［文章编号］1007 -7405(2024)03 -0253 -09　　DOI:10.19715/j.jmuzr.2024.03.08

觅食竞技场下浮游生物模型的动力学行为

赵　宇，魏春金

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

［摘要］主要讨论觅食竞技场下浮游生物的动力学行为。证明对于任意给定的正初始值，系统都存在唯一的全局正解；应用随机微分方程的比较定理，得到系统持久与灭绝的充分条件，并且证明系统具有一个唯一的遍历平稳分布。最后，用数值模拟验证了理论结果。

［关键词］浮游生物；觅食竞技场；动力学；平稳分布；持久；灭绝

［中图分类号］O 211.63

Dynamics Behavior of the Plankton Model in Foraging Arena

ZHAO Yu, WEI Chunjin

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, the dynamics behavior of a plankton model in foraging arena were investigated. Firstly, it was proved that there was a unique global positive solution starting from the positive initial value. Then, sufficient conditions for extinction and persistence in mean were obtained by comparison theorem for stochastic differential equation. In addition, it was proved that there existed a unique ergodic stationary distribution. Finally, the theoretical results were verified by numerical simulation.

Keywords: plankton; foraging arena; dynamics; stationary distribution; persistence; extinction

0　引言

浮游植物是海洋生态系统中重要的生产者，是食物链的基础环节，在海洋生态的物质循环和能量转化过程中起着重要作用。浮游动物是海洋生态系统中非常重要的生态类群，其种类组成繁殖快、数量大、分布广，有着极其重要的生态学意义。浮游动物通过捕食作用控制浮游植物的数量，同时作为鱼类等高层营养者的饵料，浮游植物的数量变化可以直接影响鱼类等的资源量，在海洋生态系统的结构和功能中起着重要的调控作用[1-3]。因此，研究浮游生物的动力学行为具有重要的意义。

文献［4］提出一个模型为

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = x(t)[a - bx(t) - sy(t)/(\beta + x(t))]\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}y(t) = y(t)[esx(t)/\beta + x(t) - c - fy(t)/(y(t)^2 + h_2^2)]\mathrm{d}t。 \end{cases} \tag{1}$$

其中：$x(t)$、$y(t)$ 分别是浮游植物和浮游动物在 t 时刻的密度；a 是浮游植物的内禀增长率；b 是浮游植物种内竞争率；c 是浮游动物的自然死亡率，其中浮游动物通过 Holling II 型功能反应 $\lambda_1 = sx/(x+\beta)$ 来捕食浮游植物；β 是半饱和常数；s 是摄食率；e 是浮游动物捕食的转换效率；$fy^2/(y^2+h_2^2)$ 表示浮游动物被捕食能力为 f 的鱼类所捕食而丧失的生物量。鱼类的捕食功能被假定为具有半饱和常数 h_2 的 Holling

［收稿日期］2021 -10 -07
［基金项目］国家自然科学基金项目“渣油加氢体系催化剂级配数学模型”（22072057）
［作者简介］通信作者：魏春金（1973—），教授，博士，从事生物数学方向研究，E-mail:chunjinwei92@163.com

III 型功能反应。

在水生生物系统中，很多生物都会有觅食竞技场的行为[5]，根据觅食竞技场理论，捕食者和食饵活动的空间和时间限制导致每个食饵种群分成脆弱和不脆弱两部分，其中脆弱是指食饵容易被捕食，不脆弱的食饵会躲在难以被捕食的地方，从而限制附近有限数量捕食者的觅食活动，以及捕食者与食饵之间的相互作用，因此，捕食率取决于脆弱与不脆弱的食饵之间的比例。文献［6］用 $\lambda_2 = sx/(\beta + y)$ 来描述这种觅食竞技场下的功能反应。基于此，本文考虑在觅食竞技场下用 λ_2 来代替方程（1）中的 λ_1，从而得到模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = x(t)[a - bx(t) - sy(t)/(\beta + y(t))]\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}y(t) = y(t)[hx(t)/(\beta + y(t)) - c - fy(t)/(y(t)^2 + h_2^2)]\mathrm{d}t。 \end{cases} \tag{2}$$

其中 $h = es$。此外，在现实生活中，随机干扰是处处存在的，浮游生物同样也会受到环境的影响[7-9]，所以随机模型会比确定性模型更有说服力。受文献［10－11］的启发，本文将浮游植物的出生率与浮游动物的自然死亡率分别加上随机项，得到模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = x(t)[a - bx(t) - sy(t)/(\beta + y(t))]\mathrm{d}t + \sigma_1 x(t)\mathrm{d}B_1(t), \\ \mathrm{d}y(t) = y(t)[hx(t)/(\beta + y(t)) - c - fy(t)/(y(t)^2 + h_2^2)]\mathrm{d}t + \sigma_2 y(t)\mathrm{d}B_2(t)。 \end{cases} \tag{3}$$

其中：$\sigma_i^2(i = 1,2)$ 表示白噪声强度；$B_1(t)$、$B_2(t)$ 是相互独立的标准布朗运动。

1 预备知识

令 $(\Omega, F, \{F_t\}_t \geqslant 0, P)$ 是一个带有滤子 $\{F_t\}$ 并且满足通常条件（即 $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ 是右连续单调递增，且 F_0 包含所有零测集）的完备概率空间。为方便起见，约定以下记号：$\mathbf{R}_+ := \{x: x > 0\}$；$\mathbf{R}_+^n := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n\}$；$|X(t)| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$。

随机微分方程 $\mathrm{d}x(t) = f(x(t),t)\mathrm{d}t + g(x(t),t)\mathrm{d}B(t)$ 的解记作 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))(t \geqslant 0)$，其中：$f \in L^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R}^n)$；$g \in L^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R}^{n\times m})$；$B(t)$ 是 m 维布朗运动。

定义 1[12] 如果 $(x(t), y(t))$ 是系统（3）的任意解，那么：i）$x(t)$ 是均值灭绝的，如果 $\limsup_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s < 0$ 或者 $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$；ii）$x(t)$ 是均值非持久的，如果 $\limsup_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s = 0$；iii）$x(t)$ 是均值弱持久的，如果 $\limsup_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s > 0$；iv）$x(t)$ 是均值强持久的，如果 $\liminf_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s > 0$。

定义 2[13] 系统（3）的解被称为是随机最终有界的，如果对任意的 $\varepsilon \in (0,1)$，都存在一个正常数 $H = H(\varepsilon)$，使得对任意的初始值 $(x(0), y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$，系统（3）的解 (x,y) 都有如下的性质：$\limsup_{t\to\infty} P(|X(t)| \geqslant H(\varepsilon)) \leqslant \varepsilon$，其中 $|X(t)| = \sqrt{x^2 + y^2}$。

引理 1[14-15] 对 Markov 过程 $X(t)$，若存在具有正则边界的有界区域 $U \in \mathbf{R}^d$ 具有如下性质：1）对任意的 $x \in U$，扩散矩阵 $\boldsymbol{A}(X)$ 的最小特征值是非零的；2）存在非负 C^2-函数 V，使得 LV 在 $\mathbf{R}^d \setminus U$ 上为负数，则 Markov 过程 $X(t)$ 存在唯一的遍历平稳分布 $\mu(\cdot)$。

引理 2[16] 令 $x(t) \in C[\Omega \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+]$，1）若存在正常数 α_0、T 和 $\alpha \geqslant 0$，使得当 $t > T$ 时，$\ln x(t) \leqslant \alpha t - \alpha_0\int_0^t x(s)\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n}\beta_i B_i(t)$，其中 $\beta_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是一个常数，$B_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 为独立标准布朗运动，则 $\limsup_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s \leqslant \alpha/\alpha_0$；2）若存在正常数 α_0、T 和 $\alpha \geqslant 0$，使得当 $t > T$ 时，$\ln x(t) \geqslant \alpha t - \alpha_0\int_0^t x(s)\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n}\beta_i B_i(t)$，其中 $\beta_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是一个常数，$B_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 为独立标准布朗运动，则

$\lim\limits_{t\to+\infty}\inf t^{-1}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s \geqslant \alpha/\alpha_0$ 。

引理3 考虑系统

$$\mathrm{d}x_1 = [ax_1(t) - bx_1^2(t)]\mathrm{d}t + \sigma_1 x_1(t)\mathrm{d}B_1(t), \tag{4}$$

若 $a-\sigma_1^2/2>0$，则 $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup(\ln x_1(t)/t) = 0$。

引理4[17-18] 令 $\Phi(t) = \mathrm{e}^{(a-\sigma_1^2/2)t+\sigma_1 B_1(t)}/(1/x(0)) + b\int_0^t \mathrm{e}^{(a-\sigma_1^2/2)u+\sigma_1 B_1(u)}\mathrm{d}u$,则 $\Phi(t)$ 是方程 $\mathrm{d}\Phi(t) = \Phi(t)(a-b\Phi(t))\mathrm{d}t + \sigma_1\Phi(t)\mathrm{d}B_1(t)(\Phi(0) = x(0))$ 的唯一解,且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup E[\Phi(t)] \leqslant a/b$。

2 全局正解的存在性和唯一性

定理1 对任意给定的初值 $(x(0),y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$, 系统（3）在 $t\in[0,\infty)$ 存在唯一正解 $(x(t),y(t))$, 并且以概率1存在于 $\mathbf{R}_+^2$ 中。

证明 因为式（3）的系数满足局部 Lipschitz 条件，并且对任意给的初值 $(x(0),y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$，系统（3）都会存在一个局部解 $(x(t),y(t)) \in \mathbf{R}_+^2$ 在 $t\in[0,\tau_e)$ 上，其中 τ_e 是爆破时间。现为了证明这个解是全局的，只需证明 $\tau_e=\infty$ 几乎处处成立。因此，令 $k_0>1$ 为任意大的常数，使得 $(x(t),y(t)) \in [1/k_0,k_0]$，对于任意的正数 $k\geqslant k_0$，定义一个停时序列 $\tau_k = \inf\{t\in[0,\tau_e): x(t) \not\subseteq (1/k,k)$ 或 $y(t) \not\subseteq (1/k,k)\}$。

定义 $\inf\mathbf{\Phi} = +\infty$（$\mathbf{\Phi}$ 代表一个空集）。显然当 $k\to\infty$ 时，τ_k 是单调递增的，且 $\tau_k<\tau_e$，于是有 $\tau_\infty = \lim\limits_{k\to+\infty}\tau_k$，其中 $\tau_\infty\leqslant\tau_e$。因此，只需证明 $\tau_\infty\to\infty$ 。

假设 $\tau_\infty \not\to \infty$，则存在常数 $T_1\geqslant 0$、$\varepsilon\in(0,1)$ 和一个正整数 $k_1\geqslant k_0$，使得 $P\{\tau_k\leqslant T_1\}\geqslant\varepsilon$，$\forall_k \geqslant k_1$。

定义一个 C^2-函数 $V(x,y):\mathbf{R}_+^2\to\mathbf{R}_+, V(x,y) = x-\ln x+y-\ln y$ 。由 Itô 公式可得, $\mathrm{d}V = \mathrm{LV}\mathrm{d}t + \delta_1(x(t)-1)\mathrm{d}B_1(t) + \delta_2(y(t)-1)\mathrm{d}B_2(t)$，其中, $\mathrm{LV} = ax-bx^2-sxy/(\beta+y)-a+bx+sy/(\beta+y)+hxy/(\beta+y)-cy-fy^2/(y^2+h^2)-hx/(\beta+y)+c+fy/(h_2^2+y^2)+\sigma_1^2/2+\sigma_2^2/2 \leqslant -bx^2+x(a+b+h)-a+s+c+[-cy^3-fy^2+fy-ch_2^2y/(h_2^2+y^2)]+\sigma_1^2/2+\sigma_2^2/2 \leqslant -b[x-(a+b+h)/b]^2+[-cy^3-fy^2+fy-ch_2^2y/(h_2^2+y^2)]+(a+b+h)^2/(4b)-a+s+c+\sigma_1^2/2+\sigma_2^2/2 \leqslant K_1+K_2\leqslant K$ 。其中 K_1、K_2、K 都是常数。

因为 $(-cy^3-fy^2+fy-ch_2^2y)/(h_2^2+y^2)$ 最高项小于0，所以当 $y\geqslant 0$ 时，$(-cy^3-fy^2+fy-ch_2^2y)/(h_2^2+y^2)$ 一定有一个最大值 K_1，$K_2 = [(a+b+h)^2/(4b)]-a+s+c+\sigma_1^2/2+\sigma_2^2/2$，$K = K_1+K_2$ 。后面证明与文献［19］相同，这里省略。

3 随机持久与灭绝

定理2 对任意初始值 $x(0)>0$、$y(0)>0$，系统（3）的解都是随机最终有界的。

证明 由式（3）可得, $\mathrm{d}x(t)\leqslant x(t)(a-bx(t))\mathrm{d}t+\sigma_1 x(t)\mathrm{d}B(t)$，根据引理4和随机微分方程的比较定理，$x(t)\leqslant\varphi(t)$ 对所有的 $t\in[0,\infty)$ 处处成立，所以 $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup Ex(t)\leqslant\lim\limits_{t\to+\infty}\sup E\Phi(t)\leqslant a/b$ 。

再令 $G(t) = (h/s)x(t)+y(t)$，$m = \min\{a,c\}$，因此, $\mathrm{d}G(t) = [(ah/s)x(t)-(hb/s)x^2(t)-cy(t)-(fy^2(t)/y^2(t)+h_2^2)]\mathrm{d}t + (h/sx(t))\sigma_1\mathrm{d}B_1(t) + y(t)\sigma^2\mathrm{d}B_2(t) \leqslant [x(t)((ah/s)-(hb/s)x(t))-cy(t)]\mathrm{d}t + (h/s)x(t)\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)+y(t)\sigma^2\mathrm{d}B_2(t) \leqslant [(2ah/s)x(t)-(ah/s)x(t)-(hb/s)x^2(t)-cy(t)]\mathrm{d}t+(h/s)x(t)\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)+y(t)\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)\leqslant[(2ah/s)x(t)-(hb/s)x^2(t)]\mathrm{d}t - m((h/s)x(t)+y(t))\mathrm{d}t+(h/s)x(t)\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)+y(t)\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)$，对其两边同时积分得，

$$G(t) \leqslant G(0) + \int_0^t [(2ah/s)x(u) - (hb/s)x^2(u) - mG(u)]\mathrm{d}u +$$
$$(h/s)\sigma_1\int_0^t x(u)\mathrm{d}B_1(u) + \sigma_2\int_0^t y(u)\mathrm{d}B_2(u)。$$

对其两边同时取期望得，

$$EG(t) \leqslant G(0) + \int_0^t E[(2ah/s)x(u) - (hb/s)x^2(u) - mG(u)]\mathrm{d}u,$$
$$\mathrm{d}EG(t)/\mathrm{d}t \leqslant (2ah/s)Ex(t) - (hb/s)Ex^2(t) - mEG(t)。$$

又因为 $E(x^2) \geqslant (E(x))^2$，所以，$(2ah/s)Ex(t) - (hb/s)Ex^2(t) \leqslant (2ah/s)Ex(t) - (h/s)(Ex(t))^2 \leqslant (a^2h/(sb))$，即 $\mathrm{d}EG(t)/\mathrm{d}t \leqslant (a^2h/(sb)) - mEG(t)$。

两边同时取上极限并整理得 $0 \leqslant \limsup\limits_{t\to+\infty} E(G(t)) \leqslant (a^2h/(sbm))$，即 $\limsup\limits_{t\to+\infty} E((h/s)x(t) + y(t)) \leqslant (a^2h/(sbm))$。

由 Markov 不等式可知，对任意的 $k>0$，都有 $P(x(t) \geqslant k) \leqslant Ex(t)/k$，即 $\limsup\limits_{t\to+\infty} P(x(t) \geqslant k) \leqslant a/(bk)$。令 $\varepsilon = a/(bk)$，则对任意的 ε，都存在一个 $k(\varepsilon) = b\varepsilon/a$，使得 $\limsup\limits_{t\to+\infty} P(x(t)) \geqslant k(\varepsilon)) \leqslant \varepsilon$，因此 $x(t)$ 是随机最终有界的，并且存在 $\bar{x}>0$，使得对所有的 $t\geqslant0$，$\limsup\limits_{t\to+\infty} x(t) \leqslant \bar{x}$。同理可得，存在一个 $\bar{y}>0$，使得对所有的 $t\geqslant0$，$\limsup\limits_{t\to+\infty} y(t) \leqslant \bar{y}$。

定理 3　设 $(x(t)、y(t))$ 是系统（3）满足初始条件 $x(0)>0$、$y(0)>0$ 的任意解，则：i）如果 $a<\sigma_1^2/2$，那么 $x(t)$ 将会灭绝；ii）如果 $a>s+\sigma_1^2/2$，那么 $x(t)$ 将会均值强持久。

证明　对 $\ln x$ 运用 Itô 公式，得到

$$\mathrm{d}\ln x(t) = [a - bx(t) - \sigma_1^2/2 - sy(t)/(\beta + y(t))]\mathrm{d}t + \sigma_1\mathrm{d}B_1(t), \tag{5}$$

$\mathrm{d}\ln x(t) \leqslant (a-\sigma_1^2/2)\mathrm{d}t + \sigma_1\mathrm{d}B_1(t)$，式（5）两边同时积分并除以 t 得，$(\ln x(t) - \ln x(0))/t \leqslant (a - \sigma_1^2/2) + \sigma_1 B_1(t)/t$，两边同时取极限后，由强大数定律以及条件 i）得，$\limsup\limits_{t\to+\infty} \ln x(t)/t \leqslant a - \sigma_1^2/2 < 0$。所以当 $t\to+\infty$ 时，$x(t)$ 将以指数趋向于 0，即 $x(t)$ 灭绝。

现在证明 ii）。由式（1）可得，$\mathrm{d}\ln x = [a - bx - sy/(\beta+y) - \sigma_1^2/2]\mathrm{d}t + \sigma_1\mathrm{d}B_1(t) \geqslant (a - bx - s - \sigma_1^2/2)\mathrm{d}t + \sigma_1\mathrm{d}B_1(t)$，即 $\ln x(t) - \ln x(0) \geqslant (a - s - \sigma_1^2/2)t - b\int_0^t x(u)\mathrm{d}u + \sigma_1 B_1(t)$，因此，当 $a - s - \sigma_1^2/2 > 0$ 时，由引理 2 得，$\liminf\limits_{t\to+\infty}(\int_0^t x(u)\mathrm{d}u)/t \geqslant (a - s - \sigma_1^2/2)/b > 0$，即 $x(t)$ 在条件 ii 下是均值强持久的。

定理 4　设 $(x(t),y(t))$ 是系统（3）满足初始条件 $x(0)>0$、$y(0)>0$ 的任意解，则：i）当 $0 < h/\beta(a-\sigma_1^2/2) < b(c+\sigma_2^2/2)$ 时，则 $y(t)$ 灭绝；ii）当 $h/\bar{y} + \beta(a-\sigma_1^2/2) > b(c+\sigma_2^2/2)$ 时，则 $y(t)$ 将均值强持久。

证明　i）将式（5）两边同时积分并除以 t 可得，$(\ln x(t) - \ln x(0))/t \leqslant a - \sigma_1^2/2 - (b/t)\int_0^t x(u)\mathrm{d}u + \sigma_1 B_1(t)$。由引理 2 得，

$$\limsup_{t\to+\infty}(\int_0^t x(u)\mathrm{d}u)/t \leqslant (a - \sigma_1^2/2)/b。 \tag{6}$$

对 $\ln y$ 用 Itô 公式可得

$$\mathrm{d}\ln y(t) = (-c - \sigma_2^2/2 + hx(t)/(\beta + y(t)) - fy(t)/(y^2(t) + h_2^2))\mathrm{d}t + \sigma_2\mathrm{d}B_2(t)。 \tag{7}$$

对式（7）两边同时积分并除以 t 可得，$(\ln y(t) - \ln y(0))/t \leqslant (-c - \sigma_2^2/2) + (h/t\beta)\int_0^t x(u)\mathrm{d}u - f/(t(\bar{y}^2 + h_2^2))\int_0^t y(u)\mathrm{d}u + \sigma_2 B_2(t)/t$，即

$$(\ln y(t) - \ln y(0))/t \leqslant (-c - \sigma_2^2/2) + (h/t\beta)\int_0^t x(u)\mathrm{d}u + \sigma_2 B_2(t)/t。\tag{8}$$

对式（8）两边同时取极限并将式（6）代入式（8）可得

$$\limsup_{t\to+\infty}(\ln y(t))/t \leqslant (h(a - \sigma_1^2/2))/(b\beta) - (c + \sigma_2^2/2)。\tag{9}$$

即当 $h(a - \sigma_1^2/2) < b\beta(c + \sigma_2^2/2)$ 时，$\limsup_{t\to+\infty}(\ln y(t)/t) < 0$，即 $y(t)$ 将以指数趋于0。

ii）由式（5）、式（7）可得，

$$\ln(x(t)/x(0)) = (a - \sigma_1^2/2)t - b\int_0^t x(u)\mathrm{d}u - \int_0^t [sy(u)/(y(u) + \beta)]\mathrm{d}u + \sigma_1 B_1(t),$$

$$\ln(y(t)/y(0)) = (-c - \sigma_2^2/2)t + h\int_0^t [x(u)/(\beta + y(u))]\mathrm{d}u - \int_0^t [fy(u)/(y(u)^2 + h_2^2]\mathrm{d}u + \sigma_2 B_2(t)。$$

所以，

$$\begin{aligned} h/(\bar{y} + \beta)\ln(x(t)/x(0)) + b\ln(y(t)/y(0)) \geqslant [h/(\bar{y} + \beta)(a - \sigma_1^2/2) - b(c + \sigma_2^2/2)]t - \\ [bf/(h_2^2) + sh/((\beta + \bar{y})\beta)]\int_0^t y(u)\mathrm{d}u + hb\int_0^t [x(u)/(\beta + y(u)) - x(u)/(\bar{y} + \beta)]\mathrm{d}t + \\ h/(\beta + y)\sigma_1 B_1(t) + b\sigma_2 B_2(t) \geqslant [h/(\beta + \bar{y})(a - \sigma_1^2/2) - b(c + \sigma_2^2/2)]t - [bf/(h_2^2) + \\ sh/((\beta + \bar{y})\beta)]\int_0^t y(u)\mathrm{d}u + h/(\beta + \bar{y})\sigma_1 B_1(t) + b\sigma_2 B_2(t)。\end{aligned}$$

由引理3和随机微分方程的比较定理得，当 $t>0$ 时，$x(t) \leqslant x_1(t)$，所以 $\lim_{t\to+\infty}((\ln x(t))/t) \leqslant \lim_{t\to+\infty}((\ln x_1(t))/t) = 0$。又因为 $\lim_{t\to+\infty}((-\ln x(0))/t) = 0$，所以 $\lim_{t\to+\infty}\ln(x(t)/x(0))/t \leqslant 0$，即存在一个 $T>0$，当 $t>T$ 时，$\ln(x(t)/x(0))/t \leqslant 0$。所以当 $t>T$ 时，$\ln(y(t)/y(0)) \geqslant (1/b)[h/(\beta + \bar{y})(a - \sigma_1^2/2) - b(c + \sigma_2^2/2)]t - [bf/h_2^2 + sh/((\beta + \bar{y})\beta)]\int_0^t y(u)\mathrm{d}u + h/(\beta + \bar{y})\sigma_1 B_1(t) + b\sigma_2 B_2(t)$。再根据引理2，$\liminf_{t\to+\infty}(1/t)\int_0^t y(u)\mathrm{d}u \geqslant h/(\beta + \bar{y})(a - \sigma_1^2/2) - b(c + \sigma_2^2/2)b[bf/h_2^2 + sh/((\beta + \bar{y})\beta]) > 0$，所以当 $h/(\beta + \bar{y})(a - \sigma_1^2/2) > b(c + \sigma_2^2/2)$ 时，$y(t)$ 均值强持久。

注1　定理3和定理4表明，当 $a<\sigma_1^2/2$ 时，种群 $x(t)$ 灭绝；当 $a>s+\sigma_1^2/2$ 时，$x(t)$ 将会均值强持久。当 $a < b\beta(c + \sigma_2^2/2)/h + \sigma_1^2/2$ 时，种群 $y(t)$ 灭绝；当 $a > (b(\beta + \bar{y})(c + \sigma_2^2/2))/h + \sigma_1^2/2$ 时，种群 $y(t)$ 均值强持久。由此可见，白噪声强度 σ_1、σ_2 对种群 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的生存有较大的影响。但是，当 $\sigma_1^2/2 < a < s + \sigma_1^2/2$ 和 $(b\beta(c + \sigma_2^2/2))/h + \sigma_2^2/2 < a < (b(\beta + \bar{y})(c + \sigma_2^2/2))/h + \sigma_1^2/2$ 时，种群 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的持久与灭绝情况尚无法判断。

4　遍历平稳分布的存在性

定理5　若 $\lambda = a - \sigma_1^2/2 - ((a + b\beta)c)/h - ((a + b\beta)\sigma_2^2)/(2h) - (\beta c(a + b\beta)^2)/(4h^2h_2^2(a + b\beta + s)) > 0$，则系统（3）存在唯一的遍历平稳分布 $\mu(\cdot)$。

证明　为了证明定理5，需要验证引理1中条件1）、2）。系统（3）的扩散矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}\sigma_1^2x^2 & 0\\ 0 & \sigma_2^2y^2\end{pmatrix}$，显然满足条件1）。下面验证条件2）。定义 C^2-函数 $V(x,y):\mathbf{R}_+^2\to\mathbf{R}_+$，$V = MV_1 + V_2 + e$，其中，$V_1 = \ln(\beta + x) - \ln(x) + (l/h)y - (a + b\beta)/(h)\ln(y)$，$V_2 = x + (s/h)y$，$M$、$l$、$e$ 都是常数，$e = -\min\{MV_1 + V_2\}$ 来确保 V 的非负性，$l = (h(a + b\beta + s))/(c\beta)$，$M$ 将在后面的证明中给出。

$$\begin{aligned}\mathrm{LV}_1 = {}& (x/(\beta + x) - 1)(a - bx - sy/(\beta + y)) + (1/2)((1/x^2) - (1/(\beta + x)^2))\sigma_1^2x^2 + \\ & ((ly/h) - (a + b\beta)/h)(hx/(\beta + y) - c - fy/(y^2 + h_2^2)) + (a + b\beta)/(2h\sigma_2^2) \leqslant\end{aligned}$$

$ax/(\beta+x)-bx^2/(\beta+x)+bx-(a+b\beta)/((\beta+y)x)-a+\sigma_1^2/2+(a+b\beta)/(hc)+$
$((a+b\beta)/(2h))\sigma_2^2+(s/\beta-(cl/h))y-fly^2/(h(y^2+h_2^2))+((a+b\beta)fy)/(h(y^2+h_2^2))+$
$lxy/(\beta+y)\leqslant ax/(\beta+x)+(b\beta x)/(\beta+x)-(a+b\beta)/((\beta+y)x)-a+\sigma_1^2/2+$
$((a+b\beta)/h)c+((a+b\beta)/(2h))\sigma_2^2+(s/\beta-(cl/h))y-fly^2/(h(y^2+h_2^2))+$
$((a+b\beta)fy)/(h(y^2+h_2^2))+lxy/(\beta+y)\leqslant((a+b\beta)(xy-x^2))/((\beta+x)(\beta+y))+$
$(s/\beta-(cl/h))y-a+\sigma_1^2/2+(a+b\beta/h)c+(a+b\beta/(2h))\sigma_2^2+lxy/(\beta+y)+$
$(-fl(y-(a+b\beta)/(2l))^2+(f(a+b\beta)^2/(4l))h(y^2+h_2^2)\leqslant$
$((a+b\beta)xy)/(\beta x)+(s/\beta-(cl/h))y-a+\sigma_1^2/2+((a+b\beta)/h)c+$
$((a+b\beta)/(2h))\sigma_2^2+lxy/(\beta+y)+(f(a+b\beta)^2)/(4lhh_2^2)=$
$(s/\beta+(a+b\beta)/(\beta)-(cl/h)y-\lambda+lxy/(\beta+y)=-\lambda+lxy/(\beta+y)$,
$\lambda=a-\sigma_1/2-((a+b\beta)/h)c-((a+b\beta)/(2h))\sigma_2^2-(\beta c(a+b\beta)^2)/(4h^2h_2^2(a+b\beta+s))>0$。

$$\mathrm{LV}_2=ax-bx^2-(sc/h)y-sfy^2/(h(y^2+h_2^2))\leqslant ax-bx^2-(sc/h)y,$$

所以，$\mathrm{LV}\leqslant M(-\lambda+xy/(\beta+y))+ax-bx^2-(sc/h)y$，其中 M 满足 $M\lambda\geqslant a^2/(4b)+2$。

定义开集 $D_\varepsilon=\{(x,y)\in\mathbf{R}_+^2:\varepsilon_1<x<1/\varepsilon_1,\varepsilon 2<y<1/\varepsilon_2\}$，其中 $0<\varepsilon_1<1$、$0<\varepsilon_2<1$ 为一个充分小的数且满足：$\varepsilon_1\leqslant 1/(Ml)$，$\varepsilon_1^2\leqslant b/(2(N_1+1))$，$\varepsilon_2\leqslant(\beta\varepsilon_1)/(Ml)$，$\varepsilon_2\leqslant sc/(2h(N_2+1))$，其中 N_1、N_2 都是常数，会在后面的证明中给出。

将 $D_\varepsilon^c=\mathbf{R}_+^2\setminus D_\varepsilon$ 分为如下 4 个区域：$D_\varepsilon^1=\{(x,y)\in\mathbf{R}_+^2:x<\varepsilon_1\}$，$D_\varepsilon^2=\{(x,y)\in\mathbf{R}_+^2:x<1/\varepsilon_1,y<\varepsilon_2\}$；$D_\varepsilon^3=\{(x,y)\in\mathbf{R}_+^2:x>1/\varepsilon_1\}$，$D_\varepsilon^4=\{(x,y)\in\mathbf{R}_+^2:y>1/\varepsilon_2\}$。

情形 1 在区域 D_ε^1 上，有 $\mathrm{LV}\leqslant-M\lambda+Mlx+ax-bx^2-(sc/h)y\leqslant Ml\varepsilon_1-2\leqslant-1$。

情形 2 在区域 D_ε^2 上，有 $\mathrm{LV}\leqslant-M\lambda+Mlxy/\beta+ax-bx^2-(sc/h)y\leqslant(Ml\varepsilon_2)/(\beta\varepsilon_1)-2\leqslant-1$。

情形 3 在区域 D_ε^3 上，有 $\mathrm{LV}\leqslant-M\lambda+(Ml+a)x-(b/2)x^2-(b/2)x^2-(sc/h)y$。

注意到 $-M\lambda+(Ml+a)x-(b/2)x^2-(sc/h)y$ 有上界，不妨记为 N_1，因此有 $\mathrm{LV}\leqslant N_1-(b/(2\varepsilon_2^2))\leqslant-1$。

情形 4 在区域 D_ε^4 上，有 $\mathrm{LV}\leqslant-M\lambda+(Ml+a)x-bx^2-(sc/(2h))y-(sc/(2h))y$，同理 $-M\lambda+(Ml+a)x-bx^2-(sc/(2h))y$ 也有上界，不妨记为 N_2，因此有 $\mathrm{LV}\leqslant N_2-(sc/(2h\varepsilon_2))\leqslant-1$。

综上所述，对于任意的 $(x,y)\in\mathbf{R}_+^2\setminus D_\varepsilon$，有 $\mathrm{LV}\leqslant-1$，即引理 1 中条件 2）成立。因此系统（3）存在唯一遍历平稳分布 $\mu(\cdot)$。

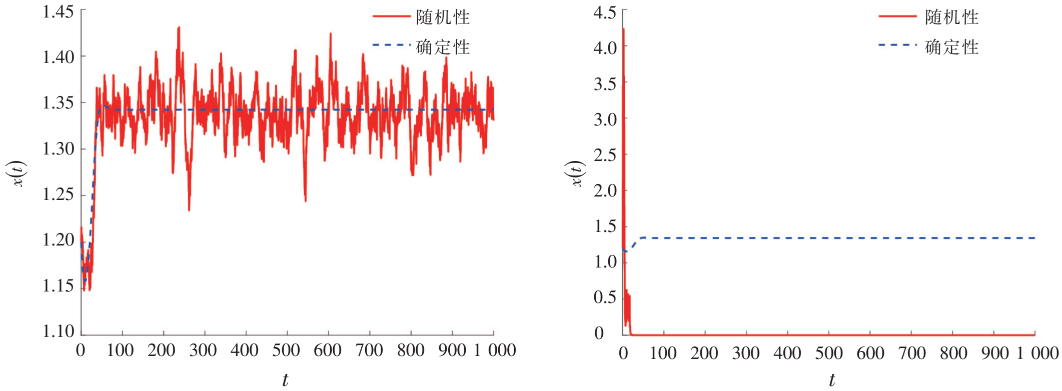
5 数值模拟

为了验证上述理论，采用 Milstein 高阶方法[20]对给定初始值和参数的系统（3）进行数值模拟。

对于系统（3），首先取初值 $x_0=1.2$、$y_0=0.8$，并选择适当参数 $a=0.2$、$b=0.1$、$s=0.1$、$\beta=0.1$、$h=0.02$、$c=0.05$、$h_2=0.1$、$f=0.1$。当 $\sigma_1=0.01$ 时，通过计算可得，$a-s=0.1>\sigma_1^2/2=0.0001$，满足定理 3ii 的条件，因此 $x(t)$ 均值强持久，见图 1a；其他参数不变，把 $\sigma_1=0.01$ 增大到 $\sigma_1=0.70$，此时 $a=0.2<\sigma_1^2/2=0.245$，满足定理 3i）的条件，$x(t)$ 灭绝，见图 1b；改变 σ_1、σ_2 为 $\sigma_1=0.01$、$\sigma_2=2.00$，其他参数不变，此时满足定理 4i）$0<(h/\beta)(a-\sigma_1^2/2)=0.03999<b(c+\sigma_2^2/2)=0.0405$ 的条件，此时 $y(t)$ 灭绝，见图 2a；当 $\sigma_1=0.01$、$\sigma_2=0.01$ 时，$h/(\beta+\bar{y})(a-\sigma_1^2/2)>0.0114>b(c+\sigma_2^2/2)=0.0050$ 成立，满足定理 4ii）的条件，此时 $y(t)$ 是持久的，见图 2b。

图 1 和图 2 表明，白噪声对于浮游动植物具有一定的影响，当白噪声较小时，系统（3）的解会在确定性模型解的附近波动；当白噪声较大时，浮游生物会趋于灭绝。当取与图 1a 相同的参数时，

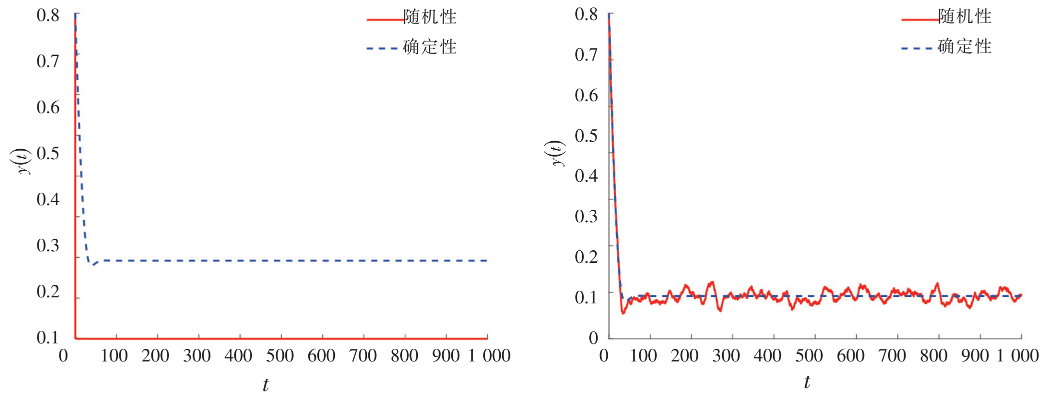
此时满足定理 5 平稳分布的条件，系统存在一个平稳分布，见图 3。



a）σ_1=0.01　　b）σ_1=0.70

图 1　$x(t)$的随机系统的解与其确定性系统的解

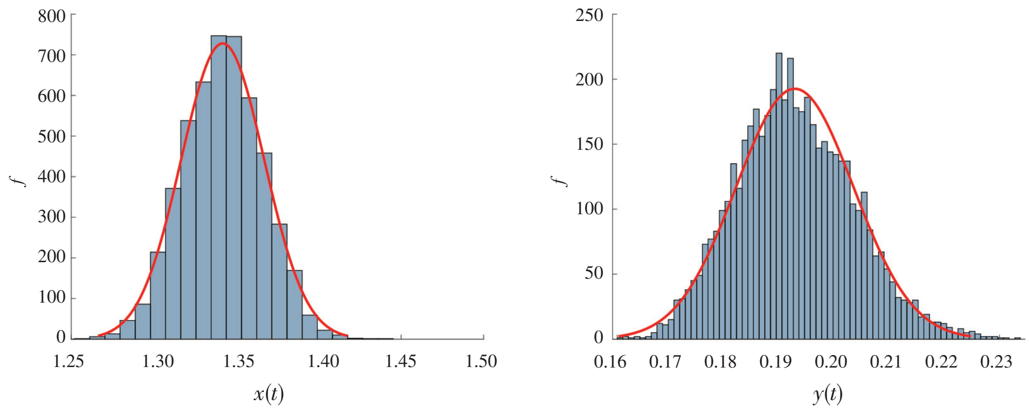
Fig.1　The solution $x(t)$ of stochastic system and its corresponding deterministic system



a）σ_2=2.00　　b）σ_2=0.01

图 2　$y(t)$的随机系统的解与其确定性系统的解

Fig.2　The solution $y(t)$ of stochastic system and its corresponding deterministic system



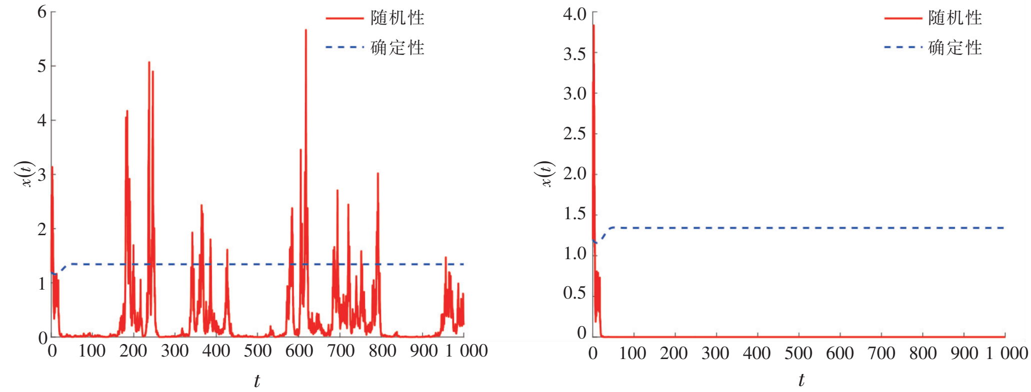
a）$x(t)$　　b）$y(t)$

图 3　定理 5 条件下 $x(t)$与 $y(t)$的平稳分布图

Fig.3　Stationary distribution of $x(t)$and $y(t)$ under the condition of theorem 5

下面讨论注 1 的情况。分别取 $\sigma_1=0.50$ 和 $\sigma_1=0.63$，其余参数与图 1 相同，这两个 σ_1 的值都满足 $\sigma_1^2/2<a<s+\sigma_1^2/2$，由数值模拟的结果可以看出，在 $\sigma_1^2/2<a<s+\sigma_1^2/2$ 范围内种群 $x(t)$ 可能是持久的（见图 4a），也可能是灭绝的（见图 4b）。同样，当取 $\sigma_2=0.6$ 和 $\sigma_2=1.5$，这两个 σ_2 也都满足注 1 $(b\beta(c+\sigma_2^2/2))/h+\sigma_1^2/2<a<(b(\beta+y)(c+\sigma_2^2/2))/h+\sigma_1^2/2$ 的条件。由数值模拟的结果

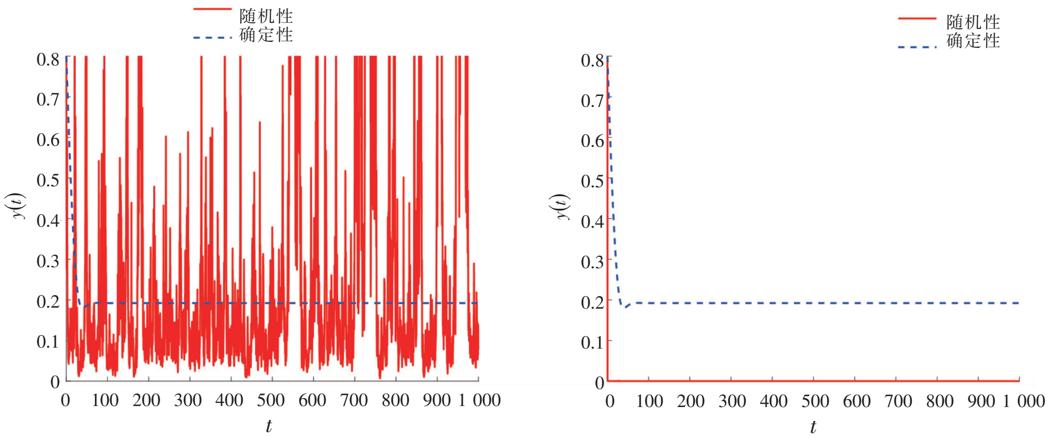
可以看出，在这个范围内种群 $y(t)$ 可能是持久的（见图5a），也可能是灭绝的（见图5b）。



a）σ_1=0.50　　b）σ_1=0.63

图4　$x(t)$的随机系统的解与其确定性系统的解

Fig.4　The solutions $x(t)$ of stochastic system and its corresponding deterministic system



a）σ_2=0.6　　b）σ_2=1.5

图5　$y(t)$的随机系统的解与其确定性系统的解

Fig.5　The solution $y(t)$ of stochastic system and its corresponding deterministic system

6　结论

本文研究了觅食竞技场下的浮游生物模型的动力学行为，分别研究并证明系统（3）全局正解的存在唯一性及浮游动植物数量的有界性，表明此系统是符合生物生态学的，具有可研究性。其次得到了系统（3）的平均持续生存与灭绝的充分条件，表明环境扰动对浮游动植物的影响很大。通过构造Lyapunov函数，得到了系统（3）存在唯一遍历平稳分布的充分条件。最后，通过数值模拟验证了所得结论的正确性。未来的工作可以考虑环境污染及种群之间的扩散，这样会使模型的动力学更加丰富和贴近实际。

[参考文献]

[1]李少菁,许振祖,黄加祺,等.海洋浮游动物学研究[J].厦门大学学报(自然科学版),2001,40(2):574-585.

[2]TURNER T,TESTER P A. Toxic marine phytoplankton,zooplankton grazers,and pelagic food webs[J]. Limnology and Oceanography,1997,42(2):1203-1213.

[3]JOHN C,PICK F R,HAMILTON P B. Potamoplankton size structure and taxonomic composition:influence of river size and nutrient concentrations[J]. Limnology and Oceanography,2006,51(1):681-689.

[4]MALA B,TAPAN S,RIMPI P. Deterministic and stochastic analysis of a delayed allelopathic phytoplankton model within

fluctuating environment[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems,2008,2(3):958-970.
[5]ROBERT N,CARL J W,VILLY C. Foraging arena theory[J]. Fish and Fisheries,2012,13(1):41-59.
[6] CAI Y M,MAO X R. Stochastic prey-predator system with foraging arena scheme[J]. Applied Mathematical Modelling, 2018,64:357-371.
[7]LIU M,PARTHA S M. Dynamical behavior of a one-prey two-predator model with random perturbations[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,2015,28(1/2/3):123-137.
[8]LI L,JIN Z. Pattern dynamics of a spatial predator-prey model with noise[J]. Nonlinear Dynamics,2011,67(3):1737-1744.
[9]MAY R M,ALLEN P M. Stability and complexity in model ecosystems[J]. IEEE Transactions on Systems,Man,and Cybernetics,1976,6(12):887.
[10]WANG Y,ZOU X. On a predator-prey system with digestion delay and anti-predation strategy[J]. Journal of Nonlinear Science,2020,30(1):1579-1605.
[11]ROY J,BARMAN D,ALAM S. Role of fear in a predator-prey system with ratio-dependent functional response in deterministic and stochastic environment[J]. Biosystems,2020,197:104176.
[12]LIU M,WANG K. Persistence and extinction in stochastic non-autonomous logistic systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2010,375(2):443-457.
[13]MAO X R,YUAN C G,ZOU J Z. Stochastic differential delay equations of population dynamics[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2005,304(1):296-320.
[14]JI C Y,JIANG D Q,SHI N Z. Analysis of a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Hollingtype II schemes with stochastic perturbation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2009,359(2):482-498.
[15]RAFAIL K. Stochastic stability of differential equations[M]. Amsterdam,Neterlands:Sijthoff Noordhoff,1980.
[16]LIU M,QIU H,WANG K. A remark on a stochastic predator-prey system with time delays[J]. Applied Mathematics Letters, 2013,26(3):318-323.
[17]JIANG D Q,SHI N Z,LI X Y. Global stability and stochastic permanence of a non-autonomous logistic equation with random perturbation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2007,340(1):588-597.
[18]MAJUMDER A,ADAK D,BAIRAGI N. Phytoplankton-zooplankton interaction under environmental stochasticity: survival, extinction and stability[J]. Applied Mathematical Modelling,2021,89(2):1382-1404.
[19]LIU Q,JIANG D Q. Stationary distribution and extinction of a stochastic predator-prey model with herd behavior[J]. Journal of the Franklin Institute,2018,355(16):8177-8193.
[20]HIGHA M,DESMOND J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. SIAM Review,2001,43(3):525-546.
[21]WEI F Y,CHEN L H. Psychological effect on single-species population models in a polluted environment[J]. Mathematical Biosciences,2017,290:22-30.
[22]WEI F Y,WANG C J. Survival analysis of a single-species population model with fluctuations and migrations between patches[J]. Applied Mathematical Modelling,2020,81(5):113-127.

(责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤)