

两层时滞网络的混合控制同步策略

卢佳华, 宾红华

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究具有时滞的两层网络的层间同步问题。针对该模型, 分别提出混合脉冲控制和混合自适应控制2种不同的混合控制策略。通过构造李雅普诺夫函数和运用不等式技巧, 得到具有时滞动态节点的两层网络同步的充分条件, 改进已有的两层网络同步的研究。最后, 给出了数值模拟来验证所得结论的正确性。

[关键词] 两层网络; 混合脉冲控制; 混合自适应控制; 牵制控制

[中图分类号] O 193

Hybrid Control Synchronization Strategies for Two-Layer Time-Delay Networks

LU Jiahua, BIN Honghua

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The problem of inter-layer synchronization in two-layer networks with time delay was investigated. For this model, two different hybrid control strategies called hybrid impulse control and hybrid adaptive control were proposed. By constructing the Lyapunov function and using the inequality technique, the sufficient conditions for the synchronization of two-layer networks with time-delay dynamic nodes were obtained, and the existing research on the synchronization of two-layer networks was improved. Finally, numerical simulations were given to verify the correctness of the conclusions obtained.

Keywords: two-layer networks; hybrid impulse control; hybrid adaptive control; pinning control

0 引言

一般来说, 网络中节点之间的交互作用可以通过外部连续和不连续的控制或耦合关系来实现同步^[1-8]。与连续控制相比, 不连续控制在一定程度上节省了时间和金钱, 在实践应用中更为广泛, 如牵制控制^[9]、事件触发控制^[10]、采样数据控制^[11]、脉冲控制^[12-13]、自适应控制^[14-15]等。近年来, 有学者对复杂网络的同步控制方法进行了研究, 他们不仅研究单一控制器, 还研究了混合控制器来实现网络的同步, 如混合脉冲控制下时变时滞复值神经网络的指数同步问题^[16]。

在现实生活中, 大多数网络都不是单层网络, 而是之间有相互联系的多层网络, 比如交通网与互联网、生活中的人际关系网、微信朋友圈之间的网络等。在很多研究中, 学者们提出了符合实际特点的多层复杂网络模型^[17], 其中包括两层网络模型^[8,15,18]。多层网络同步可分为层内同步和层间同步, 文献[18]探索了层内不同拓扑, 以及层间、层内和层间不同内部耦合模式的两层网络中的层内同

[收稿日期] 2021-07-20

[基金项目] 福建省自然科学基金项目(2019J01330)

[作者简介] 第一作者: 卢佳华, 从事复杂网络分析与控制研究。通信作者: 宾红华, 教授, 从事复杂网络分析与控制研究。E-mail: hbin@jmu.edu.cn

http://xuebaobangong.jmu.edu.cn/zkb

步。层间同步又称为外部同步,即驱动网络与响应网络之间的同步。外部同步越来越受到科学与工程各个领域学者的关注。文献[19]利用脉冲控制方法研究了具有耦合延迟和节点延迟的复杂网络的外部同步问题,得到了外部同步的一些充分条件。众所周知,层间的相互作用使得层间同步比层内同步更为复杂,因此,层间同步的研究具有挑战性。通过查阅文献发现,单层网络在脉冲控制下已经被学者们广泛研究。文献[20]研究了混合脉冲控制下的神经网络同步问题。近年来,两层网络作为一种特殊的多层网络应用广泛,如社会沟通、互联网等引起了很多研究人员的关注^[21-22]。文献[21]研究了基于变量替代控制的两层网络层间同步问题。文献[22]研究了具有多链路和时延的两层非线性耦合多路网络的簇同步问题。然而,对于具有时滞动态节点的双层网络的混合控制问题很少有人关注。因此,本文采用混合脉冲控制和混合自适应控制的方法研究了两层时滞网络的同步问题。

1 模型描述及预备知识

考虑如下具有时滞的驱动层网络

$$\begin{cases} \dot{x}_j(t) = f(x_j(t), x_j(t-\tau)) + c \sum_{k=1}^N a_{jk} \Gamma(x_k(t)), t \geq t_0 \geq 0, \\ x_j(t_0 + s) = \varphi_j(s), s \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $j=1,2,\dots,N$; $x_j(t) \in \mathbf{R}^n$ 是第 j 个节点的状态向量,其范数定义为 2-范数(下同); $f(\cdot) \in \mathbf{R}^n$ 是连续函数,第 j 个节点自身的动力学行为; $c>0$ 是耦合强度; 正定矩阵 $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ 表示内耦合矩阵。矩阵 $A = (a_{jk})_{N \times N}$ 是外耦合矩阵,反映了网络的拓扑结构,如果节点 k 和节点 $j(k \neq j)$ 有连接,那么 $a_{jk} = 1$, 否则, $a_{jk} = 0$ 。矩阵 A 的对角元素满足 $a_{jj} = -\sum_{k=1, k \neq j}^N a_{jk}, j=1,2,\dots,N$ 。

$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))^T, \varphi(t) \in \text{PC}([-\tau, 0], \mathbf{R}^n)$ 代表分段右连续函数集。 $\varphi(t): [-\tau, 0] \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的范数定义为 $\|\varphi\|_\tau = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \|\varphi(s)\|$ 。

为了得到两层时滞网络同步的结论,将具有时滞的复杂网络

$$\begin{cases} \dot{y}_j(t) = f(y_j(t), y_j(t-\tau)) + c \sum_{k=1}^N a_{jk} \Gamma(y_k(t)) + u(x_j(t), y_j(t)), t \geq t_0 \geq 0, \\ y_j(t_0 + s) = \varphi_j(s), s \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (2)$$

作为响应层网络,其中 $u(x_j(t), y_j(t)) \in \mathbf{R}^n$ 是第 j 个节点的控制器。

接下来设计一个混合的脉冲控制器

$$u(x_j(t), y_j(t)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty} \delta(t-t_i)(y_i(t) - x_j(t))K_{ji} + d_j(x_j(t) - y_j(t)), 1 \leq j \leq l, \\ d_j(x_j(t) - y_j(t)), l+1 \leq j \leq N. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\sum_{i=1}^{+\infty} \delta(t-t_i)(y_i(t) - x_j(t))K_{ji}$ 表示脉冲控制器, $i=1,2,3,\dots$; K_{ji} 表示在脉冲时刻 t_i 的跳跃参数,满足 $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots$, 且 $\lim_{i \rightarrow +\infty} (t_i) = +\infty$; $\delta(\cdot)$ 表示狄拉克 δ 函数,满足 $\delta(t-h) = 0(t \neq h)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-h)dt = 1$; $d_j(x_j(t) - y_j(t))$ 表示状态控制输入,且 $d_j > 0$ 表示牵制控制第 j 个节点。故响应层网络(2)可以改写为

$$\begin{cases} \dot{y}_j(t) = f(y_j(t), y_j(t-\tau)) + c \sum_{k=1}^N a_{jk} \Gamma y_k(t) + d_j(x_j(t) - y_j(t)), t \neq t_i, \\ \Delta y_j(t_i) = y_j(t_i) - y_j(t_i^-) = K_{ji}(y_j(t_i^-) - x_j(t_i^-)), t = t_i, 1 \leq j \leq l, \\ \dot{y}_j(t) = f(y_j(t), y_j(t-\tau)) + c \sum_{k=1}^N a_{jk} \Gamma y_k(t) + d_j(x_j(t) - y_j(t)), l+1 \leq j \leq N, \\ y_j(t_0 + s) = \psi_j(s), t \geq t_0 \geq 0, s \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (4)$$

令 $e_j(t) = y_j(t) - x_j(t)$, 则误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_j(t) = f(e_j(t), e_j(t - \tau)) + c \sum_{k=1}^N a_{jk} \Gamma e_k(t) - d_j e_j(t), t \neq t_i, \\ \Delta e_j(t_i) = e_j(t_i) - e_j(t_i^-) = K_{ji} e_j(t_i^-), t = t_i, 1 \leq j \leq l, \\ \dot{e}_j(t) = f(e_j(t), e_j(t - \tau)) + c \sum_{k=1}^N a_{jk} \Gamma e_k(t) - d_j e_j(t), l+1 \leq j \leq N, t \geq t_0 \geq 0, \\ e_j(t_0 + s) = \psi_j(s) - \varphi_j(s), s \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (5)$$

其中, $f(e_j(t), e_j(t - \tau)) = f(y_j(t), y_j(t - \tau)) - f(x_j(t), x_j(t - \tau))$ 。

为了研究同步问题, 首先需要引入以下定义、假设和引理。

定义 1 对于具有时滞的两层网络, 若 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y_j(t) - x_j(t)\| = 0$, 则称此两层网络达到同步。

假设 1^[23] 对于 $\forall x_j, y_j, x_j(t - \tau), y_j(t - \tau) \in \mathbf{R}^n, x_j(t) \neq y_j(t), x_j(t - \tau) \neq y_j(t - \tau), j = 1, 2, \dots, N$, 存在非负常数 ρ_j , 使得 $|f(y_j(t), y_j(t - \tau)) - f(x_j(t), x_j(t - \tau))| \leq \rho_j (|y_j(t) - x_j(t)| + |y_j(t - \tau) - x_j(t - \tau)|)$, 其中 $j = 1, 2, \dots, N$ 。

引理 1^[24] 对于任意两个 n 维实向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} , 则有不等式 $\mathbf{x}^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \mathbf{y}^T \mathbf{y}$ 成立。

引理 2^[25] 对于 $-\infty < t_0 < b \leq +\infty$, 假设 $v_j(t) \in C([t_0, b])$, $j = 1, 2, \dots, N$, 满足积分不等式

$$\begin{cases} v_j(t) = e^{-G_j(t-t_0)} v_j(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-G_j(t-s)} \left[\sum_{k=1}^N \tilde{G}_{jk} v_k(s) + \bar{G}_j v_j(s - \tau) \right] ds, t \in [t_0, b], \\ v_j(t_0 + s) = \theta_j(s), s \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

其中: $\tau > 0; \boldsymbol{\theta}(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_N(t))^T \in \text{PC}; \|\boldsymbol{\theta}\|_\tau < +\infty; G_j, \tilde{G}_{jk}, \bar{G}_j$ 都是正数, $j, k = 1, 2, \dots, N$ 。若 $G_j - \sum_{k=1}^N \tilde{G}_{jk} - \bar{G}_j > 0, v_j(t) \leq M \|\boldsymbol{\theta}\|_\tau^2, t \in [t_0 - \tau, t_0]$, 则 $v_j(t) \leq M \|\boldsymbol{\theta}\|_\tau^2, t \in (t_0, b)$ 。

注 1 已经有一些关于多层网络间同步的研究成果, 文献[8, 15, 18]考虑的是无时滞的两层网络同步问题, 其中文献[8]考虑的是一种基于固定时间同步的两层混合耦合网络安全通信方案。考虑到网络在某些情况下可能会发生瞬时扰动或突变, 可以采用混合控制策略将其控制到同步状态。本文设计了两种不同的混合控制方法, 得到两层时滞网络的同步准则。

2 主要结果及其证明

2.1 混合脉冲同步

本节讨论具有时滞的两层网络 (1) 和 (2) 在混合脉冲控制下的同步问题。

定理 1 假设 $f(\cdot)$ 满足假设 1, 那么带有时滞的两层网络 (1) 和 (2) 可以达到同步。若存在正常数 μ , 使得

$$2d_j - \mu - 3\rho_j - \rho_j e^{\mu\tau} > 0, 1 \leq j \leq N. \quad (6)$$

其中: $\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Gamma}) = \max\{\gamma_1, \gamma_1, \dots, \gamma_N\}$, 且存在正常数 $\alpha_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, 0 \leq \beta < \mu$, 使得

$$(1 + K_{ji})^2 \leq \alpha_i \leq e^{(\beta(t_i - t_{i-1}))}, 1 \leq j \leq l. \quad (7)$$

证明 考虑李雅普诺夫函数

$$V_j(t) = e^{\mu t} \mathbf{e}_j^T(t) \mathbf{e}_j(t). \quad (8)$$

对于 $1 \leq j \leq l, t \neq t_i, V_j(t)$ 沿着误差系统 (5) 的解轨线对时间求 Dini 导数, 并根据假设 1, 有

$$\begin{aligned} D^+ V_j(t) &= \mu V_j(t) + e^{\mu t} \dot{\mathbf{e}}_j^T(t) \mathbf{e}_j(t) + e^{\mu t} \mathbf{e}_j^T(t) \dot{\mathbf{e}}_j(t) = \mu V_j(t) + e^{\mu t} [f^T(e_j(t), e_j(t - \tau)) + \\ &\quad c \sum_{k=1}^N a_{jk} \mathbf{e}_k^T(t) \boldsymbol{\Gamma} - d_j \mathbf{e}_j^T(t)] \mathbf{e}_j(t) + e^{\mu t} \mathbf{e}_j^T(t) [f(e_j(t), e_j(t - \tau)) + c \sum_{k=1}^N a_{jk} \boldsymbol{\Gamma} e_k(t) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d_j e_j(t)] \leq \mu V_j(t) + \rho_j e^{\mu} e_j^T(t) e_j(t) + \rho_j e^{\mu} e_j^T(t - \tau) e_j(t) + c \sum_{k=1}^N a_{jk} e^{\mu} e_k^T(t) \Gamma e_j(t) - \\
& d_j e^{\mu} e_j^T(t) e_j(t) + \rho_j e^{\mu} e_j^T(t) e_j(t) + \rho_j e^{\mu} e_j^T(t) e_j(t - \tau) + c \sum_{k=1}^N a_{jk} e^{\mu} e_j^T(t) \Gamma e_k(t) - \\
& d_j e^{\mu} e_j^T(t) e_j(t) = (\mu + 2\rho_j - 2d_j) V_j(t) + \rho_j e^{\mu} [e_j^T(t - \tau) e_j(t) + e_j^T(t) e_j(t - \tau)] + \\
& c \sum_{k=1}^N a_{jk} e^{\mu} [e_k^T(t) \Gamma e_j(t) + e_j^T(t) \Gamma e_k(t)].
\end{aligned}$$

由引理 1 得

$$\begin{aligned}
D^+ V_j(t) & \leq (\mu + 2\rho_j - 2d_j) V_j(t) + \rho_j e^{\mu} [e_j^T(t) e_j(t) + e_j^T(t - \tau) e_j(t - \tau)] + \\
& c\lambda_{\max}(\Gamma) \sum_{k=1}^N a_{jk} e^{\mu} [e_j^T(t) e_j(t) + e_k^T(t) e_k(t)] = [\mu + 3\rho_j - 2d_j + \sum_{k=1}^N c\lambda_{\max}(\Gamma) a_{jk}] V_j(t) + \\
& \sum_{k=1}^N c\lambda_{\max}(\Gamma) a_{jk} V_k(t) + \rho_j e^{\mu} V_j(t - \tau) = (\mu + 3\rho_j - 2d_j) V_j(t) + \sum_{k=1}^N c\lambda_{\max}(\Gamma) a_{jk} V_k(t) + \\
& \rho_j e^{\mu} V_j(t - \tau) = -G_j V_j(t) + \sum_{k=1}^N \tilde{G}_{jk} V_k(t) + \bar{G}_j V_j(t - \tau),
\end{aligned}$$

其中: $G_j = 2d_j - \mu - 3\rho_j$; $\tilde{G}_{jk} = c\lambda_{\max}(\Gamma) a_{jk}$; $\bar{G}_j = \rho_j e^{\mu}$ 。那么, 可以得到

$$V_j(t) \leq e^{-G_j(t-t_0)} V_j(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-G_j(t-s)} [\sum_{k=1}^N \tilde{G}_{jk} V_k(s) + \bar{G}_j V_j(s - \tau)] ds. \quad (9)$$

初始条件为 $V_j(t_0 + s) = \theta_j(s) = \psi_j(s) - \varphi_j(s)$, $s \in [-\tau, 0]$ 。

对于 $t \in [t_0 - \tau, t_0]$, 可以得到

$$V_j(t) = e^{\mu} e_j^T(t) e_j(t) \leq e^{\mu_0} |\psi_j(s) - \varphi_j(s)|^2 \leq e^{\mu_0} \|\theta_j\|_{\tau}^2 \leq e^{\mu_0} \|\theta\|_{\tau}^2. \quad (10)$$

根据式 (9)、式 (10) 和引理 2 得, 对于 $t \in (t_0, t_1)$, 有

$$V_j(t) \leq e^{\mu_0} \|\theta\|_{\tau}^2, j = 1, 2, \dots, l. \quad (11)$$

接下来只需证明: 对于 $\forall t \in [t_0 - \tau, t_i)$, 有

$$V_j(t) \leq \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} e^{\mu_0} \|\theta\|_{\tau}^2, i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, l \quad (12)$$

成立即可, 其中 $\alpha_0 = 1$ 。

接下来将用数学归纳法证明以上结论。当 $i = 1$ 时, 易得结论正确。

假设对于 $t \in [t_0 - \tau, t_i - 1)$, 式 (12) 正确, 即

$$V_j(t) \leq \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{i-2} e^{\mu_0} \|\theta\|_{\tau}^2, j = 1, 2, \dots, l. \quad (13)$$

由式 (7) 得到: $V_j(t) \leq e^{\beta(t_1-t_0)} e^{\beta(t_2-t_1)} \cdots e^{\beta(t_{i-2}-t_{i-3})} e^{\mu_0} \|\theta\|_{\tau}^2 = e^{(\mu-\beta)t_0} e^{\beta(t_{i-2})} \|\theta\|_{\tau}^2$ 。由式 (5) 可以推导出 $e_j(t_i) = (1 + K_{ji}) e_j(t_i^-)$, 且由式 (7) 有

$$\begin{aligned}
V_j(t_{i-1}) & = e^{\mu_{i-1}} e^T(t_{i-1}) e_j(t)(t_{i-1}) = e^{\mu_{i-1}} [(1 + K_{j,i-1})^2 e_j^T(t_{i-1}^-) e_j(t_{i-1}^-)] = (1 + K_{j,i-1})^2 e^{\mu_{i-1}} \\
& e_j^T(t_{i-1}^-) e_j(t_{i-1}^-) \leq \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{i-2} e^{\mu_0} \|\theta\|_{\tau}^2 (1 + K_{j,i-1})^2 = \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} e^{\mu_0} \|\theta\|_{\tau}^2.
\end{aligned}$$

因为 $\alpha_{i-1} \geq 1$, 可以得到, 对于任意的 $t \in (t_{i-1} - \tau, t_{i-1})$,

$$V_j(t) \leq \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} e^{\mu_0} \|\theta\|_{\tau}^2, j = 1, 2, \dots, l. \quad (14)$$

基于引理 2 可得, 对于 $t \in (t_{i-1}, t_i)$,

$$V_j(t) \leq \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} e^{\mu_0} \|\theta\|_{\tau}^2, j = 1, 2, \dots, l. \quad (15)$$

因此式 (12) 成立。由式 (7) 可以推导出, 对于任意的 $t \in [t_{i-1}, t_i)$, $V_j(t) \leq \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} e^{\mu_0} \|\theta\|_{\tau}^2 \leq e^{\beta(t_1-t_0)} e^{\beta(t_2-t_1)} \cdots e^{\beta(t_{i-1}-t_{i-2})} e^{\mu_0} \|\theta\|_{\tau}^2 = e^{(\mu-\beta)t_0} e^{\beta(t_{i-1})} \|\theta\|_{\tau}^2$ 。因此, 对于任意的 $t \in [t_0, t_i)$, 有 $e_j(t)^T e_j(t) \leq e^{-(\mu-\beta)(t-t_0)} \|\theta\|_{\tau}^2$, $j = 1, 2, \dots, l$, 那么,

$$\|e(t)\| = \left[\sum_{k=1}^l e_j(t)^T e_j(t) \right]^{1/2} = l \|\theta\|_{\tau}^2 e^{-(\mu-\beta)(t-t_0)} = l \|\theta\|_{\tau}^2 e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad (16)$$

其中 $\gamma = \mu - \beta$ 。

对于 $l+1 \leq j \leq N$, $V_j(t)$ 沿着误差系统 (5) 解轨线的时间求导。与 $1 \leq j \leq l$ 的情况证明类似, 可以证得 $\dot{V}_j(t) \leq -G_j V_j(t) + \sum_{k=1}^N \tilde{G}_{jk} V_k(t) + \bar{G}_j V_j(t - \tau)$, 其中: $G_j = 2d_j - \mu - 3\rho_j$, $\tilde{G}_{jk} = c\lambda_{\max}(\Gamma) a_{jk}$, $\bar{G}_j = \rho_j e^{\mu\tau}$ 。则有

$$V_j(t) \leq e^{-G_j(t-t_0)} V_j(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-G_j(t-s)} \left[\sum_{k=1}^N \tilde{G}_{jk} V_k(s) + \bar{G}_j V_j(s - \tau) \right] ds. \quad (17)$$

初始条件为 $V_j(t_0 + s) = \theta_j(s) = \psi_j(s) - \varphi_j(s)$, $s \in [-\tau, 0]$ 。对于任意的 $t \in [t_0 - \tau, t_0)$,

$$V_j(t) = e^{\mu t} \mathbf{e}_j^T(t) e_j(t) \leq e^{\mu t_0} \|\psi_j(s) - \varphi_j(s)\|^2 \leq e^{\mu t_0} \|\theta_j\|_{\tau}^2 \leq e^{\mu t_0} \|\theta\|_{\tau}^2, \quad (18)$$

其中 $j = l+1, \dots, N$ 。根据引理2, 有

$$V_j(t) \leq e^{\mu t_0} \|\theta\|_{\tau}^2, j = l+1, \dots, N, t \in [t_0, +\infty)。 \quad (19)$$

因此, 对于任意的 $t \in [t_0, +\infty)$, 有 $\mathbf{e}_j(t)^T e_j(t) \leq e^{-\mu(t-t_0)} \|\theta\|_{\tau}^2$, $j = l+1, \dots, N$, 那么, $\|e(t)\| =$

$\left[\sum_{k=l+1}^N \mathbf{e}_j(t)^T e_j(t) \right]^{1/2} = (N-l) \|\theta\|_{\tau}^2 e^{-\mu(t-t_0)}$ 。因此, 两层时滞网络 (1) 和 (2) 可以达到同步。

注2 在定理1中发现, $2d_j - \mu - 3\rho_j - \rho_j e^{\mu\tau} > 0$ 意味着 $G_j - \sum_{k=1}^N \tilde{G}_{jk} - \bar{G}_j > 0$ 。另外, $d_j > \mu + 3\rho_j + \rho_j e^{\mu\tau}$ ($1 \leq j \leq N$), 所以状态反馈的下界不能任意减少, 从而达到更好的控制效果。式 (7) 中的 $(1 + K_{ji})^2 \leq e^{\beta(t_i - t_{i-1})}$ 意味着参数 K_{ji} 有与脉冲间隔 $t_i - t_{i-1}$ 有关的上界。当脉冲间隔增大时, K_{ji} 值会适当增大, 调整控制增益可使得混合脉冲控制两层网络达到同步。

2.2 混合自适应同步

本文设计一个混合的自适应控制器

$$u_j(t) = \begin{cases} (h_j(t) - 2h_j^*) e_j(t), 1 \leq j \leq l, \\ -h_j^* e_j(t), l+1 \leq j \leq N, \end{cases} \quad (20)$$

$$\dot{h}_j(t) = [(3\rho_j - 2h_j^*)/2 - \mathbf{e}_j(t)^T e_j(t)] (h_j(t) - h_j^*), 1 \leq j \leq l. \quad (21)$$

其中: $\zeta_j > 0$, 且 h_j^* 是可后选择的实数; $(h_j(t) - 2h_j^*) e_j(t)$ 表示自适应控制; $-h_j^*$ 表示状态控制输入。因此, 误差系统可以改写为

$$\begin{cases} \dot{e}_j(t) = f(e_j(t), e_j(t - \tau)) + c \sum_{k=1}^N a_{jk} \Gamma e_k(t) - h_j^* e_j(t) + (h_j(t) - h_j^*)^2 e_j(t), 1 \leq j \leq l, \\ \dot{e}_j(t) = f(e(t), e_j(t - \tau)) + c \sum_{k=1}^N a_{jk} \Gamma e_k(t) - h_j^* e_j(t), l+1 \leq j \leq N, t \geq t_0 \geq 0, \\ e_j(t_0 + s) = \psi_j(s) - \varphi_j(s), s \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (22)$$

其中: $f(e_j(t), e_j(t - \tau)) = f(y_j(t), y_j(t - \tau)) - f(x_j(t), x_j(t - \tau))$ 。

同样, 本文得到了该网络模型混合自适应控制下达到同步的充分条件。

定理2 假设 $f(\cdot)$ 满足假设1, 那么带有时滞的两层网络 (1) 和 (2) 可以达到同步。若存在正常数 μ , 使得 $2h_j^* - \mu - 3\rho_j - c\lambda_{\max}(\Gamma) \max_{1 \leq k \leq N} (a_{jk}) - \rho_j e^{\mu\tau} > 0$, $1 \leq j \leq N$, 其中 $\lambda_{\max}(\Gamma) = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}$ 。

证明 构造李雅普诺夫函数为

$$V_j(t) = e^{\mu t} \mathbf{e}_j(t)^T e_j(t) + (h_j(t) - h_j^*)^2. \quad (23)$$

对于 $1 \leq j \leq l$, $t \neq t_i$, $V(t)$ 沿着误差系统 (22) 的解轨线对时间求 Dini 导, 并由假设, 可得

$$\begin{aligned} D^+ V_j(t) &= \mu e^{\mu t} \mathbf{e}_j^T(t) e(t) + e^{\mu t} \dot{\mathbf{e}}_j^T(t) e(t) + e^{\mu t} \mathbf{e}(t)^T(t) \dot{e}_j(t) + 2(h_j(t) - h_j^*) \dot{h}_j(t) \\ &= \mu e^{\mu t} \mathbf{e}_j^T(t) e(t) + e^{\mu t} [f^T(e_j(t), e_j(t - \tau)) + c \sum_{k=1}^N a_{jk} \Gamma e_k^T(t) - h_j^* e_j^T(t) + (h_j(t) - h_j^*)^2 e_j(t)^T(t)] e_j(t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{\mu} \mathbf{e}_j^T(t) [f(\mathbf{e}_j(t), \mathbf{e}_j(t-\tau)) + c \sum_{k=1}^N a_{jk} \mathbf{I} \mathbf{e}_k(t) - h_j^* \mathbf{e}_j(t) + (h_j(t) - h_j^*) \mathbf{e}_j(t)] + 2(h_j(t) - \\
& h_j^*) [(\mu + 3\rho_j - 2h_j^*)/2 - e^{\mu} \mathbf{e}_j^T(t) \mathbf{e}_j(t)] (h_j(t) - h_j^*) \leq \mu e^{\mu} \mathbf{e}_j^T(t) \mathbf{e}(t) + \rho_j e^{\mu} \mathbf{e}_j^T(t) \mathbf{e}_j(t) + \\
& \rho_j e^{\mu} \mathbf{e}_j^T(t-\tau) \mathbf{e}_j(t) + c\lambda_{\max}(\mathbf{I}) \sum_{k=1}^N a_{jk} e^{\mu} \mathbf{e}_k^T(t) \mathbf{e}_j(t) + (h_j(t) - h_j^*)^2 e^{\mu} \mathbf{e}_j^T(t) \mathbf{e}_j(t) + \\
& \rho_j e^{\mu} \mathbf{e}_j^T(t) \mathbf{e}_j(t) + \rho_j e^{\mu} \mathbf{e}_j^T(t) \mathbf{e}_j(t-\tau) + c\lambda_{\max}(\mathbf{I}) \sum_{k=1}^N a_{jk} e^{\mu} \mathbf{e}_j^T(t) \mathbf{e}_k(t) + (h_j(t) - \\
& h_j^*)^2 e^{\mu} \mathbf{e}_j^T(t) \mathbf{e}_j(t) - 2h_j^* e^{\mu} \mathbf{e}_j^T(t) \mathbf{e}_j(t) + (h_j(t) - h_j^*)^2 (\mu + 3\rho_j - 2h_j^*) - 2(h_j(t) - \\
& h_j^*)^2 e^{\mu} \mathbf{e}_j(t)^T \mathbf{e}_j(t) = (\mu + 2\rho_j - 2h_j^*) e^{\mu} \mathbf{e}_j^T(t) \mathbf{e}_j(t) + \rho_j e^{\mu} [\mathbf{e}_j^T(t-\tau) \mathbf{e}_j(t) + \mathbf{e}_j^T(t) \mathbf{e}_j \\
& (t-\tau)] + c\lambda_{\max}(\mathbf{I}) \sum_{k=1}^N a_{jk} e^{\mu} [\mathbf{e}_k^T(t) \mathbf{e}_j(t) + \mathbf{e}_j^T(t) \mathbf{e}_k(t)] + \\
& (h_j(t) - h_j^*)^2 (\mu + 3\rho_j - 2h_j^*)。
\end{aligned}$$

根据引理 1, 有

$$\begin{aligned}
D^+ V_j(t) & \leq (\mu + 2\rho_j - 2h_j^*) \mathbf{e}_j^T(t) \mathbf{e}_j(t) + \rho_j e^{\mu} [\mathbf{e}_j^T(t) \mathbf{e}_j(t) + \mathbf{e}_j^T(t-\tau) \mathbf{e}_j(t-\tau)] + \\
& c\lambda_{\max}(\mathbf{I}) \sum_{k=1}^N a_{jk} e^{\mu} [\mathbf{e}_j^T(t) \mathbf{e}_j(t) + \mathbf{e}_k^T(t) \mathbf{e}_k(t)] + (h_j(t) - h_j^*)^2 (\mu + 3\rho_j - 2h_j^*) = \\
& (\mu + 3\rho_j - 2h_j^*) V_j(t) + \rho_j e^{\mu\tau} \mathbf{e}_j^T(t-\tau) \mathbf{e}_j(t-\tau) + c\lambda_{\max}(\mathbf{I}) \sum_{k=1}^N a_{jk} e^{\mu} \mathbf{e}_k^T(t) \mathbf{e}_k(t) \leq \\
& (\mu + 3\rho_j - 2h_j^*) V_j(t) + \sum_{k=1}^N c\lambda_{\max}(\mathbf{I}) \max_{1 \leq k \leq N} (a_{jk}) V_k(t) + \rho_j e^{\mu\tau} V_j(t-\tau) = \\
& -F_j V_j(t) + \sum_{k=1}^N \tilde{F}_{jk} V_k(t) + \bar{F}_j V_j(t-\tau)。
\end{aligned}$$

其中: $F_j = 2h_j^* - \mu - 3\rho_j$; $\tilde{F}_{jk} = c\lambda_{\max}(\mathbf{I}) \max_{1 \leq k \leq N} (a_{jk})$; $\bar{F}_j = \rho_j e^{\mu\tau}$ 。那么, 可以得到

$$V_j(t) \leq e^{-F_j(t-t_0)} V_j(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-F_j(t-s)} \left[\sum_{k=1}^N \tilde{F}_{jk} V_k(s) + \bar{F}_j V_j(s-\tau) \right] ds。 \quad (24)$$

初始条件为: $V_j(t_0 + s) = \hat{\theta}_j(s) = \psi_j(s) - \varphi_j(s) + (h_j(s) - h_j^*)^2$, $s \in [-\tau, 0]$ 。

和定理 1 的证明一样, 有 $V_j(t) \leq \|\hat{\theta}\|_{\tau}^2$, $j = l+1, \dots, N$ 。所以可以得到

$$\|\mathbf{e}(t)\| = \left[\sum_{k=l+1}^N \mathbf{e}_j(t)^T \mathbf{e}_j(t) \right]^{1/2} = l \|\hat{\theta}\|_{\tau}^2 e^{-\mu t}。$$

对于 $l+1 \leq j \leq N$, $V(t)$ 沿着误差系统 (22) 解轨线的时间求导, 与 $1 \leq j \leq l$ 的情况证明类似,

$\|\mathbf{e}(t)\| = \left[\sum_{k=l+1}^N \mathbf{e}_j(t)^T \mathbf{e}_j(t) \right]^{1/2} = (N-l) \|\hat{\theta}\|_{\tau}^2 e^{-\mu t}$ 。因此, 在混合自适应控制器 (20) 下, 两层时滞网络 (1) 和 (2) 可以达到同步。

3 数值模拟结果

本节给出了 2 个例子分别证明定理 1 和定理 2 的有效性。

例 1 选择 $N=3$, $n=1$, $c=1$, $\tau=0.2$, $\mathbf{I}=\text{diag}(1,1,1)$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.2 \end{pmatrix}$, 满足

$$a_{jj} = - \sum_{k=1, k \neq j}^N a_{jk}, \quad j = 1, 2, 3。$$

令 $f(x_j(t), x_j(t-\tau)) = 0.8x_j(t) + 0.2x_j(t-0.2)$, $f(y_j(t), y_j(t-\tau)) = 0.8y_j(t) + 0.2y_j(t-0.2)$, $\rho_j = 0.8$, 则 $(f(y_j(t), y_j(t-\tau)) - f(x_j(t), x_j(t-\tau))) = 0.8(y_j(t) - x_j(t)) + 0.2(y_j(t-$

$0.2) - x_j(t - 0.2)) \leq 0.8((y_j(t) - x_j(t)) + (y_j(t - 0.2) - x_j(t - 0.2)))$ 。

经过验证, 满足假设 1 的条件。因此, 两层时滞网络的驱动层为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0.8x_1(t) + 0.2x_1(t - 0.2) - 0.2x_1(t) + 0.1x_2(t) + 0.1x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = 0.8x_2(t) + 0.2x_2(t - 0.2) + 0.1x_1(t) - 0.2x_2(t) + 0.1x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = 0.8x_3(t) + 0.2x_3(t - 0.2) + 0.1x_1(t) + 0.1x_2(t) - 0.2x_3(t). \end{cases}$$

令 $d_j = 2$, $\mu = 0.1$, 则 $2d_j - \mu - 3\rho_j - \rho_j e^{\mu\tau} = 2 \times 2 - 0.1 - 3 \times 0.8 - 1 \times e^{0.1 \times 0.2} > 0$, 满足定理 1 的条件。

取 $K_{1i} = 0.1, K_{2i} = 0, K_{3i} = 0$, 即第一个节点受混合脉冲牵制控制, 而其他节点只受状态反馈控制, 则时滞网络的响应层为

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = 0.8y_1(t) + 0.2y_1(t - 0.2) - 0.2y_1(t) + 0.1y_2(t) + 0.1y_3(t) - 2(x_1(t) - y_1(t)), \\ \Delta y_1(t_i) = y_1(t_i) - y_1(t_i^-) = 0.1(y_1(t_i^-) - x_1(t_i^-)), t = t_i, \\ \dot{y}_2(t) = 0.8y_2(t) + 0.2y_2(t - 0.2) + 0.1y_1(t) - 0.2y_2(t) + 0.1y_3(t) - 2(x_2(t) - y_2(t)), \\ \dot{y}_3(t) = 0.8y_3(t) + 0.2y_3(t - 0.2) + 0.1y_1(t) + 0.1y_2(t) - 0.2y_3(t) - 2(x_3(t) - y_3(t)). \end{cases}$$

图 1 和图 2 分别表示 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的状态, 而在混合控制器控制下, 两层时滞网络的驱动层和响应层达到同步, 如图 3 ~ 图 5 所示, 它们分别表示牵制控制 1 个节点、2 个节点和 3 个节点。因此, 根据例 1 可以得出, 牵制控制节点越多, 系统的控制效果越好。在实际应用中, 应该会考虑更多的因素来决定控制策略。

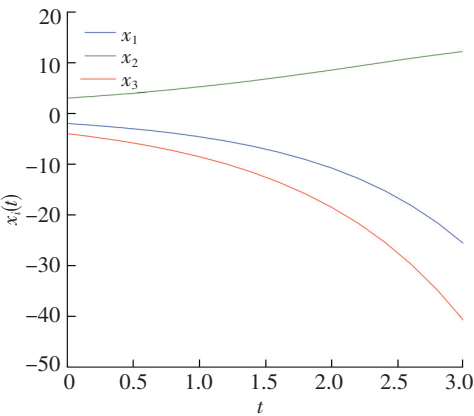


图 1 两层时滞复杂网络驱动层的状态 $x_i(t)$
Fig.1 The state $x_i(t)$ of the driving layer in two layer time-delay complex network

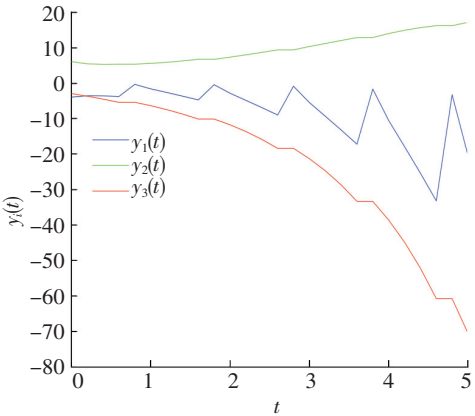


图 2 两层时滞网络响应层的状态 $y_i(t)$
Fig.2 The state $y_i(t)$ of the response layer in two layer time-delay complex network

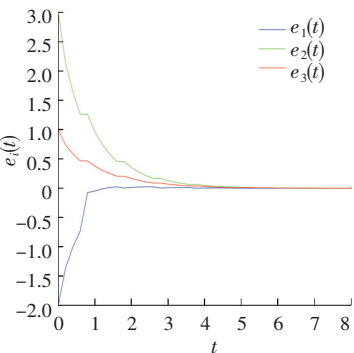


图 3 两层时滞网络在牵制控制 1 个节点下的同步误差 $e_i(t)$
Fig.3 Synchronize error of two layer time-delay network in constraint control at one node

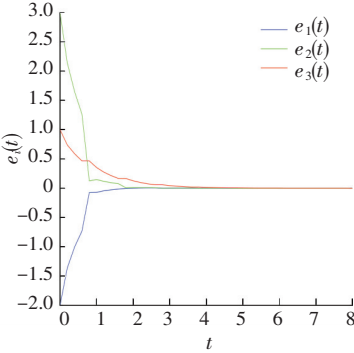


图 4 两层时滞网络在牵制控制 2 个节点下的同步误差 $e_i(t)$
Fig.4 Synchronize error of two layer time-delay network in constraint control at two nodes

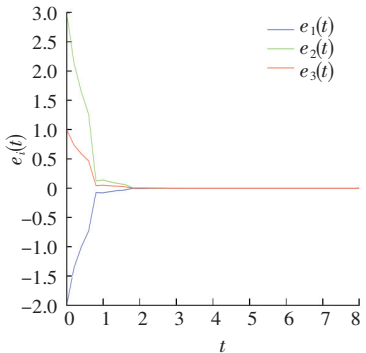


图 5 两层时滞网络在牵制控制 3 个节点下的同步误差 $e_i(t)$
Fig.5 Synchronize error of two layer time-delay network in constraint control at three nodes

例 2 令 $h_1^* = 2$, $h_2^* = 2.5$, $h_3^* = 3$, 其他参数和例 1 一致。这里利用混合自适应控制器牵制控制前 2 个节点, 那么误差系统可改写为

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = 0.8e_1(t) + 0.2e_1(t-0.2) - 0.2e_1(t) + 0.1e_2(t) + 0.1e_3(t) - 2e_1(t) + (h_1(t) - 2)^2e_1(t), \\ \dot{e}_2(t) = 0.8e_2(t) + 0.2e_2(t-0.2) + 0.1e_1(t) - 0.2e_2(t) + 0.1e_3(t) - 2.5e_2(t) + (h_2(t) - 2.5)^2e_2(t), \\ \dot{e}_3(t) = 0.8e_3(t) + 0.2e_3(t-0.2) + 0.1e_1(t) + 0.1e_2(t) - 0.2e_3(t) - 3e_3(t). \end{cases}$$

通过计算, 可以得到: $2h_1^* - \mu - 3\rho_1 - c\lambda_{\max}(\mathbf{I})\max_{1 \leq k \leq N}(a_{1k}) - \rho_1 e^{\mu\tau} = 0.584 > 0$, $2h_2^* - \mu - 3\rho_2 - c\lambda_{\max}(\mathbf{I})\max_{1 \leq k \leq N}(a_{2k}) - \rho_2 e^{\mu\tau} = 1.584 > 0$, $2h_3^* - \mu - 3\rho_3 - c\lambda_{\max}(\mathbf{I})\max_{1 \leq k \leq N}(a_{3k}) - \rho_3 e^{\mu\tau} = 2.584 > 0$, 符合定理 2 的条件。自适应更新规则的初始条件设为 $h_1(0) = 0$, $h_2(0) = 0$, 仿真模拟结果见图 6。由图 6 可见, 在混合自适应控制器 (20) 下, 误差系统在大约 $t = 4$ 时达到同步。自适应规则如图 7 所示, 在系统达到同步时, 自适应状态也达到稳定状态。

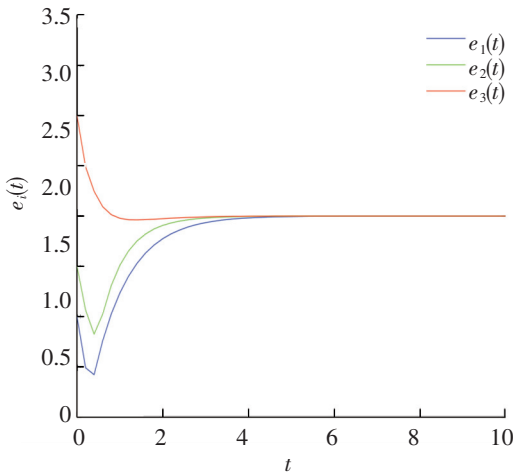


图 6 两层时滞网络在混合自适应控制器下的同步误差 $e_i(t)$

Fig.6 Synchronize error $e_i(t)$ of two layer time-delay network in hybrid adaptive controller

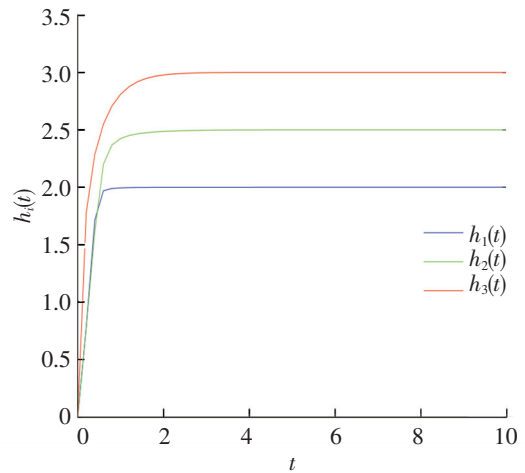


图 7 自适应规则 $h_j(t)$

Fig.7 Adaptive rules $h_j(t)$

4 结论

本文研究了带有时滞的两层网络在混合控制策略下的同步问题, 分别提出了混合脉冲控制和混合自适应控制。利用稳定性理论和不等式技巧, 得到了两层时滞网络同步准则, 得到的结果改进了已有的两层网络层间同步。最后, 给出了 2 个数值例子, 证明 2 个定理的有效性。

[参考文献]

- [1] 王占山, 张化光, 王智良. 一类混沌神经网络的全局同步[J]. 物理学报, 2006, 55(6): 2687-2693. DOI:10.3321/j.issn:1000-3290.2006.06.004.
- [2] LI Z, CHEN G R. Global synchronization and asymptotic stability of complex dynamical networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II Analog and Digital Signal Processing, 2006, 53(1): 28-33. DOI:10.1109/TSCII.2005.854315.
- [3] AO B, ZHENG Z G. Partial synchronization on complex networks[J]. Europhysics Letters, 2006, 74(2): 229-235. DOI:10.1209/epl/i2005-10533-0.
- [4] 陈姚, 吕金虎. 复杂动态网络的有限时间同步[J]. 系统科学与数学, 2009(10): 1419-1430.
- [5] REN Y, JIANG H J, LI J R, et al. Finite-time synchronization of stochastic complex networks with random coupling delay via quantized aperiodically intermittent control[J]. Neurocomputing, 2021, 420(1): 337-348. DOI:10.1016/j.neucom.2020.05.103.

- [6] LU W L, LIU B, CHEN T P. Cluster synchronization in networks of coupled non-identical dynamical systems[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2010, 20(1): 175. DOI:10.1063/1.3329367.
- [7] PECORA L M, CARROLL T L. Master stability functions for synchronized coupled systems[J]. *Physical Review Letters*, 1998, 80(10): 2109-2112. DOI:10.1103/PhysRevLett.80.2109.
- [8] ZHOU L L, TAN F, LI X H, et al. A fixed-time synchronization-based secure communication scheme for two-layer hybrid coupled networks[J]. *Neurocomputing*, 2021, 433(7): 131-141. DOI:10.1016/j.neucom.2020.12.033.
- [9] FENG J W, SUN S H, XU C, et al. The synchronization of general complex dynamical network via pinning control[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 67(2): 1623-1633. DOI:10.1007/s11071-011-0092-5.
- [10] DIMAROGONAS D V, FRAZZOLI E, JOHANSSON K H. Distributed event-triggered control for multi-agent systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(5): 1291-1297. DOI:10.1109/TAC.2011.2174666.
- [11] RAKKIYAPAN R, DHARANI S, CAO J. Synchronization of neural networks with control packet loss and time-varying delay via stochastic sampled-data controller[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, 26(12): 3215-3226. DOI:10.1109/TNNLS.2015.2425881.
- [12] KHADRA A, LIU X Z, SHEN X M. Analyzing the robustness of impulsive synchronization coupled by linear delayed impulses[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(4): 923-928. DOI:10.1109/TAC.2009.2013029.
- [13] LI C D, LIAO X F. Complete and lag synchronization of hyperchaotic systems using small impulses[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 22(4): 857-867. DOI:10.1016/j.chaos.2004.03.006.
- [14] TURCI L, MACAU E. Adaptive node-to-node pinning synchronization control of complex networks[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2012, 22(3): 033151. DOI:10.1063/1.4754436.
- [15] LI H J. Driving-based generalized synchronization in two-layer networks via adaptive intermittent pinning control[C]//International Workshop on Complex Systems and Networks. Doha, Qatar: IWCSN, 2017: 306-312. DOI:10.1109/IWCSN.2017.8276544.
- [16] KAN Y, LU J Q, QIU J L, et al. Exponential synchronization of time-varying delayed complex-valued neural networks under hybrid impulsive controllers[J]. *Neural Networks*, 2019, 114: 157-163. DOI:10.1016/j.neunet.2019.02.006.
- [17] WU X F, BAO H B. Finite time complete synchronization for fractional-order multiplex networks[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, 377(8): 125188. DOI:10.1016/j.amc.2020.125188.
- [18] TANG L K, LU J A, LU J H. A threshold effect of coupling delays on intra-layer synchronization in duplex networks[J]. *Science China (Technological Sciences)*, 2018, 61(12): 133-140. DOI:10.1007/s11431-017-9285-7.
- [19] SUN W, CHEN Z, LU J H, et al. Outer synchronization of complex networks with delay via impulse[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69(4): 1751-1764. DOI:10.1007/s11071-012-0383-5.
- [20] WANG H M, DUAN S K, HUANG T W, et al. Synchronization of memristive delayed neural networks via hybrid impulsive control[J]. *Neurocomputing*, 2017, 267: 615-623. DOI:10.1016/j.neucom.2017.06.028.
- [21] WU X Q, LI Y N, WEI J, et al. Inter-layer synchronization in two-layer networks via variable substitution control[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(4): 2371-2387. DOI:10.1016/j.jfranklin.2019.12.019.
- [22] ZHOU L L, TAN F, YU F, et al. Cluster synchronization of two-layer nonlinearly coupled multiplex networks with multi-links and time-delays[J]. *Neurocomputing*, 2019, 359(24): 264-275. DOI:10.1016/j.neucom.2019.05.077.
- [23] ZHANG Q J, LU J N, LU J, et al. Adaptive feedback synchronization of a general complex dynamical network with delayed nodes[J]. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 2013, 44(2): 996-1003. DOI:10.1155/2013/974132.
- [24] WU J S, JIAO L C. Synchronization in dynamic networks with nonsymmetrical time-delay coupling based on linear feedback controllers[J]. *Physica A*, 2008, 387(8/9): 2111-2119. DOI:10.1016/j.physa.2007.09.011.
- [25] ZHAO H Y, ZHANG Q. Global impulsive exponential anti-synchronization of delayed chaotic neural networks[J]. *Neurocomputing*, 2011, 74(4): 563-567. DOI:10.1016/j.neucom.2010.09.016.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)