[引用格式]胡烜睿,陈阳. 亚循环群上凯莱图的谱及特征空间[J]. 集美大学学报(自然科学版),2026,31(3):363-367.
DOI:10.19715/j.jmuzr.2026.03.10.

亚循环群上凯莱图的谱及特征空间

胡烜睿，陈 阳

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 基于群扩张的代数学观点，利用子群和商群的正规凯莱图构造分裂亚循环群上一类非正规的凯莱图，进而由邻接矩阵张量积的分析给出此类图的谱及特征空间，最终将其应用到该图的电阻距离及Kirchhoff指标的计算。

[关键词] 亚循环群；凯莱图；谱；电阻距离；Kirchhoff指标

[中图分类号]O 157.5 [文章编号]1007－7405(2026)03－0363－05 DOI:10.19715/j.jmuzr.2026.03.10

Spectra and Eigenspaces of Cayley Graphs over Metacyclic Groups

HU Xuanrui, CHEN Yang

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: Based on the algebraic viewpoint of group extension, a class of non-normal Cayley graphs over split metacyclic groups is constructed by using the normal Cayley graphs of subgroups and quotient groups. Then, the spectra and eigenspaces of such graphs are explicitly given by analyzing the tensor product of adjacency matrices. Finally, these results are applied to calculate the resistance distances and Kirchhoff index.

Keywords: metacyclic group; Cayley graph; spectrum; resistance distance; Kirchhoff index

0 引言

图的谱及特征空间是重要的代数不变量，它们广泛应用于物理学、概率论和计算机等领域，而图论学者一般更加关注具有强对称性的图的谱和特征空间。Lovász[1]利用群特征标确定了具有传递自同构群的图的谱。Babai[2]同样地利用群表示理论给出了凯莱图谱的更简便的公式。值得一提的是，凯莱着色图的邻接矩阵是特殊群矩阵的转置，而它的特征多项式就是Frobenius[3-4]提出的群行列式。由此，能够利用Frobenius行列式定理来分析凯莱着色图的谱。如果凯莱图的生成集是共轭闭的，即群共轭类的并，那么称凯莱图是正规的（normal）。许英[5]给出了Abel群上凯莱图的谱。Diaconis等[6]以及Zieschang[7]分别利用群的不可约特征标得到了正规凯莱图谱的公式。Ghandehari等[8]给出

[收稿日期] 2024－11－28
[基金项目] 国家自然科学基金项目（12271210）
[通信作者] 陈阳，讲师，从事不变量及李理论研究，E-mail:ychen1729@jmu.edu.cn

了正规凯莱图的特征空间。然而，目前关于非正规凯莱图的结果很少，仅仅局限于对特定群（如二面体群、双循环群以及半二面体群）上的非正规凯莱图谱的研究。Cao 等[9]给出了二面体群上凯莱图的谱及特征空间，并将其应用于完美态传递问题。Huang[10]又将二面体群上凯莱图的谱及特征空间应用于电阻距离的计算。Yang 等[11]给出了双循环群和半二面体群上凯莱图的谱及特征空间，并将其应用于随机游走、电阻距离和 Kirchhoff 指标的计算。Rajeevsarathy 等[12]分析了分裂亚循环群上的一类四度凯莱图的谱。本文主要目的是构造分裂亚循环群上的一类非正规凯莱图，并给出此类图的谱及特征空间。最后，得到了这类图的电阻距离和 Kirchhoff 指标的计算公式。

1 预备知识

首先回顾一些基本定义及相关结论。令 $\mathbf{C}$ 表示复数域。着色图 $\Gamma=(V;c)$ 是由顶点集 $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$ 和着色函数 $c:V\times V\to\mathbf{C}$ 组成。着色函数为图的每条有向边关联一种颜色，而无边可以被理解为关联颜色 0 的边。Γ 的邻接矩阵被定义为 $\boldsymbol{A}(\Gamma)=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$，$a_{ij}=c(v_i,v_j)$。图 Γ 的谱和特征空间就是指它的邻接矩阵的谱和特征空间。给定群 G 和函数 $\alpha:G\to C$，凯莱着色图 $\Gamma(G;\alpha)$ 的顶点集为 $V(\Gamma)=G$，着色函数为 $c(g,g')=\alpha(g'g^{-1}),g,g'\in G$。如果 $\alpha(g)\in\{0,1\},\forall g\in G$ 且集 $S=\{g|\alpha(g)=1\}$ 生成 G，则 Γ 被称为群 G 的凯莱有向图，记作 $\Gamma(G,S)$。当 S 是逆闭的（即 $S=S^{-1}$）和不含群单位元时，$\Gamma(G,S)$ 是对称的且不含自环，这就是通常意义下的凯莱图。在群论中，如果群 G 有短正合列 $1\to K\to G\to H\to 1$，其中 K 和 H 都是循环群，则称 G 是亚循环群。若短正合列是分裂的，则群 G 是分裂亚循环群，即是 K 和 H 的半直积 $G=K\rtimes H$。二面体群、半二面体群和双循环群都是亚循环群的特例。本文主要关注分裂亚循环群上的凯莱图。下面的引理是已知的。

引理 1 设 $\boldsymbol{X}=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 和 $\boldsymbol{Y}=(b_{ij})_{i,j=1}^{m}$ 均为可对角化的矩阵，若它们的特征值分别为 λ_i 和 μ_j，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{u}_i$ 和 $\boldsymbol{w}_j$，$1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m$，令 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}a_{11}\boldsymbol{Y} & a_{12}\boldsymbol{Y} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{Y}\\ a_{21}\boldsymbol{Y} & a_{22}\boldsymbol{Y} & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{Y}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}\boldsymbol{Y} & a_{n2}\boldsymbol{Y} & \cdots & a_{nn}\boldsymbol{Y}\end{pmatrix}$，则矩阵 $\boldsymbol{T}$ 可对角化且它的特征值为 $\lambda_i\mu_j$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{w}_j,1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m$。

引理 2 设 $\boldsymbol{C}\in M_{n\times n}(\mathbf{C})$ 表示循环矩阵，即 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1}\\ c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}$ 的特征值为 $\lambda_t=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\omega^{it}$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{u}_t=\frac{1}{\sqrt{n}}(1,\omega^t,\omega^{2t},\cdots,\omega^{(n-1)t})^{\mathrm{T}}$。其中：$t=0,1,\cdots,n-1$；$\omega$ 是 n 次本原单位根 j；T 表示转置。

推论 1　设 C_n 是由 a 生成的 n 阶循环群，α 是 C_n 上的群函数，则凯莱着色图 $\Gamma(C_n;\alpha)$ 的谱为 $\lambda_t = \sum_{i=0}^{n-1}\alpha(a^i)\omega^{it}$，对应的特征空间为 $\boldsymbol{u}_t = \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\omega^t,\omega^{2t},\cdots,\omega^{(n-1)t})^{\mathrm{T}}$。其中：$t = 0,1,\cdots,n-1$；$\omega$ 是 n 次本原单位根。

2　分裂亚循环群上非正规凯莱图的谱及特征空间

将给出分裂亚循环群上一类凯莱图的谱及特征空间，而此类图包含许多非正规的凯莱图，下面是主要结果：

定理 1　设群 G 是分裂亚循环群，即 $G = C_m \rtimes C_n$，其中 C_m 和 C_n 分别是由 a 和 b 生成的 m 阶和 n 阶循环群，且 G 上的函数 α 满足 $\alpha(b^j a^k b^{-i}) = \alpha(b^{j-i}a^k), 0 \leqslant i,j < n, 0 \leqslant k < m$，则凯莱着色图 $\Gamma(G;\alpha)$ 的谱为 $\mu_{rt} = \sum_{i=0}^{n-1} w_n^{ri}\sum_{j=0}^{m-1}\alpha(b^i a^j)\omega_m^{jt}$，对应的特征空间为 $u_{rt} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\omega_n^r,\cdots,\omega_n^{r(n-1)}) \otimes \frac{1}{\sqrt{m}}(1,\omega_m^t,\cdots,\omega_m^{t(m-1)})$。其中：$0 \leqslant r < n, 0 \leqslant t < m$；且 ω_n 和 ω_m 分别是 n 次和 m 次本原单位根。

证明　将凯莱着色图 $\Gamma(G;\alpha)$ 的点集排列如下：$e,a,\cdots,a^{m-1}$；$b,ba,\cdots,ba^{m-1};\cdots;b^{n-1},b^{n-1}a,\cdots,b^{n-1}a^{m-1}$。则邻接矩阵是一个分块矩阵

$$\boldsymbol{A}(\Gamma(G;\alpha)) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}(\Gamma(C_m;\beta_{00})) & \boldsymbol{A}(\Gamma(C_m;\beta_{01})) & \cdots & \boldsymbol{A}(\Gamma(C_m;\beta_{0,n-1})) \\ \boldsymbol{A}(\Gamma(C_m;\beta_{10})) & \boldsymbol{A}(\Gamma(C_m;\beta_{11})) & \cdots & \boldsymbol{A}(\Gamma(C_m;\beta_{1,n-1})) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}(\Gamma(C_m;\beta_{n-1,0})) & \boldsymbol{A}(\Gamma(C_m;\beta_{n-1,1})) & \cdots & \boldsymbol{A}(\Gamma(C_m;\beta_{n-1,n-1})) \end{pmatrix}。$$

其中：$\beta_{ij}(a^k) = \alpha(b^j a^k b^{-i})$，$i,j = 0,1,\cdots,n-1$；而 $\boldsymbol{A}(\Gamma(C_m;\beta_{ij}))$ 表示点集 $b^i,b^i a,\cdots,b^i a^{m-1}$ 和点集 $b^j,b^j a,\cdots,b^j a^{m-1}$ 的邻接关系。对于任意 $0 \leqslant k < m$，有 $\beta_{ij}(a^k) = \alpha(b^j a^k b^{-i}) = \alpha(b^{j-i}a^k) = \beta_{0,j-i}(a^k)$。这说明邻接矩阵是块循环矩阵，即 $\boldsymbol{A}(\Gamma(G;\alpha)) = \sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{P}^i \otimes \boldsymbol{A}(\Gamma(C_m;\beta_{0i}))$。其中 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$。

令 $\boldsymbol{Q}_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_x & \omega_x^2 & \cdots & \omega_x^{x-1} \\ 1 & \omega_x^2 & \omega_x^4 & \cdots & \omega_x^{2(x-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_x^{x-1} & \omega_x^{2(x-1)} & \cdots & \omega_x^{(x-1)(x-1)} \end{pmatrix} \in M_{x\times x}(\mathbf{C})$。其中：$\omega_x$ 是 x 次本原单位

根。由引理 1 和推论 1 有 $(Q_n \otimes Q_m)^{-1}\boldsymbol{A}(\Gamma(G;\alpha))(Q_n \otimes Q_m) = \sum_{i=0}^{n-1}(Q_n^{-1}\boldsymbol{P}^i Q_n \otimes Q_m^{-1}\boldsymbol{A}(\Gamma(C_m;\beta_{0i}))Q_m) = \sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{\Lambda}(1,\omega_n^i,\omega_n^{2i},\cdots,\omega_n^{(n-1)i}) \otimes \boldsymbol{\Lambda}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-1})$。其中：$\lambda_t = \sum_{j=0}^{m-1}\beta_{0i}(a^j)\omega_m^{jt}$，$t = 0,\cdots,m-1$。所以 $\Gamma(G;\alpha)$ 的谱为 $M_{rt} = \sum_{i=0}^{n-1}\omega_n^{ri}\lambda_t$，且对应的特征空间为 $U_{rt} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\omega_n^r,\cdots,\omega_n^{r(n-1)}) \otimes \frac{1}{\sqrt{m}}(1,\omega_m^t,\cdots,\omega_m^{t(m-1)})$。其中：$0 \leqslant r < n$；$0 \leqslant t < m$；且 ω_n 和 ω_m 分别是 n 次和 m 次本原单位根。

推论 2 设群 G 是分裂亚循环群，即 $G = C_m \rtimes C_n$。其中 C_m 和 C_n 分别是由 a 和 b 生成的 m 阶和 n 阶循环群。令 $S = S_0 \cup bS_1 \cup \cdots \cup b^{n-1}S_{n-1}, S_i \subseteq C_m, bS_ib^{-1} \subseteq S_i, i = 0,\cdots,n-1$，且 S 生成 G，则凯莱有向图 $\Gamma(G,S)$ 的谱为 $\mu_{rt} = \sum_{i=0}^{n-1}(\omega_n^{ri}\sum_{a^j \in S_i}\omega_m^{jt})$，对应的特征空间为 $u_{rt} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\omega_n^r,\cdots,\omega_n^{r(n-1)}) \otimes \frac{1}{\sqrt{m}}(1,\omega_m^t,\cdots,\omega_m^{t(m-1)})$。其中：$0 \leqslant r < n$；$0 \leqslant t < m$；且 ω_n 和 ω_m 分别是 n 次和 m 次本原单位根。

证明 凯莱有向图 $\Gamma(G,S)$ 的群函数为 $\alpha(g) = \begin{cases}1, g \in S,\\ 0, g \notin S。\end{cases}$ 因为 $bS_ib^{-1} \subseteq S_i, i = 0,\cdots,n-1$，所以 $\alpha(b^ja^kb^{-i}) = \alpha(b^{j-i}b^ia^kb^{-i}) = \alpha(b^{j-i}a^k), 0 \leqslant i,j < n, 0 \leqslant k < m$。故命题得证。

注意，利用推论 2 可以得到许多非正规凯莱图的谱和特征空间。例如，假设 $G = D_6 = C_3 \rtimes C_2 = < t > \rtimes < s >$，$S = \{t,t^{-1},s\}$，则凯莱有向图 $\Gamma(G,S)$ 满足推论 2 的条件，但 S 不是共轭闭的，即 $\Gamma(G,S)$ 是非正规的凯莱图。

3 电阻距离及 Kirchhoff 指标的计算

在这一节中，仅考虑单连通图 $\Gamma(V,E)$，其中 $V = \{v_1,\cdots,v_n\}$ 是点集和 E 是边集。而 $\Gamma(V,E)$ 的邻接矩阵为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$，其中 $a_{ij} = \begin{cases}1, & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 相邻},\\ 0, & \text{否则}。\end{cases}$ 令 $\boldsymbol{D}$ 是 Γ 的点度对角矩阵，则 Γ 的拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}$ 被定义为 $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$。如果将 Γ 中的边看成单位电阻，那么图中任意两点的等效电阻被定义为这两点的电阻距离。自从 1993 年 Klein 等[13]明确指出电阻距离是图上的距离函数以来，它就成为图论领域的一个重要研究对象。而 Kirchhoff 指标被定义为图中所有两点间电阻距离的和，它是基于电阻距离定义的化学分子拓扑指标。用 $\mu_0 \leqslant \mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_{n-1}$ 表示 $\boldsymbol{L}$ 的特征值，$\boldsymbol{u}_0,\cdots,\boldsymbol{u}_{n-1}$ 表示对应的标准正交特征向量，且令 $u_k = (u_{k1},u_{k2},\cdots,u_{kn})^{\mathrm{T}}$。图 $\Gamma(V,E)$ 连通当且仅当 $\mu_0 = 0$ 且 $\mu_k > 0, k > 1$。Klein[14]利用拉普拉斯矩阵的特征值和特征向量给出了电阻距离和 Kirchhoff 指标的计算公式。

引理 3 单连通图 $\Gamma(V,E)$ 中两点 v_i 和 v_j 的电阻距离为 $R(v_i,v_j) = \sum_{k=1}^{|V|-1}\frac{1}{\mu_k}|u_{ki} - u_{kj}|^2$。

其中 $|\cdot|$ 表示复数的模。

引理 4　单连通图 $\Gamma(V,E)$ 的 Kirchhoff 指标为 $\mathrm{Kf}(\Gamma(V,E)) = |V|\sum_{k=1}^{|V|-1}\frac{1}{\mu_k}$。特别地，若图 $\Gamma(V,E)$ 为 k-正则图，且其邻接矩阵的特征值为 $\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n-1}$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{n-1}$，那么其拉普拉斯矩阵的特征值为 $0 = k-\lambda_0 \leqslant k-\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant k-\lambda_{n-1}$，对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{n-1}$。利用推论 2、引理 3 和引理 4，很容易计算分裂亚循环群上此类凯莱图中任意两点的电阻距离及 Kirchhoff 指标。

定理 2　设群 G 是分裂亚循环群，即 $G = C_m \rtimes C_n$。其中 C_m 和 C_n 分别是由 a 和 b 生成的 m 阶和 n 阶循环群。令 $S = S_0 \cup bS_1 \cup \cdots \cup b^{n-1}S_{n-1}, S = S^{-1}, S_i \subseteq C_m, bS_ib^{-1} \subseteq S_i$，$i = 0,\cdots,n-1$，且 S 不含群单位元并生成 G。那么凯莱图 $\Gamma(G,S)$ 中两点 b^ia^j 与 $b^{i'}a^{j'}$ 的电阻距离为 $R(b^ia^j,b^{i'}a^{j'}) = \sum_{\substack{0\leqslant r<n\\0\leqslant t<m\\(r,t)\neq(0,0)}}\frac{1}{mn(|S|-\sum_{i=0}^{n-1}(\omega_n^{ri}\sum_{a_j\in S_i}\omega_m^{jt}))}\cdot|\omega_n^{ri}\omega_m^{tj}-\omega_n^{ri'}\omega_m^{tj'}|^2$，Kirchhoff 指数为 $\mathrm{Kf}(\Gamma(G,S)) = mn\sum_{\substack{0\leqslant r<n\\0\leqslant t<m\\(r,t)\neq(0,0)}}\frac{1}{(|S|-\sum_{i=0}^{n-1}(\omega_n^{ri}\sum_{a_j\in S_i}\omega_m^{jt}))}$。

[参考文献]

[1] LOVÁSZ L. Spectra of graphs with transitive groups[J]. Period Math Hunger,1975,6(2):191-195.

[2] BABAI L. Spectra of Cayley graphs[J]. J Combin Theory Ser B,1979,27(2):180-189.

[3] FROBENIUS G. Über Gruppencharaktere[J]. Sitzungsber Preuss Akad Wiss Berlin,1896:985- 1021.

[4] FROBENIUS G. Über die Primfactoren der Gruppendeterminante[J]. Sitzungsber Preuss Akad Wiss Berlin,1896:1343-1382.

[5] 许英. Abel 群上 Cayley 图的谱[D]. 乌鲁木齐:新疆大学,2007.

[6] DIACONIS P,SHAHSHAHANI M. Generating a random permutation with random transpositions[J]. Z Wahrsch Verw Gebiete,1981,57(2):159-179.

[7] ZIESCHANG P. Cayley graphs of finite groups[J]. Journal of Algebra,1988,118(2):447-454.

[8] GHANDEHARI M,GUILLOT D,HOLLINGSWORTH K. Gabor-type frames for signal processing on graphs[J]. The Journal of Fourier Analysis and Applications,2021,27(2):14-15.

[9] CAO X,CHEN B,LING S. Perfect state transfer on Cayley graphs over dihedral groups:the non-normal case[J]. Electron J Combin,2020,27(2):27.

[10] HUANG J. Resistance distance and Kirchhoff index in dihedral Cayley graphs[J]. Discrete Applied Mathematics,2022,307:125-134.

[11] YANG J,WU Y,FENG L,et al. Hitting time,resistance and Kirchoff index of Cayley graphs over dicyclic and semi-dihedral groups[J]. Applied Mathematics and Computation,2023,448:127948.

[12] RAJEEVSARATHY K,SARKAR S,LAKSHMIVARAHAN S,et al. Spectral properties of Cayley graphs of split metacyclic groups[J]. Journal of the Ramanujan Mathematical Society,2020,35(2):159-175.

[13] KLEIN D J,RANDIC M. Resistance distance[J]. Journal of Mathematical Chemistry,1993,12(1):81-95.

[14] KLEIN D J. Graph geometry,graph metrics and Wiener[J]. MATCH Commun Math Comput Chem,1997,35:7-27.

(责任编辑　彭海滨　英文审校　黄振坤)