{2\}}}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[z^2\left(M_{P,\overline{\{1\}}}(z)\right)\right]^k=\frac{1}{1-z^2M_{P,\overline{\{1\}}}(z)}。\tag{16}$$

最后将式（11）和式（12）代入式（15）和式（16），由定理 4 可知例 3 结果成立。

4 结论

本文首先得到了 $M_{P,\bar{O}(x,z)}$，$M_{P,\bar{E}(x,z)}$，$M_{L,\bar{O}(x,z)}$ 和 $M_{L,\bar{E}(x,z)}$ 的显式表达式，然后给出了 $M_{L,\bar{A}(x,z)}$ 的递推关系，以及 $M_{L,\bar{A}(x,z)}$ 和 $M_{L,\overline{(k,(I))}(x,z)}$ 的连分式，最后证明了水平步的高度避免在给定集合且峰的高度避免在给定集合的 Motzkin 路径的移位等价性。

格路径中关于峰、谷、水平步等的高度避免在任意给定集合的研究受到了广泛的关注。对于给定的特殊集合或者任意给定的集合，一方面可研究 Dyck 路径、Motzkin 路径、Schröder 路径等路径相关生成函数的解析式、递推关系、连分式等；另一方面针对上述相关生成函数，可以进一步研究其系数序列的组合解释、递推关系、单峰性、对数凹凸性等代数性质。

[参考文献]

[1]PUDWELL L. Catalan numbers and permutations[J]. Mathematics Magazine,2024,97(3):279-283.

[2]MOHANTY S G. Lattice path counting and applications[M]. New York:Academic Press,1979.

[3]NARAYANA T V. Lattice path combinatorics with statistical applications[M]. Toronto:Universtity of Toronto Press,1979.

[4]BERNHART F R. Catalan,Motzkin and Riordan numbers[J]. Discrete Mathematics,1999,204(1):73-112.

[5]DONAGHEY R,SHAPIRO L W. Motzkinnumbers[J]. Journal of Combinatorial Theory,SeriesA,1977,23(3):291-301.

[6]DEUTSH E. Dyck path enumeration[J]. Discrete Mathematics,1999,204(1):167-202.

[7]PEART P,WOAN W J. Dyck paths with no peaks at height k[J]. Journal of Integer Sequences,2001,4(1):01.1.3.

[8]MANSOUR T. Counting peaks at height kina Dyck path[J]. Journal of Integer Sequences,2002,5(2):02.1.1.

[9]EU S P,LIU S C,YEH Y N. Dyck paths with peaks avoiding or restricted to a given set[J]. Studiesin Applied Mathematics,2003,111(4):453-465.

[10]LIU S C,MA J,YEH Y N. Dyck paths with peak-and valley-avoiding sets[J]. Studiesin Applied Mathematics,2008,121(3):263-289.

[11]Sloane N J A. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences[J]. Notices of the American Mathematical Society,2018,65(9):1062-1074.

[12]CALLAN D. Some bijections for lattice paths[EB/OL]. (2021-12-13)[2024-10-27]. https://arxiv.org/abs/2112.05241.

[13]FLAJOLET P. Combinatorial aspects of continued fractions[J]. Discrete Mathematics,1980,32(2):125-161.

（责任编辑 彭海滨 英文审校 黄振坤）